数理解析研究所講究録
第6巻 1965年 18-21

# Abstract Stationary Method

東京大学理学部　　黒　田　成　俊

§1. 散乱理論の数学でこれまで問題になつてきたことは，(1) いわゆるWave operatorの存在，(2) 非摂動系のHamiltonian $H_0$ と摂動系のHamiltonian $H_1$のスペクトルの構造の類似性，などである。これを研究するのに，Wave operator

$$W_{\pm} = s\cdot \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_1} e^{-itH_0} P_0$$

の存在を直接的に立証するtime-dependent method，および$W_{\pm}$の形を直接に（右辺の極限とは無関係に）求め，のちにそれが右辺の極限と一致することを示すstationary methodとが行われている。後者においては，$W_{\pm}$ の形が，関係する作用素のResolventの或る種の極限として与えられることが特徴的である。

現在までStationary methodが最も成功しているのは，Potential 散乱に相当する場合で，微分作用素としての特性を生かして，大変詳しい結論が得られている。（本研究会の望月・静田両氏の報告，文献〔3〕,〔4〕等参照）。

一方，time-dependent methodにおいては，微分作用素というような具体的特性に基ずかない抽象的な条件の下で，多くの結論が得られていた。そのような条件の例をあげれば，$(H_0-i)^{-1}-(H_1-i)^{-1}$がトレース型（すなわちnuclear operator）であるというのがある。time-dependent methodは本報告の主題でないので，数多い文献を一つ一つあげるのはやめるが，必要ある方は文献〔7〕の文献表を参照されたい。さて，stationary methodの場合にも，こういう抽象的条件だけから何らかの結論が得られないかということが，当然問題になるであろう。この種の研究は，未だ満足すべき発展を遂げたとは言えないが，本報告では，研究の現状のうち筆者の関心の深いものについて述べた。

§2 Potential散乱（二体問題）を頭において，形式的な考察を試みる。Potential散乱では，

$$H_0 = -\triangle, \quad H_1 = -\triangle + q(x)$$

である。$-\Delta$の" 固有函数" は$\varphi_k(x)=e^{ik\cdot x}$であるが，これをもとにして，$-\Delta+q(x)$の" 固有函数" $\psi_k^{(\pm)}$が，いわゆるLippmann-Schwinger の方程式

$$(1) \quad \psi_k^{(\pm)}=\varphi_k-(H_0-(k^2\mp io))^{-1}V\psi_k^{(\pm)},$$

$$V=q(x) \ .$$

の解として求められる。こゝに$(H_0-(k^2\mp io))^{-1}$は$H_0$のResolvent$(H_0-z)^{-1}$の適当な意味での極限（$z\to$実軸のときの）である。$\psi_k^{(+)}$は物理的には$e^{ikx}$+incoming wave に，$\psi_k^{(-)}$は$e^{ikx}$+out going wave に対応する。$\psi_k^{(\pm)}$がperturbed eigenfunction であることを数学的に表現してみよう。$e^{ikx}$をもとにして，Fourier変換

$$\hat{u}(k)=(2\pi)^{-3/2}\int u(x)\,e^{-ikx}dx$$

を作ると

$$u(x)=(2\pi)^{-3/2}\int \hat{u}(k)\,e^{ikx}dk$$

であるが，このとき，

$$(2) \quad (W_\pm u)(x)=(2\pi)^{-3/2}\int \hat{u}(k)\,\psi_k^{(\pm)}(x)\,dk$$

となるというのが，$\psi_k^{(\pm)}$の意味である。このことを用いて，形式的計算を行うと，$u$のFourier 変換から，$W_\pm u$ の Fourier 変換を求める式として，

$$(3) \quad (W_\pm u)^{\wedge}(k)=\hat{u}(k) + \int \frac{[V-V(H-(k'^2\mp io))^{-1}V]\ (k,k')}{k'^2-(k^2\pm io)}\,\hat{u}(k,k')$$

が得られる。右辺の分子は〔 〕の中の作用素を$k$－空間で積分作用素として表わした時のkernel である。

二体のPotential 散乱に対して，池部〔4〕は，(1)を適当な函数空間で解いて(2)を導き，Faddeev〔3〕は，$k$－空間で考えることにより(3)を導いた(〔3〕の(8.6)式)。いずれの場合も，適当な空間で極限 $\cdots\mp io\cdots$ の存在を立証するのである。

§3　抽象的見地から問題を考えるとき，(1) は今のところ扱いにくい。一般化されたeigenfunctionをいかなる空間で探すかという問題が難しいから，これに反して，(3)

の形に着目すると，或る程度類似の結果が得られている。それらの結果はまだ中間的なもので，従ってまとまつた簡潔な形に表わしにくいので，詳しいことは文献〔2〕,〔5〕,〔6〕等にゆずり，以下では問題点のみを述べる。

式(3) はFourier space すなわち$H_0$ を対角化するような空間を基にしている。一般には，$k$のような変数はみつからない。しかし，$k=(|k|,\omega)$（$\omega$ は角変数）として，$\hat{u}(k)=\hat{u}(|k|,\omega)$と書くと，$\hat{u}(k)$は$|k|$を変数とし，$\omega$についての$L^2$すなわち$L^2(\Omega)$の値をとる函数ともみなせる。Friedrichs に従つて，$|k|$（又は$|k|^2$）をspectral parameter，$L^2(\Omega)$をAccessory spaceというのは，印象的である。

そこで，一般的に(3) を論ずるには，都合のよいAccessory space をみつけることと，$\cdots\pm io\cdots$ の極限の意味を適当につけることが問題になる。これは，前にもあげた$(H_0-i)^{-1}-(H_1-i)^{-1}$ がトレース型という可成り一般的な仮定のもとで，できていることはできている(〔2〕〔6〕)しかし，その場合のAccessory spaceは，Potential散乱の場合の$L^2(\Omega)$のように意味が明らかなものではなく，むしろ甚だ奇妙なものをとらざるを得ない。しかし，一応そこのところに眼をつぶれば，可成り一般的仮定から出発して，Stationary methodを遂行でき，(3) に類する式もしくはその数歩前の式まで到達できる，というのが現状である。なお最近Bivman－Entina〔1〕がこの方面の新しい試みを発表しているが，結果の予告だけであり，はつきりしないところもあつて，こゝで詳しく報告できない。

以上，結果が中間的で短く述べにくい事情もあつて，まとまつた定理を書かなかつた点御諒承頂きたい。Stationary methodにおいては，抽象的考察からすべてを出そうと試みるのは，必ずしも適当でないようにも思えるが，Lippmann−Schwingerの方程式(1)の取り扱いも含めて，もう少し理論の進歩が期待される。

# 文　　　献


〔1〕 Birman, M. S., Entina, C. B., On the stationary approach to approach to the abstract theory of scattering, Dokl. Akad. Nauk USSR, 155 (1964), 506–508

〔2〕 de Branges, L., Perturbation of self-adjoint transformations, Amer. J. Math., 84 (1962), 543–560

〔3〕 Faddeev, L. D., Mathematical problems arising in the quantum mechanical scattering theory of a three particle problem (ロシヤ語), Tpyabl, Mat. Nhct. Ctekrrob, 69, 1963

〔4〕 Ikebe, T., Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory, Arch. Rat. Mech. Anal. 5 (1960), 1–34

〔5〕 Kuroda, S. T., Finite-dimensional perturbation and a representation of scattering operator, Pacif. J. Math. 13 (1963), 1305–1318

〔6〕 Kuroda, S. T., On a stationary approach to scattering theory, Bull. Amer. Math. soc. 70 (1964), 556–560

〔7〕 Rejto, P. A., On gentle perturbation, I. Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963) 279–303, II. 同誌 17 (1964), 257–292.