数理解析研究所講究録
第6巻 1965年 2-11

Faddeevの方法について

京都大学数理解析研究所
静　田　　靖
望　月　　清

§1　Introduction

よく知られているように散乱の量子論では二体問題は既に完全に解かれていて，厳密な数学的的理論が存在しているが，多体問題の方は数学的に本質的な困難があつて，それを乗り越える方法が全く見出されないという状態が永い間続いていた。しかし1963年に到つてFaddeevが三体問題の厳密な数学的取扱いに成功し，このような多体問題の暗黒時代にも，漸く終止符がうたれることになつた。Faddeev の論文はSteklov 研究所の紀要に発表されたが，120頁におよぶぼう大なものである。ここでは彼の方法と主な結果とを簡単に紹介することにしよう。

三体問題を解くためには先ずHamiltonianのresolvent を得なければならない。そこで二体問題のときと同じようにresolvent equation (あるいは Lippmann-Schwinger equation と言つてもよい）を書いてみると今度は完全連続でない積分核が現われてFredholm の積分方程式の理論が使えないと言う事情が起る。Faddeev は三体問題に附随した二体問題がすべて解けていることを利用して新しい未知量を導入して上の方程式を連立方程式の形に書き直すと同時に，この新しい方程式系に現われる積分核はすべて完全連続であつてFredholm の理論が適用されることを示したのである。(今後これをFaddeev equationと呼ぼう。)我々は§2で問題を数学的な形で設定したのち，§3でFaddeev equation が導き出される過程を見ることにしよう。(積分核の完全連続

性の証明は原論文にゆずる。）このようにして得られたresolvent を用いてFaddeevはwave operator や scattering operatorを構成することに成功した。これらの事情は長くまた煩雑な計算の後にはじめて証明されるのであるが，そこでは昔Friedrichsが摂動論に関する論文の中で示した方法が極めて有効に利用されていることを注意しておく必要があると思われる。三体の散乱理論の最終的な結果を§4で定理として述べることにする。

§2 問題の設定

二体問題および三体問題のHamiltonian を configuration space で書くと

$$H_2\psi(x_1, x_2) = \{-\frac{1}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{1}{2m_2}\nabla_2^2 - v_{12}(x_1-x_2)\}\psi(x_1, x_2);$$

$$H_3\psi(x_1, x_2, x_3) = \{-\frac{1}{2m_1}\nabla_1^2 - \frac{1}{2m_2}\nabla_2^2 - \frac{1}{2m_3}\nabla_3^2 + \hat{v}_{23}(x_2-x_3)$$

$$+\hat{v}_{31}(x_3-x_1)+\hat{v}_{12}(x_1-x_2)\}\psi(x_1, x_2, x_3)$$

である。$\hat{v}_{12}, \hat{v}_{23}, \hat{v}_{31}$ はそれぞれ粒子1－2，2－3，3－1間の相互作用を記述するpotential で，外力の場はないと仮定している。Hamiltonian H_2, H_3 はそれぞれHibert 空間$L^2(E_6)$，$L^2(E_9)$の作用素と考えるのであるが，直接このままの形で扱うより，むしろFourier変換して問題を考えた方がよい。すなわちmomentum spaceでHamiltonian が与えられていると考えるのである。Fourier 変換された作用素をやはりH_2, H_3 と書くことにすれば

$$H_2 f(k_1, k_2) = \{\frac{1}{2m_1}k_1^2 + \frac{1}{2m_2}k_2^2\}f(k_1, k_2) + V_{12}f(k_1, k_2);$$

$$H_3 f(k_1, k_2, k_3) = \{\frac{1}{2m_1}k_1^2 + \frac{1}{2m_2}k_2^2 + \frac{1}{2m_3}k_3^2\}f(k_1, k_2, k_3)$$

$$+(V_{23}+V_{32}+V_{12})f(k_1, k_2, k_3).$$

例えばV_{12} は

$$V_{12}f(k_1, k_2) = \int v_{12}(\frac{k_1-k_2-k_1'+k_2'}{2})\delta(k_1+k_2-k_1'-k_2')f(k_1', k_2')$$
$$\times dk_1'dk_2'.$$

ここで先ず重心の運動に関係した部分を分離して問題を少し簡単にする。二体問題の場合は

$$K=k_1+k_2 \qquad k=\frac{m_2k_1-m_1k_2}{m_1+m_2}$$

を新らしい変数に用いると，

$$H_2f(K,k)=\frac{1}{2M}K^2f(K,k)+hf(K,k)$$

となつて $\boldsymbol{h}$ は $L^2(E_3)$ の作用素

$$\boldsymbol{h}f(k)=\frac{1}{2m}k^2f(k)+\int v(k-k')f(k')dk'$$
$$=(\boldsymbol{h}_0+v)f(k)$$

である。ただし

$$M=m_1+m_2\,; \quad m=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$$

二体問題のHamiltonian H_2 を調べることが，h を調べることに帰着されたわけである。同様のことを三体問題に対しても行う。

新しく導入される変数は

$$K=k_1+k_2+k_3\,;$$

$$k_{23}=\frac{m_3k_2-m_2k_3}{m_2+m_3}\,; \quad p_1=\frac{m_1(k_2+k_3)-(m_2+m_3)k_1}{m_1+m_2+m_3}\,;$$

$$k_{31}=\frac{m_1k_3-m_3k_1}{m_3+m_1}\,; \quad p_2=\frac{m_2(k_3+k_1)-(m_3+m_1)k_2}{m_1+m_2+m_3}\,;$$

$$k_{12}=\frac{m_2k_1-m_1k_2}{m_1+m_2}\,; \quad p_3=\frac{m_3(k_1+k_2)-(m_1+m_2)k_3}{m_1+m_2+m_3}\,.$$

一時独立な変数として，K の他に k_{23} と p_1，k_{32} と p_2 あるいは k_{12} と p_3 のいずれの組合わせを選んでもよい。そのとき

$$H_3f(K,k,p)=\frac{1}{2M}K^2f(K,k,p)+Hf(K,k,p)$$

となる。ここで H は $L^2(E_6)$ の作用素であつて，

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{V}_{23}+\boldsymbol{V}_{31}+\boldsymbol{V}_{12}.$$

この作用素$\boldsymbol{H}$を解析することが我々の問題である。$\boldsymbol{H}_0$は函数$\boldsymbol{H}_0(k,p)$ を乗ずる乗法作用素であつて

$$\boldsymbol{H}_0(k,p)=\frac{1}{2m_{23}}k_{23}^2+\frac{1}{2n_1}p_1^2=\frac{1}{2m_{31}}k_{31}^2+\frac{1}{2n_2}p_2^2$$

$$=\frac{1}{2m_{12}}k_{12}^2+\frac{1}{2n_3}p_3^2$$

ただし

$$m_{23}=\frac{m_2m_3}{m_2+m_3}\ ;\quad n_1=\frac{m_1(m_2+m_3)}{m_1+m_2+m_3}\ ;$$

$$m_{31}=\frac{m_3m_1}{m_3+m_1}\ ;\quad n_2=\frac{m_2(m_3+m_1)}{m_1+m_2+m_3}\ ;$$

$$m_{12}=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\ ;\quad n_3=\frac{m_3(m_1+m_2)}{m_1+m_2+m_3}.$$

$\boldsymbol{V}_{23}$は積分作用素であつて，その積分核は

$$\mathcal{V}_{23}(k,p;k',p')=v_{23}(k_{23}-k'_{23})\,\delta(p_1-p'_1)$$

すなわち

$$\boldsymbol{V}_{23}f(k,p)=\int v_{23}(k_{23}-k'_{23})f(k'_{23},p)dk'_{23}$$

V_{31}, V_{12}も同様である。積分核$\mathcal{V}_{23}$，$\mathcal{V}_{31}$，$\mathcal{V}_{12}$などがいずれもδ函数を含んでいることに注目すれば，三体問題の困難さが理解されるであろう。

Faddeevが$v(k)$，$v_{23}(k)$，$v_{31}(k)$，$v_{12}(k)$ などのpotentialに対して課した条件は次のようなものである。

$(A_{\theta_0})\quad |v(k)|\leq C(1+|k|)^{-1-\theta_0}\qquad(\theta_0>0)$

$(B_{\mu_0})\quad |v(k)-v(k+h)|\leq C(1+|k|)^{-1-\theta_0}|h|^{\mu_0},$

$(|h|\leq,\ \mu_0>1).$

また自明な条件

$(R)\qquad v(-k)=\overline{v(k)}$

は当然満されているものとする。条件(A_{θ_0})の下で$(\theta_0>\frac{1}{2})$。作用素hおよびHは二乗可積分な函数の全体がつくるHilbert 空間の自己共役作用素であることが示される。hの

定義域は

$$\int (1+k^2)^2 |f(k)|^2 dk < +\infty$$

をみたす$f(k)$の全体，またHの定義域は

$$\int (1+k^2+p^2)^2 |f(k,p)|^2 dkd_p < +\infty$$

をみたす$f(k,p)$の全体である。

§1で述べたように二体問題は既に完全に解かれている。すなわちhのresolventの性質を調べてそれからwave operator およびscattering operatorを構成することが出来る。(いわゆるstationary method)。またそれらがtime-dependent theory で定義されたwave operator や scattering operator と一致することを証明することも出来る。我々の問題は三体問題に対して同様なことを行うことである。

さてFaddeev が最初に行つたことは，Hのresolventを作つて，その評価を得ることであつた。実際これは困難な仕事であつてこれまでは誰も手を着けなかつたのである。ここで彼が用いたtrickは見事なものであると云うことが出来る。このようなtrickが何故有効なのかと云う点については荒木氏が物理的背景を説明されているので参照して頂きたい。

§3 Faddeev equationとresolvent の評価

このsection ではHのresolvent $R(z)=(H-zE)^{-1}$が構成される手順を見ることにしよう。

先ず始めに二体問題の場合にhのresolvent を作る方法を振り返つてみることにする。$r_0=(h_0-ze)^{-1}$, $r(z)=(h-ze)^{-1}$に対して

$$(3.1)\quad r(z)=r_0(z)-r_0(z)\,v\,r(z)=r_0(z)-r(z)\,v\,r_0(z)$$

なるresolvent equation が成り立つ。$r_0(z)$はよく知られているからこれから$r(z)$を求めればよい。$t(z)$を

$$(3.2)\quad t(z)=v-vr(z)v$$

と定義しよう。すると(3.1)より$t(z)$は

$$(3.3)\quad t(z)=v-v\,r_0(z)\,t(z)=v-t(z)\,r_0(z)\,v$$

をみたす。この方程式を解いて$t(z)$を求めることが出来ればresolvent $r(z)$を

(3.4) $\boldsymbol{r}(z)=\boldsymbol{r}_0(z)-\boldsymbol{r}_0(z)\boldsymbol{t}(z)\boldsymbol{r}_0(z)$

として得ることが出来る。実際(3.3)式を積分方程式の形に書いてみると積分核はあるBanach空間で完全連続な積分作用素を定義していることが分かる。1を固有値に持つようなzの値は$\boldsymbol{h}$の固有値に一致することが示されるのでこの積分方程式はFredholm–Riesz–Schauderの理論を用いて解ける。すなわち$\boldsymbol{t}(z)$は積分作用素であって，その積分核$\boldsymbol{t}(k,k';z)$は次の評価を持つ。

(3.5) $|t(k,k';z)|\leqslant \mathrm{const}(1+|k-k'|)^{-1-\theta},\ \theta<\theta_0;$

(3.6) $|t(k,k';z)-t(k+\triangle k,k'+\triangle k';z+\triangle z)|$

$$\leqslant \mathrm{const}(1+|k-k'|)^{-1-\theta}(|\triangle k|^{\gamma}+|\triangle k'|^{\gamma}+|\triangle z|^{\gamma}),\ \gamma<\gamma_0$$

ここにconstはzを$\boldsymbol{h}$の固有値の最短距離にのみ関係する定数である。

このように二体問題が容易に解けるのは$\boldsymbol{v}\,\boldsymbol{r}_0(z)$が完全連続であることが大きな理由になっている。云いかえればpotentialによる摂動はresolventに対する完全連続な摂動であったのである。三体問題の時は$\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}_0(z)=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{H}_0-z\boldsymbol{E})^{-1}$は完全連続な作用素ではない。

Faddeevが三体問題のresolvent $\boldsymbol{R}(z)$を構成した手順は次のようなものである。

(3.7) $\boldsymbol{T}(z)=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{V}\boldsymbol{R}_0(z)\boldsymbol{T}(z)$

を直接解くことに出来ないので，新しい作用素$M_{\alpha\beta}$を未知量として導入する。

(3.8) $\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)=\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{V}_\alpha-\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}(z)\boldsymbol{V}_\beta,\ \alpha,\beta=23,31,12$

すると容易に分かるように$\boldsymbol{T}(z)$は

(3.9) $\boldsymbol{T}(z)=\sum_{\alpha,\beta}\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)$

となる。ここで$\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)$がみたすべき方程式を考えよう。(3.7)から直ちに

(3.10) $\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)=\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{v}_\alpha-\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}_0(z)\sum_{\gamma}\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z).$

これを書き変えれば

(3.11) $[\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}_0(z)]\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)=\delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{V}_\alpha-\boldsymbol{V}_\alpha\boldsymbol{R}_0(z)\sum_{\gamma\neq\alpha}\boldsymbol{M}_{\alpha\beta}(z)$

を得る。さて$\boldsymbol{T}_\alpha(z)$を

(3.12) $T_\alpha(z)=V_\alpha-V_\alpha R_0(z)T_\alpha(z)=V_\alpha-T_\alpha(z)R_0(z)V_\alpha,$
$\alpha=23,31,12\ .$

をみたす作用素としよう。実際二体問題は既に解けているのだから，$T_\alpha(z)$ を求めることが出来て

(3.13) $T_\alpha(z)f(k,p)=\int t_\alpha(k_\alpha,k'_\alpha:z-\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha})f(k'_\alpha,p_\alpha)dk'_\alpha.$

積分核 $t_\alpha(k_\alpha,k'_\alpha;z-\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha})$ は(3.5)，(3.6)のような評価を持っている。この作用素 $T_\alpha(z)$ ($\alpha=23,31,12$) を用いると(3.11)は次のように書くことが出来る。

(3.14) $M_{\alpha\beta}(z)=\delta_{\alpha\beta}T_\alpha(z)-T_\alpha(z)R_0(z)\sum_{\gamma=\alpha}M_{\alpha\beta}(z).$

この方程式を連立積分方程式と見なしたときにFaddeev equationと呼ぶことにしよう。Faddeev equation(3.14)に現われる積分核はすべてあるBanach空間の完全連続作用素になることが示される。従ってFredholm–Riesz–Schauder が適用されて(実はこの云い方は少々荒っぽいのであるが)，$M_{\alpha\beta}(z)$ ($\alpha,\beta=23,31,12$) が得られる。上の変形を逆にたどると $T(z)$ は(3.9)から定まり，resolvent $R(z)$ は

(3.15) $R(z)=R_0(z)-R_0(z)T(z)R_0(z)$

として求められる。実際Faddeev equation を解くにはもう少し変形しておいた方がよい。

(3.16) $W_{\alpha\beta}(z)=M_{\alpha\beta}(z)-\delta_{\alpha\beta}T_\alpha(z)$

とおくと，(3.14)は

(3.17) $W_{\alpha\beta}(z)=W^{(0)}_{\alpha\beta}(z)-T_\alpha(z)R_0(z)\sum_{\gamma\neq\alpha}W_{\gamma\beta}(z)\ .$

ここに

(3.18) $W^{(0)}_{\alpha\alpha}(z)=0\ ,W^{(0)}_{\alpha\beta}(z)=-T_\alpha(z)R_0(z)T_\beta(z)$

である。実はこれでもまだfree term の性質がよくないので何回かiteration をほどこしてもっと性質のよいものに(Banach空間に入るように)変えてやる必要がある。やり方は明らかであろう。結局積分作用素 $W_{\alpha\beta}(z)$ の積分核 $W_{\alpha\beta}(k,p;k',p':z)$ は次の評価を持つことが示される。

(3.19) $|W_{\alpha\beta}(k,p;k',p':z)|\leq \mathrm{const}\,\mathcal{N}(k,p:\theta)(1+p'^2_\beta)^{-1}\quad ,$

$$(3.20)\quad \mathcal{N}(k,p:\theta)=\sum_{\alpha\neq\beta}(1+|p_\alpha|)^{-1-\theta}(1+|p_\beta|)^{-1-\theta},\quad \theta<\theta_0 .$$

ここにconstはやはりzが実軸上の固有値でない点に近ずいても変化しない。証明は本質的には二体問題のときと同様な方法によつている。resolvent $R(z)$を$W_{\alpha\beta}(z)$を用いて書きあらわすと，

$$(3.21)\quad R(z)=R_0(z)+\sum_\alpha(R_\alpha(z)-R_0(z))-R_0(z)\sum_{\alpha,\beta}W_{\alpha\beta}(z)R_0(z)$$

となる。ここに$R_\alpha(z)$は

$$(3.22)\quad R_\alpha(z)=R_0(z)-R_0(z)T_\alpha(z)R_0(z)$$

である。

Hの固有値に対しては次のことが分つている。簡単のために各々のpotentialに対応する二体問題はそれぞれ1個ずつ負の固有値$-k_\alpha^2$（$\alpha=23,31,12$）を持つているとしよう。(次のsection はこの仮定の下に述べる。)そのときHの固有値は有界で高々$-k_\alpha^2$を集積点とする可算個の点よりなる。

§4 wave operator と scattering operator

resolvent の評価が得られたからあとはいわゆるstationary method に訴えてwave operator およびscattering operatorを構成することが出来る。

$\mathcal{H}_0$，$\mathcal{H}_\alpha$（$\alpha=23,31,12$）をそれぞれ二変数k,pおよび一変数p_αに関する二乗可積分な函数の作るHilbert 空間としよう。それぞれのHilbert 空間に属する函数を区別するために，$f_0(k,p)\in\mathcal{H}_0$，$f_\alpha(p_\alpha)\in\mathcal{H}_\alpha$（$\alpha=23,31,12$）のように書くことにする。また内積を$(\ ,\ )_0$，$(\ ,\ )_\alpha$と書く。

$\hat{\mathcal{H}}$を次の如く定義する。

$$(4.1)\quad \hat{\mathcal{H}}=\mathcal{H}_0\oplus\mathcal{H}_{23}\oplus\mathcal{H}_{31}\oplus\mathcal{H}_{12}\ .$$

次に$\mathcal{H}_0$，$\mathcal{H}_\alpha$の作用素$\widetilde{H}_0$および$\widetilde{H}_0$を考える。これらはいずれも乗法作用素であつて，

$$(4.2)\quad \widetilde{H}_0 f_0(k,p)=\left(\frac{k^2}{2m}+\frac{p^2}{2m}\right)f_0(k,p),$$

$$(4.3)\quad \widetilde{H}_\alpha f_\alpha(p_\alpha)=\left(-k_\alpha^2+\frac{p_\alpha^2}{2n_\alpha}\right)f_\alpha(p_\alpha),\quad(\alpha=23,31,12)$$

で定義される。ここでk_α は§3の最後に述べた通りである。

$\widehat{\boldsymbol{H}}$を

$$(4.4)\quad \widehat{\boldsymbol{H}}=\widetilde{\boldsymbol{H}}_0\oplus\widetilde{\boldsymbol{H}}_{23}\oplus\widetilde{\boldsymbol{H}}_{31}\oplus\widetilde{\boldsymbol{H}}_{12}\ .$$

と定義しよう。この$\widehat{\boldsymbol{H}}$が$\boldsymbol{H}$と比較すべき作用素である。

$\boldsymbol{H}$のspectrum を離散部分と連続部分に分けるとそれに対応してHilbert 空間$\mathcal{H}$は$\mathcal{H}=\mathcal{H}_c\oplus\mathcal{H}_d$ と分解される。$\boldsymbol{H}$もまた$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_c\oplus\boldsymbol{H}_d$ と分解される。このとき$\mathcal{H}_0$から$\mathcal{H}$の中への作用素$\boldsymbol{U}_0^{(\pm)}$と$\mathcal{H}_\alpha$ から$\mathcal{H}$の中への作用素$\boldsymbol{U}_\alpha^{(\pm)}$ ($\alpha=23,31,12$) が存在して次の性質をみたす。

1° 任意の$f\in\mathcal{H}$は次のように一意的にあらわすことが出来る。

$$(4.5)\quad f=f_d+\boldsymbol{U}_0^{(\pm)}f_0^{(\pm)}+\boldsymbol{U}_{23}^{(\pm)}f_{23}^{(\pm)}+\boldsymbol{U}_{31}^{(\pm)}f_{31}^{(\pm)}+\boldsymbol{U}_{12}^{(\pm)}f_{12}^{(\pm)}\ .$$

ここに

$$f_d\in\mathcal{H}_d,\quad f_0^{(\pm)}\in\mathcal{H}_0,\quad f_\alpha^{(\pm)}\in\mathcal{H}_\alpha .$$

2° 実軸上で定義された勝手な有界可測函数$\varphi(x)$に対して

$$(4.6)\quad \varphi(\boldsymbol{H})f=\varphi(p_d\boldsymbol{H})f_d+\boldsymbol{U}_0^{(\pm)}\varphi(\widetilde{\boldsymbol{H}}_0)f_0^{(\pm)}+\sum_\alpha \boldsymbol{U}_\alpha^{(\pm)}\varphi(\widetilde{\boldsymbol{H}}_\alpha)f_\alpha^{(\pm)}\ .$$

が成り立つ。ここにp_dは$\mathcal{H}_d$へのprojection である。

3° $f_0^{(\pm)}$および$f_\alpha^{(\pm)}$は次のように与えられる。

$$(4.7)\quad f_0^{(\pm)}=\boldsymbol{U}^{(\pm)*}f,\quad f_\alpha^{(\pm)}=\boldsymbol{U}_\alpha^{(\pm)}f\ .$$

4° Parceval の等式が成り立つ。

$$(4.8)\quad \|f\|^2=\|f_d\|^2+\|f_0^{(\pm)}\|_0^2+\sum_\alpha\|f_\alpha^{(\pm)}\|_\alpha^2$$

$\widehat{\mathcal{H}}$から$\mathcal{H}$の中への作用素$\boldsymbol{U}^{(\pm)}$を

$$(4.9)\quad \boldsymbol{U}^{(\pm)}\hat{f}=\boldsymbol{U}_0^{(\pm)}f_0+\sum_\alpha\boldsymbol{U}_\alpha^{(\pm)}f_\alpha$$

によって定義すれば上の1°〜4°は次のように述べることが出来る。

<u>定理</u> $\underline{\boldsymbol{U}^*\boldsymbol{U}=\widehat{\boldsymbol{E}},\ \boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^*=\boldsymbol{E}-P_d,\ HU=UH.}$

ここに$\widehat{\boldsymbol{E}}$および$\boldsymbol{E}$はそれぞれ$\widehat{\mathcal{H}}$および$\mathcal{H}$の単位作用素であって$\boldsymbol{H}$の連続部分$\boldsymbol{H}_c$と$\widehat{\boldsymbol{H}}$のunitary同値性はこの定理の一つの系である。

$\boldsymbol{U}$はその作り方からwave operator であるからscattering operator $\boldsymbol{S}$は

(4.10) $S = \boldsymbol{U}^{(+)*} \cdot \boldsymbol{U}^{(-)}$

で与えられる。$\boldsymbol{S}_{\alpha\beta}$を

(4.11) $\boldsymbol{S}_{\alpha\beta} = \boldsymbol{U}_{\alpha}^{(+)*} \boldsymbol{U}_{\beta}^{(-)}$ $\quad (\alpha, \beta = 0, 23, 31, 12)$

と定義すれば

(4.12) $\boldsymbol{S} = \sum_{\alpha\beta} \oplus S_{\alpha\beta}$.

scattering operator Sは$\hat{H}$の任意の函数と可換である。

$\boldsymbol{U}^{(\pm)}$および$\boldsymbol{S}$はtime-dependent theory で定義されるものと一致することが示されるのでSchrödinger equation の解の$t \to \pm\infty$における漸近的な振舞いは完全に決定されたことになる。

上の定理の証明は相当長い計算を必要とするのでここでは全然触れることが出来なかつたが，興味を持たれた方は原論文を見て頂きたい。

L. D. Faddeev, Mathematical Problems of the Quantum Theory of Scattering for a Three-Particle System (Publications of the Steklov Mathematical Institute Leningrad, 1963, No. 69).