数理解析研究所講究録
第5巻 1965年 40-66

作用素環と確率論に関する二，三の問題

東京工業大学　　梅　垣　寿　春

§0.　はしがき

確率論に関する理論は Kolmogorov の基礎付けよつて測度空間の方法が導入され，以来，多数の専門家によつて古典的な諸々の概念が発展され，拡張され，今日の膨大な分野を形成するに至つたわけであるが，これを純函数解析の立場から眺めるとき，一種の確率現象でありながら既成の謂所確率論の分野からはみ出していると思われることがある，（例えば，§6で論ずる測定の理論など）。この理由は確率空間の諸理論はその L^{∞} 空間に立つて建設されていて，謂所，essentially abelian の理論の系列に属すると考えられるからである。従つて non-abelian の系列に属する対象を解明するためには，abelian の壁を突き破らなければならない。これには数学的道具が abelianと比して極端に難しく，その構成も繁雑を極めることが多い。このことは，たとえば一般調和解析の理論で局所 compact 群に対して，abelian のときと non-abelian のときの差違を考える場合と丁度同じような関係にある。

この解説では，その辺に主眼点を置き，函数解析の立場に立ちながら確率論（厳密には確率空間の理論）は可換（abelian）な作用素環に関する analysis であるという見方をとり，非可換（non-abelian）な作用素環の理論に沿つて確率論の一部の概念を発展させることを試み，またそのことにより作用素環自体の構造を解明するキツカケを与え，他方では作用素環と一見，何えの関連もないと思われる情報理論の符号化の問題などとも関連が生ずるに至ることの大体の様子を説明しようと思う。

作用素環とは Hilbert空間（複素）上の有界な線型作用素の作る代数系で，恒等作用素 I を含み，作用素の弱位相に関して閉じている自己共軛環のことである。これは， von Neumann (1929年)によつて導入され，彼が（あるときは Murray と共同で） 10数年間にわたつて建設した膨大な理論が根幹をなしている。そのため，最近では作用素環を彼の名前を冠して von Neumann環という名称で呼ぶことが多い。（別名 ： ring of operators， W^* − algebra， W^* − 環）。

von Neumann に続いてさらに理論を一般的な手法の下で取扱う研究が続き，Dixmier， Dye， Kadison， Kaplansky， Segal および日本の多くの函数解析の専門家によつて幾多の貴重な結果がもたらされてきた。さらに最近では Glimm などの研究に始まる可分 C^* 環の表現論に作用素環の理論が活用され一つの傾向を作つている。

作用素環では factor の型に関する理論が一つの中心的な課題となつているのであるが，それに付随して作用素環の積分的分解（Reduction Theory of von Neumann），合成（tensor product， crossed product）などの理論をめぐつて多くの研究がある。（合成に関しては竹崎，鶴丸両氏の講演参照）。

もう一つの課題は作用素環上の積分論（非可換な積分論）である。これは von Neumann によつて導入された基礎概念を用いて一つの作用素環に関する作用素（必ずしも有界でない）の可測性を導入し，通常のルベーグ式積分論における一連の基本定理が一般の半有限な作用素環で論ぜられ，ルベーグ式積分論は作用素環が可換な場合に帰着せしめられる（Dixmier， Dye， Segal など）。

そこで得られた基礎概念に測度論的な手法を用いることによつて，確率論の一つの拡張概念を導入し，それを発展さすことが可能となる。さらにそのことによつて，作用素環上の基本的な operation(たとえば，von Neumann の $\mathbb{P}_1$ $\mathbb{P}_2 \cdots$ や Dixmier の $\natural$ など）や，それに関連した部分環のもつ性質の一面が明かとなり，それが作用素環論以外の（確率論の，あるいは統計力学などの）既成の概念とどのような対応関係にあるかとか，作用素論的な定式化がどのようになされるかなどが議論の対象となつてくる。また逆に本来の確率論的対象を作用素環論を用いて解明する手段が提案されることもあり得る。以上のような観点に立つて，Dixmier， Dye， Segal の理論を出発点とし，筆者自身，あるいは筆者と中村正弘教授の共作の結果などを中心として稿を進めることにする。

（この外に，Ingarden や Urbanik などが行つている一連の結果で，作用素（環）と確率論を結びつける手段，たとえば同時確率分布の存在と可換性（同時測定可能性）や

states の集団の éntropy の理論なども興味ある対象であるが時間とスペースの関係で省略する。)

§1. 非可換積分(作用素環上の積分)の概略

本§では§2以下に対する準備として，そこで必要な概念だけに限って説明する。

$$\mathfrak{h} = \{ \xi , \eta , \cdots \}$$

を(複素) Hilbert 空間，

$$\mathfrak{A} = \{ A , B , \cdots \}$$

を $\mathfrak{h}$ 上の作用素環，$\mathfrak{A}^+$ を $\mathfrak{A}$ のエルミット正値な要素全体

$$\mathfrak{A}^+ = \{ A \in \mathfrak{A} ; A \geqq 0 \} ,$$

$\mathfrak{A}^{(P)}$ を $\mathfrak{A}$ の射影作用素全体

$$\mathfrak{A}^{(P)} = \{ A \in \mathfrak{A} ; A^* = A = A^2 \} ,$$

$\mathfrak{A}^{(U)}$ を $\mathfrak{A}$ のユニタリ作用素全体

$$\mathfrak{A}^{(U)} = \{ A \in \mathfrak{A} ; A^* A = A A^* = I \}$$

とする。

$\mathfrak{A}^+$ 上で定義された実数値函数 μ が <u>trace</u> であるとは，任意の対 A $B \in \mathfrak{A}^+$ および実数 α, $\beta \geqq 0$ に対して

$$0 \leqq \mu (A) \leqq +\infty ,$$
$$\mu (\alpha A + \beta B) = \alpha \mu (A) + \beta \mu (B) ,$$
$$\mu (U^{-1} A U) = \mu (A) \quad (U \in \mathfrak{A}^{(U)})$$

を満たすときを云う，ただし $0 \cdot +\infty = 0$ とする。

trace μ が <u>normal</u> とは

$$A_\alpha \uparrow A \ (A_\alpha , A \in \mathfrak{A}^+) \text{ ならばつねに } \mu (A_\alpha) \uparrow \mu (A)$$

を満たすこと。 trace μ が<u>有限</u>とは $0<\mu(I)<+\infty$; μ が<u>半有限</u>とは，任意の $0\neq A\in\mathfrak{A}^{+}$ に対して $B\in\mathfrak{A}^{+}$ が存在して

$$0<\mu(B)<+\infty \quad , \quad B\leqq A\ ;$$

μ が <u>faithful</u> とは

$$\mu(A)=0\ (A\in\mathfrak{A}^{+}) \text{ ならばつねに } A=0\ .$$

作用素環 $\mathfrak{A}$ が <u>(半)</u> <u>有限型</u>とは，任意の $0\neq A\in\mathfrak{A}^{+}$ に対して (半) 有限な normal trace μ が存在して，$0<\mu(A)<+\infty$ を満たすときをいい，$\mathfrak{A}$ がσ－有限とは $\{P_\alpha\}_D<\mathfrak{A}^{(P)}$ が $P_\alpha\perp P_\beta\ (\alpha\neq\beta)$ ならば $\{P_\alpha\}$ は高々可算個のときをいう。このとき次のことがいえる：

(1)　$\mathfrak{A}$ が有限型でかつσ－有限

　$\Longleftrightarrow$ 有限な faithful, normal trace が存在する；

(2)　$\mathfrak{A}$ が半有限型　半有限な faithful, normal trace が存在する。

この μ による演算が通常の積分演算に対応する（§2参照），従って $\mathfrak{A}$ 上で積分論を展開するためには trace μ の存在を仮定するわけで，以下断わらない限り $\mathfrak{A}$ と μ は (2) の条件を満していると仮定する。

$\mathfrak{H}$ 上の作用素A (必ずしも有界を仮定しない) が $\mathfrak{A}$ に関して<u>可測</u> (これを簡単に $\mathfrak{A}$－可測と書く) とは，(i) $A\,\eta\,\mathfrak{A}$ (Aがすべての $U\in\mathfrak{A}^{(U)}$ と交換可能のこと)，(ii) Aの定義域 $\mathcal{D}(A)$ がStrongly dense (射影作用素の列 $\{P_n\}<\mathfrak{A}^{(P)}$ が存在して $P_n\mathfrak{H}<\mathcal{D}(A)$，$P_n^{\perp}$ が有限型で $P_n^{\perp}\downarrow 0$)，を満たすときをいう。

---

1) $P\in\mathfrak{A}^{(P)}$ が有限型とは $\mathfrak{A}$ を $P\mathfrak{H}$ 上に制限した $\mathfrak{A}_P$ が有限型作用素環であること。

A，Bが $\mathfrak{A}$－可測ならば λA (λはスカラー)，A^{*}，$A+B$，AB もすべて $\mathfrak{A}$－可測である。ここで用いた和，積は代数的な (それぞれの定義域上でとつた) 和，積の閉苞である。従って $\mathfrak{A}$－可測な作用素全体を $\overline{\mathfrak{A}}$ で表わすならば $\overline{\mathfrak{A}}$ は*環である。この外 $\mathfrak{A}$－可測作用素の列の a，e，収束の概念も導入され，この収束と代数系 $\overline{\mathfrak{A}}$ の連続性についての議論もあるが省略する。(Segal〔18〕参照)

固定した μ (faithful normal trace) に対して

$$J_\mu(=J)=\{A\in\mathfrak{A}\ ;\ \mu(|A|)<+\infty\}\quad (|A| \text{ は作用素の絶対値})$$

とおくと，これは$\mathfrak{A}$の両側 ideal で弱位相に関して$\mathfrak{A}$で dense である。すべての $A \in J_\mu$ に対して

$$\|A\|_p = (\mu(|A|^p))^{1/p} \qquad (p \geqq 1)$$

とおくと，$\|\cdot\|_p$ は J_μ 上でノルムの条件を満たし，J_μ は線型ノルム空間となる。この空間の完備化した Banach 空間を $L^p(\mathfrak{A}, \mu)$，あるいは単に $L^p(\mathfrak{A})$，L^p 等で表わす。すべての $A \in L^p(\mathfrak{A})$ は $\mathfrak{H}$ 上の $\mathfrak{A}$ − 可測作用素，つまり $L^p(\mathfrak{A}) < \overline{\mathfrak{A}}$ であることが示される。（Segal〔18〕，小笠原―吉永〔17〕）。多くの場合，L^1，L^2 空間が議論の対象となる。

$\mathfrak{A}$の trace μ は $L^1(\mathfrak{A})$ 上の線型汎函数に一意に拡張される：

$$|\mu(A)| \leqq \mu(|A|) = \|A\|_1 \quad (A \in L^1(\mathfrak{A}))\,;$$

$$(\mu(|A|^p))^{1/p} = \|A\|_p \,(A \in L^p(\mathfrak{A}))\,,$$

$$A \in L^p(\mathfrak{A}) \iff |A|^p \in L^1(\mathfrak{A})\,.$$

ここで次の定理は基本的である：

〔Radon–Nibodym の定理〕（Dye–Segal）$\mathfrak{A}$ のすべての normal な正値線型汎函数 ρ に対して，作用素 $0 \leqq D \in L^1(\mathfrak{A})$ が存在して

$$\rho(A) = \mu(DA) \qquad \text{for all } A \in \mathfrak{A}^+\,.$$

この D を微分演算形式で $D = \dfrac{d\rho}{d\mu}$ とかく。

（trace μ は faithful を仮定しているが，これを仮定しないときは $\mu(P) = 0$ $(P \in \mathfrak{A}^{(P)})$ ならば $\rho(P) = 0$，つまり μ に関して ρ が絶対連続，これを $\rho \ll \mu$ とかく，に対しても同じく成立する。また，Dye〔6〕 は$\mathfrak{A}$が (1) の条件を満たし，μ が trace $(\mu(U^{-1}AU) = \mu(A))$ の仮定がない場合に示した。その場合も同じく微分演算形式でかくことにする。）この ρ が $\rho(I) = 1$ のとき nomal state と名付ける。

〔Riesz の定理〕（Segal） $f \in L^1(\mathfrak{A})^*$ （$L^1(\mathfrak{A})$ の共役空間）に対して R_f が存在して

$$f(A) = \mu(R_f A) \quad (\text{for all } A \in \mathfrak{A})。$$

§ 2. Conditional Expectation

これは確率論における個有の基礎概念である。これの説明から初める。確率空間を $(M, \mathfrak{M}, m)$ とし，その上で有界 (mod. m) 可測函数の全体を $L^{\infty}(M)$ とすると，これは point-wise の加法と乗法 (mod. m) に関して環をなし，複素共役をとる operation を $*$ とし，ノルムを函数の絶対値の ess. sup で定義すると C^{*}-環 となる。すべての $f \in L^{\infty}(M)$ に対して Hilbert 空間 $L^{2}(M)$ 上の有界線型作用素 T_f が $(T_f \xi)(x) = f(x)\xi(x)$ $(\xi \in L^{2}(M))$ によつて対応する。

$$\mathfrak{A}(M) = \{ T_f \ ; \ f \in L^{\infty}(M) \}$$

とおくと $\mathfrak{A}(M)$ は $L^{2}(M)$ 上の可換な作用素環 (詳しくは極大可換) となり $L^{\infty}(M)$ と $\mathfrak{A}(M)$ は対応 $f \leftrightarrow T_f$ によつて $*$ 同型となる。この $\mathfrak{A}(M)$ を $L^{\infty}(M)$ の multiplication operator algebra という。この対応はその定義域を拡大して，すべての可測函数の空間 $\overline{L^{\infty}(M)}$ と $\mathfrak{A}(M)$ －可測作用素の空間 $\overline{\mathfrak{A}}$ の間の $*$ 同型対応も与えている。さらに

$$(3) \qquad \mu(T_f) = \int_M f(x)\, dm(x)$$

とおくと μ は $\mathfrak{A}(M)$ 上の有限な faithful normal trace となり，対応 $f \rightarrow T_f$ によつて，M 上の m による積分の諸概念は $\mathfrak{A}(M)$ 上の μ によるそれと完全に一致する。たとえば Banach 空間 $L^{p}(M, m)$ は $L^{p}(\mathfrak{A}(M), \mu)$ $(p \geqq 1)$ と $f \equiv T_f$ によつて同一視される。逆に $\mathfrak{A}$ を可換な作用素環で faithful な μ をもつとし，$\mathfrak{A}$ の Gelfand 表現を $C(M)$ とすると，M は超ストーン空間となつて，μ によつて M 上に正則・正規な確率測度 m が一意に定義され (3) が満たされる。

以上では，$(M, \mathfrak{M}, m)$ が確率空間の場合で初めたが，一般の測度空間としても議論は同じで，そのときは m に対応する trace μ は半有限となり，また逆の場合の $\mathfrak{A}$ の Gelfand 表現の空間は locally compact となるように構成される。この辺の対応関係の一般論は色々と研究されている。ここではこれ以上は立ち入らないことにする (例えば Dixmier 〔4〕, Segal 〔18〕, 〔19〕など)。

さて，話を元へ戻し，$\mathcal{L}$ を $\mathfrak{M}$ の Borel subfield として固定しておく。$L^{\infty}_{\mathcal{L}}$ を $\mathcal{L}$ で可測な $f \in L^{\infty}(M)$ の全体とする。このとき $f \in L^{\infty}(M)$ に対して函数 $f' \in L^{\infty}_{\mathcal{L}}$ が定まつて

$$\int_S f(x)\,dm(x) = \int_S f'(x)\,dm(x) \qquad (S \in \mathcal{L})$$

が成立する。この f' は f のみに依存して一意に (mod.m) 決定され，それを Doob に従つて

$$f' = E(f \mid \mathcal{L})$$

とおき，Borel subfield $\mathcal{L}$ に関する f の conditional expectation という。これによる対応 $f \to E(f \mid \mathcal{L})$ は $L^\infty(M)$ を $L^\infty_{\mathcal{L}}$ の上に線型に写像し，多くの代数的な特性をもつている。確率論においては，この概念が martingal, Markov 過程その他多くの極限定理等に応用されている。この基礎概念を作用素環に導入することを試みる。

$\mathfrak{A}$ を§1で与えたように半有限作用素環，μ をその半有限 faithful normal traceとし，$\mathcal{B}$ を $\mathfrak{A}$ の固定した部分作用素環とする。このときすべての $0 \leqq A \in J_\mu$ (fixed) に対して

$$\mu_A(X) = \mu(AX), \qquad X \in \mathfrak{A}$$

とおくと μ_A は $\mathfrak{A}$ 上の normal な正値有界線型汎函数である。さらに $\mu'_A = \mu_A \mid \mathcal{B}$ とおくと $\mu'_A \ll \mu$ ($\mathcal{B}$ 上で) であるから Radon-Nikodym の定理によつて作用素 $A' \in L^1(\mathcal{B})$ が存在して

$$(4) \qquad \mu'_A(\mathcal{B}) = \mu(A'B) \qquad (B \in \mathcal{B})$$

となる。ここで，$L'(\mathcal{B})$ は $\mathcal{B}$ －可測な作用素 $B \in L^1(\mathfrak{A})$ の全体で $L^1(\mathfrak{A})$ の線型閉部分空間である。（実は μ の定義域を $\mathcal{B}$ 上に制限した $\mu \mid \mathcal{B}$ に関する L^1－空間である。）。A が有界で $\geqq 0$ から A' もそうで式 (4) から $A' \in \mathcal{B}^+ \cap J_\mu$ で $\|A'\| \leqq \|A\|$ が示される。また，すべての $A \in J_\mu$ は

$$A = A_1 - A_2 + iA_3 - iA_4 \qquad (A_k \in J_\mu{}^+)$$

と一意に表わされ，各 A_k に対して $A'_k \in \mathcal{B}^+ \cap J$ が対応するから

$$A' = A'_1 - A'_2 + iA'_3 - iA'_4$$

とおけば

$$(5) \qquad \mu(A'B) = \mu(AB) \qquad (B \in \mathcal{B})$$

となり，さらに

(6) $A_\alpha^* = A_\alpha \in J_\mu$, $A_\alpha \uparrow A \in \mathfrak{A}$ ならば

$B \in \mathfrak{B}$ が存在して $A'_\alpha \uparrow B$

が成立し，$\mathfrak{A}$ と μ の性質（半有限性）により，すべての$A \in \mathfrak{A}$に対して自己共役作用素の有向系 $A_\alpha \in J_\mu$ が存在して $A_\alpha \uparrow A$ となる。このことと，(6)によつて，すべての$A \in \mathfrak{A}$ に対して (5) を満たす $A' \in \mathfrak{B}$ が一意に対応する。この対応 $A \in \mathfrak{A} \to A' \in \mathfrak{A}$ で $A' = A^e$ とおくと，

定理1. $\mathfrak{A}$ を半有限型作用素環，μ を半有限な faithful normal trace, $\mathfrak{B}$ を$\mathfrak{A}$の部分作用素環とし，μ の $\mathfrak{B}$ に関する support がIであるとすると $A \in \mathfrak{A} \to A^e \in \mathfrak{B}$ (onto) なる線型写像が存在して次の条件を満たす：

(1^e) $A^{*e} = A^{e*}$

(2^e) $A^{ee} (= (A^e)^e) = A^e$,

(3^e) $A^e \geqq 0 \ (A \geqq 0)$,

$(3^e)'$ $A^e = 0 \ (A \geqq 0) \Rightarrow A = 0$,

(4^e) $A^{*e} A^e \leqq (A^* A)^e$,

(5^e) $(A_1^e A_2)^e = A_1^e A_2^e = (A_1 A_2^e)^e$,

(6^e) $A_\alpha \uparrow A \Rightarrow A_\alpha^e \uparrow A^e$,

(7^e) $A \to A^e$ は強かつ弱位相で連続 $(\|A\| \leqq 1)$,

(8^e) $\|A^e\| \leqq \|A\|$, $\|A^e\|_p \leqq \|A\|_p \quad (p \geqq 1)$,

(9^e) $\mu(A^e B) = \mu(AB) \quad (A \in \mathfrak{A}, \ B \in \mathfrak{B})$ （何れかの一辺が存在すれば他辺も存在して一致する）。

定理1で部分作用素環$\mathfrak{B}$ に関する制限がないとき I^e は$\mathfrak{B}$ の極大な central projection となり，その$\mathfrak{B}$ の制限条件は“$I^e = I$”，“μ が $\mathfrak{B}$ 上でも半有限”，“有向系 $B_\alpha \in \mathfrak{B}^+ \cap J$ が存在して $B_\alpha \uparrow I$” 等と同等となる。 trace μが有限の場合はこのことを考慮する必要がないことは云うまでもない。多くの場合は，$\mu(I) = 1$ と仮定して議論を進める方が整然として見通しもよくなるが，§6で必要となるので，この一般の形式で行うことにする。定理1の場合，対応$A \to A^e$ は$\mathfrak{A}$ より$\mathfrak{B}$ 上への normal な射影（(2^e)と(6^e)による）であり，さらに $L^p(\mathfrak{A})$ より $L^p(\mathfrak{B})$ 上へのノルム1の射影変換に一意に拡張される。その拡張された対応も同一の記号を用いて表わすことにす

る。定理1は初め Dixmier 〔3〕が formal に証明し，続いて中村－鶴丸〔11〕，梅垣〔23〕，〔24〕が確率論的 Background を念頭に置いて精密化し，また最近は竹之内〔21〕が Hilbert 代数の立場で論じた。定理1は〔23〕で formulate したものである。

<u>定理2.</u> (Characterization). $\mathfrak{A}$，μ を前と同じとし，対応 $A \to A^{\varepsilon}$ を $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (into) な線型変換とし，(1^e)，(5^e)，$I^{\varepsilon} = I$ および $\| A^{\varepsilon} \|_1 \leqq \| A \|_1$，あるいは (1^e)，(5^e) および

$$(9^e)' \qquad \mu(A^{\varepsilon}) = \mu(A), \qquad a \in J_{\mu}$$

を満たすならば $\{ A^{\varepsilon} ; A \in \mathfrak{A} \}$ $(\equiv \mathcal{B})$ は $\mathfrak{A}$ の部分作用素環で $\varepsilon = e$ （即ち，すべての $A \in \mathfrak{A}$ で $A^{\varepsilon} = A^e$）である。

条件 $(9^e)'$ は明らかに (9^e) の拡張された形である。これによって $A \to A^e$ の一意性が分る。（梅垣〔23〕参照）。 定理2はC.T.Moy〔9〕が，確率空間で与えた結果の拡張にもなっている。富山〔22〕はこれをさらに抽象化し，trace μ を使わずに $\mathfrak{A}$ が C^* 環，$\mathcal{B}$ がその C^* 部分環で，共に I を含むとき，$A \to A^{\varepsilon}$ が $\mathfrak{A} \to \mathcal{B}$ (onto) 上へのノルム1の射影であればつねに (1^e)，(3^e)，(5^e) が満たされることを示した。

次の例で分るように $A \to A^e$ なる対応は確率空間における conditional expectation $E(\cdot \mid \mathcal{L})$ の拡張になっているので記号の区別を明瞭にするために（一般には trace μ のとり方にも，依存しているので μ を添付して）

$$A^e = E_{\mu}\,[\,A \mid B\,]$$

とかくことにする。

2）確率空間の場合（$E(\cdot \mid \mathcal{L})$）でも勿論，確率測度に依存しているわけである。

A の Bに関する（によって条件付けられた）<u>conditional expectation</u> とよぶ。

〔例1〕 （確率空間の場合）本§の初めに与えた記号を用いる。$\mathcal{B}(M)$ を $L^{\infty}_{\mathcal{L}}$ の multiplication operator algebra とすると，これは作用素環 $\mathfrak{A}(M)$ の

部分作用素環であり，conditional expectationは，確率空間のとき，作用素環のときと二つの場合でそれぞれ定義される。それ等の間は次の関係で結ばれる：

$$
\begin{array}{ccc}
f \in L^{\infty}(M) & \longleftrightarrow & T_f \in \mathfrak{A}(M) \\
\downarrow & & \\
E(f \mid \mathcal{L}) \in L^{\infty}_{\mathcal{L}} & \longleftrightarrow & T_{E(f \mid \mathcal{L})} \in \mathcal{B}(M)
\end{array}
$$

$$T_{E(f \mid \mathcal{L})} = E_{\mu}[T_f \mid \mathcal{B}(M)] \quad (\text{over } L^2(\mathfrak{A}(M), \mu))。$$

しかし乍ら，定理1における trace μ は準有限で必ずしも有限性（$\mu(I) < +\infty$）を仮定していないので，$(M, \mathfrak{M}, m)$ が必ずしも確率空間でなく，またσ－有限をも仮定しない測度空間（Segal の意味の localizable measure space 〔19〕など）としても conditional expectation の概念が定理1によつて導入される。例えば$\mathfrak{M}$の Borel subfield として

$$M = \bigcup \{ S \in \mathcal{L} \ ; \ m(S) < +\infty \} \quad (\mathrm{mod.}\ m)$$

を満たすようにとれば conditional expectation は一般な測度空間においても定義される。

〔例2〕 (Dixmier の $\natural$)。 Dixmier は作用素環 $\mathfrak{A}$ の有限型の characterization として，$\mathfrak{A}$の center $\mathfrak{A}' \wedge \mathfrak{A}$上に値をとる normal trace $\natural$ の存在性を証明した（〔4〕参照）。この定理は吾々の定理1の結果の中に含まれることが容易に分り，これは center $\mathfrak{A}' \wedge \mathfrak{A}$ に関する conditional expectation そのものであることが明らかとなる：

$$(7) \qquad A^{\natural} = E_{\mu}[A \mid \mathfrak{A}' \wedge \mathfrak{A}], \qquad (A \in \mathfrak{A}).$$

本§では二つの例について述べたのであるが，この外にも有用な例があるのでそれについては§3 と §6で述べることにする。

§3. Martingale

von Neumann が作用素環の三番目の論文で導入した operation $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}_1$ $\mathbb{P}_2$ ・・・ などと Conditional expectation の関連からはじめる。

$\mathfrak{A}$，μ は前§までと同じと仮定する。任意の $P \in \mathfrak{A}^{(P)}$ に対して

$$A \in \mathfrak{A} \rightarrow A^{|P} = PAP + (1-P)\,A\,(1-P) \in \mathfrak{A}$$

は Conditional expectation の一種ではないかということが，以前御園生善尚氏と discuss している際に論じたのであるが，これは正にそうであつて，

$\mathcal{C}_P = \{P\}' \cap \mathfrak{A}$ とおくとこれは $\mathfrak{A}$ の部分作用素環であつて定理1の $\mathcal{B}$ に対する条件を満たし

$$(8) \qquad A^{|P} = E_\mu\,[A \mid \mathcal{C}_P] \qquad (A \in \mathfrak{A})$$

となることが分る。P_1，$P_2 \in \mathfrak{A}^{(P)}$，$P_1 P_2 = P_2 P_1$ のとき，$A^{|P_1 \; |P_2} = (A^{|P_1})^{|P_2}$ とおくと (8) と同じく

$$(9) \qquad A^{|P_1 \; |P_2} = E_\mu\,[A \mid \mathcal{C}_{P_1} \wedge \mathcal{C}_{P_2}] \qquad (A \in \mathfrak{A}),$$

従つて $A^{|P_1 \; |P_2} = A^{|P_2 \; |P_1}$ となり，同様に P_1，P_2，$\cdots \in \mathfrak{A}$，$P_i P_j = P_j P_i$ ならば

$$(10) \qquad A^{|P_1 \; |P_2 \cdots |P_n} = E_\mu\,[A \mid \bigwedge_{i=1}^{n} \mathcal{C}_{P_i}]$$

で

$$(11) \qquad A^{|P_1 \cdots |P_n} = A^{|P'_1 \cdots |P'_n} \quad (\{P'_i\}_{i=1}^{n} \text{ は } \{P_i\}_{i=1}^{n} \text{ の任意の置換})$$

を得る。

以上の関係式を確率論的に考察することによつて次の二つの予想が発生する：

(1°) $A_n = A^{|P_1 \cdots |P_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ とおくと作用素の列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ は確率空間における martingale に対応しないであろうか；

(2°) 三つの等式 (8) ～ (10) の左辺は（従つて右辺も）trace μ のとり方に依存しない。このことは sufficient statistics との関連でそれを作用素論的に formulate 出来ないであろうか。

(2°)のことは次§で論ずることとして本§では (1°) について見ることにする。確率論における martingale の理論（Doob〔5〕参照）は Conditional expectation

の inductive method によつて導入され，種々な極限定理にそれが応用されているが，(半) 有限型作用素環$\mathfrak{A}$ に対しても，その概念が拡張される。

$\{A_\alpha\}_D$ を$\mathfrak{A}$ ， $L^1(\mathfrak{A})$ または $L^2(\mathfrak{A})$ などに含まれる作用素の有向系とし，この$\{A_\alpha\}_D$ が <u>martingale</u> であるとは，すべての index $\alpha \in D$ に対して，定理1の仮定を満たす$\mathfrak{A}$ の部分作用素環 $\mathcal{B}_\alpha$が対応し $\alpha \leq \beta$ のとき，$\mathcal{B}_\alpha < \mathcal{B}_\beta$ であるとし，

$$(12) \qquad A_\alpha = E_\mu [A_\beta \mid \mathcal{B}_\alpha] \qquad (\alpha \leq \beta)$$

が成立するときをいう。Martingale $\{A_\alpha\}_D$ が <u>standard</u> とは，$\mathfrak{A}$ ，$L^1(\mathfrak{A})$ あるいは $L^2(\mathfrak{A})$ の中に作用素 A が存在して

$$(13) \qquad A_\alpha = E_\mu [A \mid \mathcal{B}_\alpha] \qquad (\alpha \in D)$$

が成立するときをいう。有限な martingale はつねに standard である。また$\mathfrak{A}$の部分作用素環の有向系$\{\mathcal{B}_\alpha\}_D$ (set inclusion の ordering) に関する) が与えられているとき，任意の $A \in \mathfrak{A}$ ($L^1(\mathfrak{A})$，$L^2(\mathfrak{A})$) に対して (13) によつて定義される有向系$\{A_\alpha\}$ を考えると，これはつねに martingale で，(かつ standard で) ある。$\{A_\alpha\}$，$\{B_\alpha\}$ が (同一の D で定義され) 共に (standard) martingale ならば，$\{\lambda A_\alpha + \lambda' B_\alpha\}$ (λ, λ' はスカラー)，A_α^*，$A_\alpha^{(1)}$，$A_\alpha^{(2)}$ はすべて (standard) martingale である，ここで $A_\alpha^{(1)}$，$A_\alpha^{(2)}$ は A_α の作用素としての real, imaginary part である。また D' ($\subset D$) が有向部分集合ならば$\{A_\alpha\}_{D'}$ も $\{A_\alpha\}$ と同じ性質をもつている。

確率空間 (M, $\mathfrak{m}$, m) の場合においても一般の有向系 D で Bochoner (1955), Krickebery (1956) が初めて martingale を論じている。作用素環$\mathfrak{A}$の場合では筆者 [24] が上の二者と独立に導入した。確率空間の場合は，作用素環 $\mathfrak{A}$ の場合に含まれる。つまり$\{f_\alpha\}$ を Bochoner−Krickebery の意味で martingale ならば T_{f_α} は本§の意味で (作用素として) martingale であり，逆も成立する。

次に martingale 収束に関する Doob の基本定理 [5] が作用素環$\mathfrak{A}$ において次の形で成立することを述べる。

<u>定理 3.</u> μ が半有限の場合，martingale $\{A_\alpha\} < L^2(\mathfrak{A})$ に対して，次の条件は同等である：

(i) $\{A_\alpha\}$ は L^2−ノルム で一様に有界である；

(ii) $\{A_\alpha\}$ は standard である；

(iii) $\{A_\alpha\}$ は L^2−Cauchy 列である。

これを $L^1(\mathfrak{A})$ で述べるために次の概念を導入する：$\mathfrak{A}$ で可測な作用素の集合 S が一様に μ−可積分であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在して，$\mu(P)<\delta$ $(P\in\mathfrak{A}^{(P)})$ ならば，$\mu(P|A|)<\varepsilon$ がすべての A で成立する。このとき

定理 4.　μ が有限の場合，martingale $\{A_\alpha\}\subset L^1(\mathfrak{A})$ に対して，次の条件は互いに同等である：

(i) $\{A_\alpha^{(1)}\}$, $\{A_\alpha^{(2)}\}$ は共に一様に μ−可積分であり，かつ L^1−ノルムで一様に有界である；

(ii) $\{A_\alpha\}$ は standard である；

(iii) $\{A_\alpha\}$ は L^1−ノルムで Cauchy 列である；

(iv) $\{A_\alpha\}$ は weakly conditionally compact である。

次に，本§の初めに述べた Conditional expectation の列 $\{\mathbb{P}_1\cdots\mathbb{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限に関する von Neumann の結果に対して上で与えた martingale の収束定理を適応する：

定理 5.　$P_1, P_2, \cdots\in\mathfrak{A}^{(P)}$, $P_iP_j=P_jP_i$ $(i, j=1, 2, \cdots)$ なる $\{P_n\}$ を固定し，任意の $A\in\mathfrak{A}$ に対して

$$A_{-n}=A^{\mathbb{P}_1\cdots\mathbb{P}_n}\quad(n=1, 2, \cdots)$$

とおくと，$\{A_{-n}\}$ は Standard martingale（この場合は可算列）であり，$\{A_{-n}\}$ の強極限が存在し，

$$(14)\qquad \lim_{n\to\infty} A_{-n}=E_\mu\left[A\,\Big|\,\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_{P_n}\right]$$

が成立する。この極限作用素を $A^{\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2\cdots}$ とおくと，これは $\{P_1, P_2, \cdots\}$ の順列に無関係に一意に決定される。即ち $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}=\{P'_n\}_{n=1}^{\infty}$ ならば

$$A^{\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2\cdots}=A^{\mathbb{P}'_1\mathbb{P}'_2\cdots}\qquad(\text{for all } A\in\mathfrak{A})$$

でさらに $A\to A^{\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2\cdots}$ は μ の選び方に依存しない。

この定理において

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{P_n} = \{P_1, P_2 \cdots\}' \cap \mathfrak{A}$$

であるから，直ちに次のことが成立する：

Corollary　二つの射影作用素の列 $\{P_n\}$，$\{Q_n\} \subset \mathfrak{A}$ が $\mathfrak{A}$ の同一の可換な部分作用素環 $\mathcal{C}$ を生成するならば

$$A^{|P_1 |P_2 \cdots} = A^{|Q_1 |Q_2 \cdots} \quad (= A^{|\mathcal{C}} \text{ とおく})$$

であり，これは

$$= E_\mu [A \mid \mathcal{C}' \cap \mathfrak{A}]$$

である。

このことを用いると次の結果を得る：

定理6.　$\mathfrak{h}$ は可分な Hilbert 空間であるとし，$\mathcal{B}$ を $\mathfrak{A}$ の可換部分作用素環とするとき，

$$\mathcal{B} \text{ が極大可換} \Longleftrightarrow A^{|\mathcal{B}} = E_\mu [A \mid \mathcal{B}] \quad (\text{for all } A \in \mathfrak{A})。$$

以上が作用素の martingale 収束を von Neumann の operation $|P_1 |P_2 \cdots$ に応用した一連の結果であるが，確率論の定理を非可換拡張した一例として Blackwell の定理〔1〕の拡張を述べておこう。

定理7.　$\mathfrak{A}$ を continuous な有限型作用素環，μ を有限（$\mu(I) = 1$）と仮定する。このとき，任意の有限個の自己共役作用素 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in L^1(\mathfrak{A})$ が $\mu(A_i) = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ ならば continuous な部分作用素環 $\mathcal{B}$ が存在して

$$E_\mu [A_i \mid \mathcal{B}] = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

となる。

参考のために Blackwell の場合を述べておくと，$(M, \mathfrak{M}, m)$ を non-atomic 確率空間，$f_1, \cdots, f_n \in L^1(M)$（実数値）ならば Borel subfield $\mathcal{L}\,(\subset \mathfrak{M})$ が存在して m は $\mathcal{L}$ に関して non-atomic で

$$\int_S f_i(x)\,dm(x) = m(S) \int_M f_i(M)\,dm(x) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

がすべての S $\in \mathcal{L}_{\mathfrak{a}}$ で成立する。定理7で $\mathfrak{A}$ が可換な場合に，Blackwell の場合が帰着することは明白である。

(この他武田二郎氏の導入した作用素の inductive limit が m rtingale と関連をもつことが知られている〔20〕。)

(〔12, 15, 24〕等参照)。

§4. Sufficient な部分作用素環

数理統計の分野で十足統計という概念がある。これは Halmos－Savage 〔8〕によって，Radon－Nikodym の定理を用いて，可測空間上の確率測度の集合の間の議論に formulate された。ここで§2や§3で述べた Dixmier の operationや，von Neumann の operation $|P_1|P_2\cdots$ などから生ずる必然性を念頭に置いて，作用素環 $\mathfrak{A}$ に対し，十足統計の概念を拡張し，そのことによって conditional expectation と state との対応関係を明かなものとし，それに付随して生ずる conditional expectation の一意性についての結論を導く。

(〔25〕参照)。

$\mathfrak{A}$ を有限型作用素環，$\mu(I)=1$ とする。また $\mathcal{B}$ を一つの固定した部分作用素環とする。この $\mathcal{B}$ に対して "$S_{\mathcal{B}}$" を $\mathfrak{A}$ の normal states $\sigma, \rho, \cdots$ などの集合で次の条件を満たすものの全体とする：

$$\sigma(AB)=\sigma(BA)$$

がすべての $A\in\mathfrak{A}$ と $B\in\mathcal{B}$ に対して成り立つ。この $S_{\mathcal{B}}$ を $\mathcal{B}$－tracelet spaceと名付ける。また $\mathfrak{A}$ より $\mathcal{B}$ 上への normal な射影を $\mathcal{B}$－expectation と名付け，それの全体を "$\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$" で表わす。$\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$ の要素はすべて定理1の条件 (1^e)～(7^e) を満たしている。(§2参照)。$S_{\mathcal{B}}$ と $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$ の対応関係は次の定理によって明示される：

定理8. すべての $\sigma\in{}_{\mathcal{B}}S$ に対して $e_\sigma\in\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$ が一意に (mod. σ) で対応して

$$\sigma(A)=\sigma(A^{e_\sigma}) \qquad \text{for all} \quad A\in\mathfrak{A}$$

が成り立ち，逆にすべての $\varepsilon\in\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$ に対して $\sigma\in S_{\mathcal{B}}$ が対応して $\varepsilon=e_\sigma$，となる。(特に $\sigma=\mu\ (\in S_{\mathcal{B}})$ のときが $A^{e_\mu}=E_\mu[A\mid\mathcal{B}]$ である。)

上で与えられた逆の部分の対応 $\varepsilon \in \mathbf{E}_{\mathcal{B}} \to e_\sigma$ の σ は必ずしも一意ではない，そのために十足統計に対応する概念が作用素環において生じてくる。

S を $\mathfrak{A}$ の normal states 全体の集合とし，$S_0 \subset S$ とする。このとき部分作用素環 $\mathcal{B}$ が S_0 に対して sufficient であるとは

$S_0 \subset S_{\mathcal{B}}$ でかつ，すべての対 $\sigma, \rho \in S_0$ に対して $e_\sigma = e_\rho \pmod{\sigma, \rho}$

が成り立つときをいう。このとき Halmos－Savage の定理を抽象化した定理を得る：

定理 9. $\mathcal{B}$ が S_0 に対して sufficient であるための必要十分条件は $S_0 \subset S_{\mathcal{B}}$ でかつ $\pi \in S_{\mathcal{B}}$ が存在して次の三つの条件を満たすこと：

(i) $\pi \simeq S_0$ ($\pi(P) = 0 \Longleftrightarrow \sigma(P) = 0$ for all $\sigma \in S_0$, $P \in \mathfrak{A}^{(P)}$)；

(ii) $\pi(AC_\sigma) = \pi(C_\sigma A)$ for all $A \in \mathfrak{A}$，ここで C_σ は σ の carrier ;

(iii) derivative $d\sigma/d\pi$ は $\mathcal{B}$－可測作用素

これを用いて，次の一連の結果が得られる：

定理 10. $\mathcal{B}$ に関する次の条件は互いに同等である：

(i) $\mathcal{B}$ は $S_{\mathcal{B}}$ に対して sufficient ;

(ii) $\mathcal{B}' \cap \mathfrak{A} \subset \mathcal{B}$;

(iii) $\mathcal{B}$－expectation は unique である。つまり $\mathbf{E}_{\mathcal{B}}$ はただ一つの要素 $E_\mu[\cdot \mid \mathcal{B}]$ からなる。

従って特に，これらの三つの条件の何れかを $\mathcal{B}$ が満たすとき conditional expectation $E_\mu[\cdot \mid \mathcal{B}]$ は trace μ のとり方に依存しない。

次に述べることはこの定理の帰結である。

Corollary

(10.1). $\mathcal{B}$ がある可換な作用素環 $\mathcal{C}$ に対して $\mathcal{B} = \mathcal{C}' \cap \mathfrak{A}$ ならば $\mathcal{B}$－expectation は unique である。

(10.2). $\{P_1, P_2, \cdots\} \subset \mathfrak{A}^{(P)}$，$P_i P_j = P_j P_i$，なる射影作用の系列に対して $\mathcal{B} = \{P_1, P_2, \cdots\}' \cap \mathfrak{A}$ とおくと $\mathcal{B}$－expectation は unique で，それは $\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 \cdots$ である。これは定理5の Corollary と同等の命題である。

(10.3) $\mathcal{B}$ が $\mathfrak{A}$ で極大可換ならば $\mathcal{B}$－expectation は unique で，特に $\mathfrak{H}$ が可分ならば $\mathcal{B}$－expectation は $\mathbb{P}_1 \mathbb{P}_2 \cdots$ ($\{P_n\}$ は $\mathcal{B}$ の生成

元)。これは$\mathcal{H}_y$の可分性に依存している。

(10.4). $\mathcal{T}$ がすべての有限な normal traces τ ($\tau(1)=1$) からなる集合のとき$\mathcal{B}$が$\mathcal{T}$に対して sufficient のための必要十分条件は$\mathfrak{A}' \cap \mathfrak{A} \subset \mathcal{B}$, 即ち$\mathcal{B}$が$\mathfrak{A}$の center を含むこと。従つて Dixmier の $\natural$ は $\mathcal{T}$ で sufficient で μ に依存しないことがわかる。

これらの結果を見てわかるように$\mathcal{B}$ −expectation の一意性を論ずるとき, $\mathcal{B}$自身に可換性があるか，あるいはそれと共軛な関係にある現象が生ずる。このことは states の集団の同時分布に対応する概念を論じているからで，それらの過程における一つの必然性をもつた結果である。そのようなこと（同時分布）が具体的にどのような形で進められるかは残された問題となる。

§ 5. 情報理論との関連

情報理論のことは，作用素環の理論と切り離して，これだけを取り上げて独立に論ずるに価する項目である。また現在の時点では，作用素（環）との関連を追求するだけの十分な準備（基礎付け）がなされていない。しかし，情報理論における符号化の問題などに対して作用素環の理論との接触点があり，他方では作用素の entropy の導入に対する一つの準備段階とも見做されるので敢えて一つの§として内容に加えた。

情報理論とひと口でいうとき，それはサイバネテイクスの分野と多くの共通部分を含み，生物の脳活動，心理作用，美術などの色彩の配合，図形の配列（パターン認識論との関連性）などに至るまでの諸々の分野を含むことになり，それ等に対する数学的手段を導入することが試みられつつあり，たとえば測定の対象物を識別するのに Hilbert 空間（(ℓ^2)空間など）のいくつかの凸閉集合を超平面などによつて separate するような理論で start する方法がとられたりする。しかし現在の所，これらについては，数学（特に函数解析）の立場に立つて今後の統一的な発展をまつ段階であると思われる。

数学的対象として整然とした理論体系が急速になされつつあるのは，通信の伝送機構の厳密な構造の究明と，伝送の能率（符号化）の理論である。数学的に扱うもののうち最も簡単なモデルは情報源（通信の基点となる空間, information source − input）から発する通報（message）が情報路（channel）によつて受信側（情報源と相似な構造をもつ空間− output）に送られる。このような通信機構を数学的 formulation として Shannon がはじめにとらえた（1948年）。これに関する説明を行うことは本§の目的

ではないので省略する。本§では情報理論の基本的な部分にあたる情報源について，それが作用素（環）と関係付けられるための必要な内容のみを簡単に述べることにする。

情報源は文字や記号などの集合 X と X の元の配列の状態を規定する統計的性質つまり確率法則 p が付加されて，対（X，p）によつてそれが表示される。 X が離散的な場合は

$$\mathbf{X} = (X, p) = \begin{pmatrix} x_1, \cdots, x_n \\ p_1, \cdots, p_n \end{pmatrix}$$

という偶然事象系の形で表示することにする。このとき情報源 $\mathbf{X}$ に対して

$$H(\mathbf{X}) = -\Sigma p_i \log p_i \tag{15}$$

なる量を導入する。（この場合，情報理論では便宜上対数の底を2としている）。この量のことを entropy とよび，Shannon によつて導入され，これが情報源のもつ固有の情報量として合理性を備えた量であることが確証され，この量の数学的記述（公理系によつて厳密な構成の下での）や characterization をめぐつて多くの論文が出ている。

いま上と同じように情報源の記号の集合 X が有限集合（これを alphabet という）とすると，情報源からの通報は過去から未来に刻々と過ぎて行く時間の流れに沿い，かつ確率法則に支配されながら打ち出される。時刻nで打ち出される文字を x_nとかくと，両側に無限に続く文字の系列

$$x = (\cdots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots)$$

が考えられる。この系列 x の全体は X の無限直積空間

$$X^I = \prod_{n=-\infty}^{\infty} X_n \ (X_n = X, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

を構成している。この X^I は Tychonoff の積位相に関して compact metric, totally disconnected 空間であることが容易にわかる。通報はある時刻 t から n までの記号の鎖と考えられて $[x_t, \cdots, x_n]$という記号で表わすことが出来る。これは空間 X^I の閉かつ開な（compact）集合であり，そのような通報全体の族が X^I の（可算な）位相基となつている。このようにして X^I の内に位相的手段が導入されていく。（さらに詳細な議論が可能であるが省略する）。

X^I 上の推移変換（Shift）を T とし，これによつて不変な X^I上の確率測度 μ を考えるとき対（X^I, μ）を定常情報源，特に μ がエルゴード的のとき，エルゴード情報源と

いう。（初めに述べた情報源（X，p）と（X^I，μ）の関連の説明は長くなるので省略する。）多くの情報源は完常でエルゴード的であることが知られている。

その場合，$L^\infty(X^I, \mu)$ の $L^2(X^I, \mu)$ 上の multiplication operator algebra $\mathfrak{A}(X^I)$ と推移変換 T によつて成生される $\mathfrak{A}(X^I)$ の外部自己同型群 Gの接合積 $G \otimes \mathfrak{A}(X^I)$ は $\ell^2(G) \otimes L^2(X^I, \mu)$ 上の有限型 factor となる（von Neumann の定理による。中村－武田〔10〕参照）。この factor は I_n型かあるいは II_1 型の何れかであるが，I_n型のための必要十分条件は情報源の通報がつねに periodic となつて出現し，国沢の等長符号化や Peaterson などの群符号の理論と関連し，それ以外の場合は II_1 型となつて（詳しくは超有限型）通報の系列がそれ等の長さについて単調性をもつような符号化（の列）が出現する場合に帰着し，情報理論の数学的構成に対して新たな手法が導入される可能性が生ずる。

上で述べた場合とは別に，単一の作用素（ユニタリ）の理論としては entropy がもう一つの新たな手段として登場してきている。即ち，定常情報源（X^I，μ）において $X_{(n)} = \prod_{k=0}^{n-1} X_k$ とおくと（$X_{(n)}$，μ）（μの定義域は $X_{(n)}$ に制限）は一つの情報源でその entropy $H(X_{(n)})$ に対して極限演算を行い $\lim_{n\to\infty} H(X_{(n)})/n = H_X$ が存在することが示めされる（Mc Millanの定理）。これの証明には martingale 収束（詳しくは submartingale）を用いる。この H_Xを X の一記号当りの平均 entropy という。これは情報理論の構成に基本的役割を演じているのであるが，情報理論とは別に作用素の同値性の解析に対しても主役をなしている。例えば Lebesgue 空間（M，$\mathfrak{M}$，m）上の測度を不変に保つ自己同型 T が与えられている場合，空間の有限可測分割 ξ に対して，初めに与えた情報源（X，p）と同じ構造をもつ空間が対応する，従つて H（X）と同一の方法で entropy $H(\xi)$ が定義される。ここで分割 ξ に対して自己図型 T を作用させて H_X を定義したと同様に entropy $H(T, \xi)$ を導き，$H(T) = \sup_\xi H(T, \xi)$ によつて自己同型 T の entropy を導入する。（Kolmogorov－Sinai 1959）。これを更に可測な flow に対して発展させ flowの解析に適用されている（Rohlin, Sinai, Abramov, Pinsker など）

これらの値は距離的不変量（測度を不変に保つ同型写像に関して）であるが T を $L^2(M, \mu)$ 上のユニタリ作用素として考えたとき，スペクトルの同値変換（ユニタリ変換）に関しては必ずしも不変量でないことが示され，二つの自己同型の間のスペクトル同値から距離的同値が必ずしも云えないことが明らかとなつた（逆の成立は明白であり，自己同型がエルゴード的

であり，L^2空間上のユニタリ作用素として離散スペクトルをもつときの両者の同等性は von Neumann によつて示めされている（1932年））。さらに詳細な理論を展開することが可能である。詳しくは十時 — 丸山，“flow の entropy”，確率論セミナー，1964年，参照。

この他，ここでは全く触れないが情報路の定常容量（stationary capacity）を求めるときに C^*ー環の pure states の集団に対して行うと非常に類似な方法がとられ，それを用いて1956年以来懸案であつたエルゴード容量と定常容量が一致するかどうかという問題も今では完全に解決されている。（一部分として〔7，26，27〕および十時 — 丸山両氏の報告（前出）など参照）。

§ 6. Von Neumann の測定の理論への適用

自由度 N の物理系に対応する可分な Hilbert 空間を $\mathfrak{H}$ とし，物理量 $\mathcal{R}$ に対応する $\mathfrak{H}$ 上の自己共役な作用素を R で表わすことにする。このとき一つの状態 $\varphi \in \mathfrak{H}$ ($\|\varphi\| = 1$) における期待値は $\mathrm{Exp}(\mathcal{R};\varphi) = (R\varphi, \varphi)$ と表わされる。多くの状態の混合した集団 $\mathcal{D}$ に対してはどうであろうか。これに関する von Neumannの理論は作用素環の理論を用いて以下に述べるように formulate される（中村 — 梅垣〔14〕参照）。集団 $\mathcal{D}$ では量 $\mathcal{R}$ の測定値ではなく，その値の確率分布 $w_R(\cdot)$ が $\mathcal{R}$ に依存して定まるのであり，従つて期待値は先づ

$$\mathrm{Exp}(\mathcal{R};\mathcal{D}) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dw_R(\lambda) \quad (= \rho_{\mathcal{D}} \ (\mathcal{R}) \text{ とおく})$$

によつて与えられる。von Neumann は，すべての有界な物理量 $\mathcal{R} \geqq 0$ に対して $\mathrm{Exp}(\mathcal{R};\mathcal{D}) < +\infty$（必ずしも0でない）の場合を扱い，従つて $0 < \rho_{\mathcal{D}}(I) < +\infty$ で，これを正規化して $\rho_{\mathcal{D}}(I) = 1$ として議論している。いま $\mathfrak{A}$ を $\mathfrak{H}$ 上のすべての有界な作用素の作る作用素環とすると，函数 $\rho_{\mathcal{D}}(\cdot)$ は $\mathfrak{A}$ 上の normal state に一意に拡張されることが von Neumann によつて明らかにされている。$\mathfrak{A}$ はそれに個有の normal な faithful traceをもつているのでそれを $\mathrm{Tr}(\cdot)$ で表わすと

$$\frac{d\rho_{\mathcal{D}}}{d\,\mathrm{Tr}} \equiv D \in (T.C.)^+ , \quad \mathrm{Tr}(D) = 1$$

なる Trace classの自己共軛作用素 D が一意に存在する（Radon−Nikodym の

定理，§1参照)。つまり物理量 $\mathcal{R}$ に対して作用素 R が対応したと同様に集団 $\mathcal{D}$ に対しては作用素 D が対応する。(つまり集団 $\mathcal{D}$ 自身も一種の物理量であると見做せる)。対象となる物理量 $\mathcal{R}$ を一つ固定しておく。一般に集団 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{R}$ の測定によつて変換され，もう一つの集団 $\mathcal{D}'$ に移行する。$\mathcal{R}$ に対する R が離散スペクトルの場合を考えるとき，R の個有 vectors を φ_1，φ_2，･･･ とおくと，移行 $\mathcal{D} \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathcal{D}'$ は作用素を表面に出して $D \xrightarrow{R} D'$ と書ける。ここで D' は $\mathcal{D}'$ に対応する作用素で次式によつて表わされる：

(16) $D' = \sum_{n=1}^{\infty} (D\varphi_n, \varphi_n) \ P[\varphi_n]$ ($P[\varphi_n]$ は $\{\lambda\varphi_n\}$ への射影作用素)。

いま R によつて(詳しくは R のスペクトル)生成される作用素環を $\mathcal{B}_R$ とかくと上の式は Condition expectation を用いて

$$D' = E[D \mid \mathcal{B}_R] \quad (E[\cdot \mid \mathcal{B}_R] = E_{Tr}[\cdot \mid \mathcal{B}_R])$$

と表現されることが示めされる。

もう一つの移行は時間の経過にともなう自動的変化である。考える系の total energy を表わす作用素を H (系の energy operator) とすると時刻の推移 t によって

$\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}_t$ ：

$$D \rightarrow D_t = e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} t \cdot H} D \, e^{-\frac{2\pi i}{\hbar} t \cdot H}$$

となる(ここで H は t に依存せずと仮定しておく)。このようにして生ずる二通りの変化のうち，$D \rightarrow D'$ においては初期の混合 $\mathcal{D}$ の変りに t 時間後の混合 $\mathcal{D}_t$ をとつても本質的な変りはないとして理論が構成されている。つまり $(D_t)' = D'$ であること，従つて $(D_t)'$ を知れば D' が知られるということである。このことは数学的にはさらに厳密な検討を要するように思われる。Urbanikはこのことに着目して，macrostate という states の一つの等値類を導入し，そこで entropy を定義して情報理論的な考察を行つている。それに対して情報理論における Dobrusin 流の理論が展開される可能性が含まれているようである。

移行 $D \rightarrow D' = E[D \mid \mathcal{B}_R]$ について考えて見ると，R が離散スペクトルの場合であつたので R によつて生成された $\mathcal{B}_R$ は $\mathfrak{A}$ の極大可換な作用素環である。このため

に R と H が交換可能ならば $e^{\frac{2\pi i}{\hbar} tH}$ が $\mathcal{B}_R$ に属し，Conditional expectation の性質（§2参照）によつてさきに述べたことが妥当性をもつわけである。（初期の混合の集団が t 時間の推移後に測定による変化は初期の場合の移行と同じく D' であることを意味している。）

Rが離散スペクトルをもたないときは，von Neumannは近似的な計算を行つて移行 $D \to D'$ を論じているがいくつかの曖昧さを残して明確な答は得られていない。この場合も Conditional expectation を用いるといかなる R に対しても，それの測定によつて $D \to D' = E[D \mid \mathcal{B}_R]$ なる移行が得られ集団 $\mathcal{D}'$ が数学的に明確に表示される。（この場合，${}_R$ は極大可換ではなくなる）。

以上は，$\mathcal{B} = \mathcal{B}_R$ という可換な部分作用素環に関する Conditional expectation $E[\cdot \mid \mathcal{B}]$ の物理的モデルであるが，$\mathcal{B}$ が非可換な場合は如何なるものがあるかということも論ずる必要がある。

二つの物理系Ⅰ，Ⅱに対応する Hilbert 空間を $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$，$\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}$ としⅠ，Ⅱの合成系Ⅲ（＝Ⅰ＋Ⅱ）に対応する Hilbert 空間を $\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}$ とすると $\mathfrak{H}_{\mathrm{III}} = \mathfrak{H}_{\mathrm{I}} \otimes \mathfrak{H}_{\mathrm{II}}$ (tensor product)。D_{I}，D_{II} をそれぞれⅠ，Ⅱにおける混合集団の作用素とすると，これらによつてⅢの混合の集団の作用素 D_{III} が $D_{\mathrm{I}} \otimes D_{\mathrm{II}}$ によつて与えられる。これ等の間は，Conditional expectation を用いて

$$D_{\mathrm{I}} = E[D_{\mathrm{III}} \mid \mathfrak{A}_{\mathrm{I}} \otimes \{\lambda I_{\mathrm{II}}\}],$$

$$D_{\mathrm{II}} = E[D_{\mathrm{III}} \mid \{\lambda I_{\mathrm{I}}\} \otimes \mathfrak{A}_{\mathrm{II}}]$$

という関係によつて結ばれる。ここで $\mathfrak{A}_{\mathrm{I}}$ は $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}$ 上の全有界作用素の環，$\mathfrak{A}_{\mathrm{II}}$ も同様。また $E[\cdot \mid \cdot]$ は $\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}$ の全作用素の環の Tr による Conditional expectation である。

混合の集団 $\mathcal{D}$ の作用素 D をスペクトル分解して

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P[\psi_n] \quad (\lambda_n \geqq 0, \quad \Sigma \lambda_n = 1)$$

とする。D は trace class，従つて完全連続作用素であるからこれは可能である。このとき $\mathcal{D}$ の entropy は

$$H(D) = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \log \lambda_n$$

によって与えられる。これは作用素 D を用いて $-\mathrm{Tr}(D \log D)$ と表わすことも出来る。明らかに $H(D) \geqq 0$ で，$H(D)=0$ は"ある n_0 で $\lambda_{n_0}=1$，$\lambda_n=0$ $(n \neq n_0)$，"あるいは"ある n_0 で $D=P_{[\psi]}$ $(\psi=\psi_n)$" などと同等である。(entropy $H(D)$ は情報理論の情報源が可算個の事象からなるときと完全に同一の形式(15)である(対数の底は問題としない)。以後に現われる対応関係も非常な類似性をもつている。)このとき Conditional expectation を用いると次のことが直ちに示めされる。

定理11. $\mathcal{R}$ の測定によって混合の集団 $\mathcal{D}$ の entropy は増大する：移行 $D \to D' = E[D \mid \mathcal{B}_R]$ $(\mathcal{D} \to \mathcal{D}')$ によって

$$H(D) \leqq H(D')$$

であり，等号の成立は $RD = DR$ と同値で，従つて $RD \neq DR$ のときかつ，そのときに限り，$H(D) < H(D')$ である。これの後半の命題は，R が離散スペクトルであるから $\mathcal{B}_R$ が極大可換となり，そのことに帰因している。差

$$I(D, D') = H(D') - H(D) \quad (\geqq 0)$$

は Kullback-Leibler の平均情報量に対応し〔26〕，また $\mathcal{D}$ を input，$\mathcal{D}'$を output とし R を情報路と考えるとき一種の伝送速度として解釈することが可能である。物理的な意味付けは別として $\mathcal{R}$ の capacity を情報理論の場合のように導入出来る。さらに作用素のスペクトル解析とそれの Condition expectation を適用して次の二つの結果が示めされる。

定理12. 二つの $\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$ に対応する作用素を D_1，D_2 とするとこれの α，βの重みでの混合は entropy を増大さす：

$$H(\alpha D_1 + \beta D_2) \geqq \alpha H(D_1) + \beta H(D_2) \quad (\alpha + \beta = 1,\ \alpha, \beta \geqq 0)$$

定理13. $\mathcal{D}_1$，$\mathcal{D}_2$ が相異なる系の集団である場合(さきの $\mathcal{D}_{\mathrm{I}}$，$\mathcal{D}_{\mathrm{II}}$ を考えればよい)，その合成系 $\mathcal{D}_1 \otimes \mathcal{D}_2$ (その作用素 $D_1 \otimes D_2$)とすると，

$$H(D_1 \otimes D_2) = H(D_1) + H(D_2)$$

これ等は全て von Neumannによつて与えられた定式であるが，波の理論とは別の立場で其後発展した情報理論の種々な情報源の entropyに対しても，これと同一の形式の対応概念が別個に導入されている。従つて情報理論で頻りに行われているような entropy の characterization が上の場合に対しても適応されるかどうかという問題が必然的に発生するわけで，このことは数学の立場からは興味あることである。 C. Davis 〔2〕などもこのことを取り上げている。

作用素環の分野としての興味は一般の $\mathfrak{A}$ でどの程度迄上の議論が可能かということである。それによつて作用素 D が trace class からはみ出した場合にも適用可能となる。$\mathfrak{A}$ を半有限型作用素環とし，μ をその半有限 faithful normal trace とする。$D \in \mathfrak{A}^+ \wedge J$ をスペクトル表示して $D = \int \lambda\, dE_\lambda$ とする。このとき

$$h(D) = -D \log D \left(= -\int \lambda \log \lambda\, dE_\lambda\right),$$

$$H(D) = \mu(h(D))$$

とおくと，$h(D)$ は operator－concave の条件

$$h(\alpha D_1 + \beta D_2) \geqq \alpha h(D_1) + \beta h(D_2)$$

を満たし，さらに，

$$h(D) \leqq h(E[D \mid \mathcal{B}]),\quad h(D_1 \otimes D_2) = h(D_1) + h(D_2),$$

つまり $h(\lambda) = -\lambda \log \lambda \ (\lambda \geqq 0)$ という函数は，先に与えた実数値函数 $H(D)$ の持つていた性質を，このような一般な場合でしかも operator－valued のときでさえもつていることが示される（中村 － 梅垣〔13〕）。 これ等のことを用い情報理論的な考察を $\mathfrak{A}$ に対して行なうことも可能となり，先に述べた Kullback－Leibler の情報量や十足統計， sufficient 部分環などの関連も論ずることが可能となつてくる（梅垣〔26〕）。

References

[1] D. Blackwell; The range of certain vector integrals, Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951), 390–395.

[2] C. Davis; Operator-valued entropy of a quantum mechanical measurement, Proc. Japan Acad. 37 (1961) 533–538.

[3] J. Dixmier; Formes linéaires sur un anneau d'operateurs, Bull. de la Soc. Math. de France (1953), 6–39.

[4] J. Dixmier; Les algèbres d'operateurs dans l'espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris (1957).

[5] J.L. Doob; Stochastic processes, New York (1954).

[6] H. A. Dye; The Radon-Nikodym theorem for finite ring of operators, Trans. Amer. Math. Soc., 72 (1952), 243–280.

[7] M. Echigo and M. Nakamura, A remark of the concept of channels, Proc. Japan Acad. 38 (1962), 307–309.

[8] P. R. Halmos and L. J. Savage; Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics, Ann. Math. Statist. 20 (1949), 225–241.

[9] S-T. C. Moy; Characterizations of conditional expectation as a transformation on function spaces, Pacific J. Math. 4 (1954), 47–65.

[10] M. Nakamura and Z. Takeda; On Some elementary properties of the crossed product of von Neumann algebras, Proc. Japan Acad. 34 (1958), 489–494.

[11] M. Nakamura and T. Turumaru; Expectations in an operator algebra, Tōhoku Math. J. 6 (1954), 182–188.

[12] M. Nakamura and H. Umegaki; On a proposition of von Neumann, Kōdai Math. Sem. Rep. 8 (1956), 142–144.

[13] M. Nakamura and H. Umegaki; A note on the entropy for operator algebras, Proc. Japan Acad. 37 (1961), 312–315.

[14] M. Nakamura and H. Umegaki; On von Neumann's theory of measurements in quantum statistics, Math. Japonicae 7 (1962), 151–157.

[15] M. Nakamura and H. Umegaki; On the Blackwell theorem in Operator Algebras, Proc. Japan Acad. 37 (1961), 312–315.

[16] M. Nakamura, M. Takesaki and H. Umegaki; A remark on the expectations of operator algebras, Kōdai Math. Sem. Rep. 12 (1960), 82–90.

[17] T. Ogasawara and K. Yoshinaga; A non-commutative theory of integration for operators, J. Sci. Hiroshima Univ. A, 18 (1955), 311–347.

[18] I. E. Segal; A non-commutative extension of abstract integration, Ann. Math. 57 (1953), 401–457.

[19] I. E. Segal; Equivalence of measure spaces, Amer. J. Math. 73 (1951), 275–313.

[20] Z. Takeda; Inductive limit and infinite direct product of operator algebras, Tōhoku Math. J., 7 (1955), 67–86.

[21] O. Takenouchi; Sur les sous-algèbres d'une algèbre de Hibert, Ann. Sci. École Norm. Sup. 78 (1961), 211–240.

[22] J. Tomiyama; On the projection of norm one in W^*-algebra, Proc. Jop. Acad. 33 (1957), 608–612.

[23] H. Umegaki; Conditional expectation in an operator algebra, Tōhoku Math. J. 6 (1954), 177–181.

[24] H. Umegaki; Conditional expectation in an operator algebra, II, Tōhoku Math. J. 8 (1956), 86–100.

[25] H. Umegaki; Conditional expectation in an operator algebra, III, Kōdai Math. Sem. Rep. 11 (1959), 51–64.

[26] H. Umegaki; Conditional expectation in an operator algebra, IV, (Entropy and information), Kōdai Math. Sem. Rep. 14 (1962), 59–85.

[27] H. Umegaki; A functional method for stationary channel, Kōdai Math. Sem. Rep. 16 (1964), 27–39.

[28] H. Umegaki; General treatment of alphabet–message space and integral representation of entropy, Kōdai Math. Sem. Rep. 16 (1964), 18–26.