数理解析研究所講究録
第6巻 1965年 22-26

Weinbergの方法について

京都大学数理解析研究所　荒木不二洋

§1 Introduction

静田氏の話にもあつたように，三体問題のResolventに対して(変数zが実軸にない場合)，Lippmann–Schwinger の積分方程式を書くと，そのkernel が連続スペクトルを持つていて，Hilbert Schmidt 型にはならない。ところが未知関数を適当に変えてやると，新しく導入した関数はkernel がHilbert Schmidt 型の線型積分方程式ををみたし，したがつて問題が扱いやすくなる。事実これがFaddeev の議論の第一のstep である。

Weinbergはn体問題でこれと同じことをするにはどうしたらよいかということを提案し，少くとも三体問題の時にはHilbert Schmidt型のkernelが得られることを示した。さらにHunziker がn体の時にもWeinberg の方法によつてHilbert Schmidt 型のkernel が得られることを示している。したがつて，Weinbergの与えた方程式で，zを実軸に近ずけた極限をFaddeev 流に議論すれば，n体問題についても，3体問題のFaddeev の結果と類似のものが得られるのではないかと思われる。もちろんこれは将来の課題である。

ここではWeinberg の方法を証明ぬきで説明する。参考文献は

S. Weinberg, Phys. Rev. 133 (1964) B232–256.
W. Hunziker, Phys. Rev. 135 (1964) B800–803

§2 問題の設定

n体のハミルトニアンとして

$$H = H_0 + V$$

$$H_0 = \sum_{i=1}^{n} p_i^2 / (2m_i)$$

$$V = \sum_{i<j} V_{ij}, \quad V_{ij} = V(x_i - x_j)$$

を考える。

まず全運動量

$$P = \Sigma p_i$$

がHの各項と"可換"であり，Pの異る値に対するHは同等なので$P=0$でのHを$\hat{H}$と書いてHの性質を調べる。（すなわちヒルベルト空間をPのスペクトル分解によって$\mathfrak{h} = \int \mathfrak{h}_p \, d\mu(p)$, $P_k = \int p_k d\mu(p)$, $H = \int H_p d\mu(p)$ のように直和積分に分解する。($\mathfrak{h}_p$, $H_p - \frac{p^2}{2M}$) は互にユニタリ同値にとれるので ($M = \Sigma m_i$)，その時例えば$p=0$で$\mathfrak{h}_p$の上のH_pを調べればよい。）

ハミルトニアンのスペクトルを調べるために，resolvent

$$G(z) = (z-H)^{-1}$$

を定義し，Lippmann Schwinger 方程式(resolvent equation)

$$G(z) = G_0(z) + K(z)\,G(z)$$

$$G_0(z) \equiv (z-H_0)^{-1}$$

$$K(z) \equiv G_0(z)\,V$$

を考える。

もし$n=2$ならば，$\hat{K}(z)$はzが正または0の実数でなければHilbert Schmidt 型になる。ところが，$n \geqq 3$ではそうならない。そこで$G(z)$と相互に簡単な関係で結ばれた$C(z)$を導入して，$C(z)$に対する方程式が，$\hat{I}(z)$がHilbert Schmidt型であるようなkernel $I(z)$と既知項$B(z)$を使って

$$C(z) = B(z) + I(z)\,C(z)$$

の型になるように工夫せよというのが問題である。この際，$B(z)$と$C(z)$の関係は，$\mathrm{Im}\, z \to 0$での$C(z)$のふるまいがわかれば，$G(z)$のふるまいもたゞちにわかるものが望ましい。

Weinberg の方法はそのような$C(z)$，$I(z)$，$B(z)$を一般のnに対してrecursiveに与える。

§3 物理的背景

$n \geqq 3$で$K(z)$がHilbert Schmidt 型にならないのには，明らかな理由がある。それは$K(z)$の定義式のVをV_{ij}にわけて，各V_{ij}について考えると，iおよびj以外の粒子の運動量(p_k, $k \neq i, j$)について$K(z)$は対角的になつている(kernelがδ関数を含む)からである。座標空間の言葉でいうと，(ij)というpair以外の任意のpair の二粒子相互の距離が大になつた時，$\hat{K}(z)$に対応するx表示のkernelが小さくならないということである。

これをさけるには，kernelの中にV_{ij}が沢山あらわれて，どの二粒子の座標を引き離しても，直接または間接にどれかのV_{ij}が働いて，$K(z)$のx表示でのkernel が小さくなればよい。それには，$K(z)$のうちで，いくつかのgroup の粒子が，各group 内では相互作用しているが，各group間では相互作用を起さないで通り抜けてしまうような部分を除いて，どの粒子も直接または間接に相互作用を及ぼし合つているような部分(connected part)を取り出して，それに対する方程式を立ててやればよいことが推察される。このような"connected part" を取り出す操作は，いろいろな分野でいろいろな名前のもとに使われているので，どうすればよいか良く知られている。(統計力学でcluster expansion, 素粒子論でconnected part, truncated part, cluster decomposition, normal product etc.，確率統計でcumulants)

上記の説明をグラフで書くと次のようになる。今resolvent を型式的に

$$(z-H)^{-1}=(z-H_0)^{-1}(1-V(z-H_0)^{-1})^{-1}$$

$$=(z-H_0)^{-1}+(z-H_0)^{-1}V(z-H_0)^{-1}+\cdots$$

のように展開し，各VをV_{ij}にわける。今n粒子に対応してn本の線を水平に引き，各V_{ij}に対応してi番目とj番目の線を結ぶ線分を引いて各項を表すことにする。この際，各項中のV_{ij}の順序に従つて，左から右へ対応する線分を書くことにする。この時，位相的にconnected な graphとそうでないグラフができる。例えば最初の$(z-H_0)^{-1}$はn本の直線だけで明らかにdisconnected である。connected なグラフに対応した項の和をconnected part $C(z)$と考える。connected でないグラフも，どの線とどの線がconnect されているかということで分類して足すと，それぞれがnのより小さいresolvent の connected part から簡単なrule で作られることがわかる。これがあとで述べる$G(z)$と$C(z)$のrecursive な関係式である。

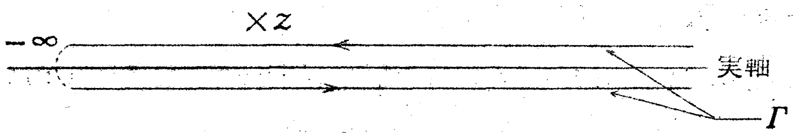
次にconnected part $C(z)$ のグラフで一番左方に位置しているいくつかのV_{ij}に対応した線分のうち，$C(z)$がconnectedになる為にどうしても必要な分だけ，前へくくり出して考えると，残りの部分に対してはまつたく制限がなくなるので，残りの部分が$G(z)$で表され，前へとりだして分が求めるkernel $I(z)$ を与える。作り方によつて$I(z)$はVですべての粒子がつながつているので，Hilbert Schmidt 型になる可能性がある。disconnected part の和$G(z)-C(z)$および$I(z)$ は，より小さいnに対する$C(z)$で表すことのできるので，$I(z)$を既知のkernel，$B(z)\equiv I(z)(G(z)-C(z))$を既知の非斉次項と考えると，求める方程式がでてくる。

§4 Weinberg の方程式

今convolution $*$ を

$$(f_1 * f_2)(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f_1(z')f_2(z-z')dz'$$

たゞしIm $z\neq 0$ に対し，積分路Γは実軸のまわりを次の図のようにとる。



実際に使うのは下に有界で互に可換なH_1とH_2について，

$$f_1=(z-H_1)^{-1}, \quad f_2=(z-H_2)^{-1}$$

の時

$$f_1 * f_2=(z-H_1-H_2)^{-1}$$

というように使う。

今$1\cdots n$の部分集合を一般にSと文字で表し，

$$H_S=\sum_{i\in S}P_i^2/(2m)+\sum_{i<j,\, i\in S,\, j\in S}V_{ij}$$

$$G_S(z)=(z-H_S)^{-1}$$

と定義する。そこでconnected part $C_S(z)$を

$$G_S=\Sigma\, C_{S_1}*\cdots*C_{S_\nu}$$

でrecursive に定義する。ここに和は集合Sを互にdisjointなS_k，$1\leq k\leq \nu$ の union にわけるすべてのpartition（νも任意に変える）についての和（順序だけが異るものはどれか一つだけとる。）で，そのうち$\nu=1$の項が定義したい$C_S(z)$であり，残りの項は同様の式で定義されるより低いorder の$C(z)$で与えられる。例えば

$$C_i(z)=(z-H_i)^{-1}$$

$$C_{ij}(z)=(z-H_{ij})^{-1}-(z-H_i-H_j)^{-1} .$$

一般に

$$C_S(z)=\sum_m(-1)^{m-1}(m-1)!\sum_{\{S_1\cdots S_m\}}(W-H_{S_1}-\cdots-H_{S_m})^{-1}$$

kernel $I_S(z)$は

$$I_S(z)=\sum C_{S_1}(z)*C_{S_2}(z)V_{S_1S_2}$$

$$V_{S_1S_2}=\sum_{i\in S_1,j\in S_2}V_{ij}$$

和はSをnonempty で互にdisjoint なS_1とS_2のunionにわけるpartition についてとり，(S_1, S_2)と(S_2, S_1)はどちらか一つだけとる。特に

$$I_i=1$$

最後に非斉次項は

$$B_S(z)=I_S(z)(G_S(z)-C_S(z))$$

で与えられ，方程式は

$$C_S(z)=B_S(z)+I_S(z)C_S(z)$$

となる。

ポテンシャル$V(x)$がL_2ならば，H_Sのスペクトルに属さないzに対して$I(z)$はHilbert Schmidt 型であり，そのHilbert Schmidt norm は$z\to-\infty$で$(\mathrm{Re}\ z)^{-1}$で小さくなることが，Hunziker によって示されている。