数理解析研究所講究録
第9巻 1966年 8-23

J. Glimm の研究について

(Smooth dual をめぐる話題)

山形大学　富　山　　　淳

まえがき

J. Glimm の C^*-algebra に関する研究は直接には〔12〕,〔13〕,〔14〕等があるが，ここで問題にするのは separable C^*-algebraについての彼の〔14〕の研究である。〔14〕はそれ以前の C^*-algebra の dual に関するいくつかの重要な結果をほとんどすべて独立に証明し，更にこの方面で最後にのこつていた問題 - Mackey の conjecture - をも完全に解決したものである。この意味で〔14〕の仕事はそのまま当時の smooth dualをめぐる話であるともいえる。

以下とり扱う C^*-algebra はすべて特にことわらない限り separable であるものとする。 separable locally compact group については，dualに関する議論は separable C^*-algebra でのみ行つて十分であるから，特にふれないことにする。話をはじめる前に重要な定義をまずあげておく。

1.) A : C^*-algebra Aの既約表現がすべて completely continuous operator よりなる時 A を CCR algebra (Dixmier〔7〕の本でalgebre liminaire)又既約表現が completely continuous operator の ring を含む時 GCR algebra (algèbre postliminaire)という。 GCR algebra については ideal の composition series による Kaplansky〔19〕の最初の定義があるが，A が separable の時は上のことと同値になる(〔3〕)。

A が non-zero な GCR ideal をもたない時 NGCR algebra (algebre antiliminaire)という。

2.) H_n(n=1,2,3・・・ ∞)を n次元 Hilbert space.

$\mathrm{Rep}_n(A)$: A より H_n 上への有界な作用素による * - 表現の全体

$\mathrm{Irr}_n(A)$: A より H_n 上への既約表現の全体

$$\mathrm{Rep}(A) = \mathrm{Rep}_1(A) \cup \mathrm{Rep}_2(A) \cup \cdots \cup \mathrm{Rep}_\infty(A)$$

(disjoint sum)

$$Irr(A) = Irr_1(A) \cup Irr_2(A) \cup \cdots \cup Irr_\infty(A)$$

$Irr(A)$ の unitary 同値性による商空間を $\widehat{A}$ (A の dual).

$Rep_n(A)$ に $B(H_n)$ の strong topology による simple convergence topology を考え，それによつて generate された Borel structure を考える。$Rep(A)$ 及び $Irr(A)$ の Borel structure を夫々 $Rep_n(A)$ のそれの和及び sub-Borel structure と定義する。$\widehat{A}$ に $Irr(A)$ からの quotient Borel structure を入れる。これが Mackey の Borel structure と呼ばれているものである ([22])。

尚 $\widehat{A}$ は，A の primitive ideal のつくる空間(structure space)の Jacobson の意味での hull-kernel topology より induce された topology をもち，これから生成された topological Borel structure を別に有する。

3.) $\widehat{A}$ の Mackey Borel structure が countably separated の時 $\widehat{A}$ は smooth，又 A は smooth dual をもつという。

任意の $\widehat{A}$ の finite (or σ - finite) Borel measure countably separated の時 (この時この measure は必然的に standard になる) $\widehat{A}$ は metrically smooth，A は metrically smooth dual をもつという。smooth ならば勿論 metrically smooth である。

§ 1. Glimm 以前

I. Kaplansky は C^*- algebra の最初の構造的研究ともいうべき [19] において CCR - algebra, GCR - algebra という class を提唱し，更に [20] において GCR - algebra の表現はすべてI型であること，即ち GCR - algebra はI型 の C^*- algebra であることを証明した。一方 G. W. Mackey は algebra (又は群) の表現の様相をより正確に反映するものとして $\widehat{A}$ の中に所謂 Mackey の Borel structure を考え，更に $\widehat{A}$ の smoothness という概念を導入した ([22])。ここで smooth という考えを明らかにするために彼の結果の主要部をふりかえつてみよう。

S を Borel space, μ をその上の finite Borel measure とする。今 $y \in s \rightarrow \pi(y) \in Rep(A)$ を Borel 函数とすると，ここで表現 $\pi(y)$ の

direct integral $\int_S \pi(y)d\mu$ が考えられる。

更に $y \rightarrow \pi(y)'$ をもう一つの Borel 函数とすると，もし

$$\pi(y) \cong \pi(y)' \text{ (unitary 同値)}$$

$$\mu\text{-a.e. ならば} \quad \int_S \pi(y)d\mu \cong \int_S \pi(y)'\,d\mu$$

が言えるから，direct integral を $y \rightarrow \zeta(y)$ が Rep(A) への Borel 函数でなく Rep(A) の unitary 同値類のつくる Borel space $\mathcal{R}$ (A) (Borel structure は quotient Borel structure) への Borel 函数としても意味をもたせることが出来る。即ちこの時は Borel 函数 $y \rightarrow \pi(y) \in$ Rep(A) を $\pi(y)$ が $\zeta(y)$ の同値類に μ-a.e. で入るようにとつて $\int_S \pi(y)d\mu$ をつくり，その同値類を $\int_S \zeta(y)d\mu$ と考えればよい。端的に言えばこれが可能だということは $\mathcal{R}$ (A) 上に Borel section $\zeta(y) \rightarrow \pi(y)$ が μ-a.e. 存在することである。これは表現の積分としては非常に望ましい状態であるが勿論このようなことは常に可能とは限らず，Mackey はこの時 Borel function $y \rightarrow \zeta(y) \in \mathcal{R}$ (A) は "integrable" であると呼んだ。このように $\mathcal{R}$ (A) (ひいては $\hat{A}$) 上の Borel section の存在と表現論の reasonable なあり方との間には密接な関係があるが，Mackey は更に次のことを証明した。

<u>定理 1.</u> Irr(A) の中に Borel set S が，各同値類と唯一点で (必ず) 交わるように存在するならば (Borel transversal という) $\hat{A}$ は smooth である。

<u>定理 2.</u> A が metrically smooth dual をもつならば Borel space S より $\hat{A}$ への任意の Borel function は integrable である。(任意の $\hat{A}$ 上の measure について)

以上から A が metrically smooth dual をもつならば $\hat{A}$ 上の identity map は任意の Borel measure μ について integrable になり $\int_{\hat{A}} \zeta d\mu(\zeta)$ が考えられる。さて与えられた A の表現がすべて上のような形の表現の合成で記述出来ればこれまでのもくろみは成功するわけであるが，Mackey は A が I 型で且つmetrically smooth dual をもつ時にそれが可能であることを示し，更に種々の現象から考えて次のような結果がきわめて natural であることを提唱した。

Mackey の conjecture. A が(metrically) smooth dual をもつ $\Longleftrightarrow$ A が I 型。

1960年代に入り C^*-algebra の研究が再び活発化すると，先ず J. M. G. Fell [10] は $\hat{A}$ の位相を調べることによつて，$\hat{A}$ が T_0-space ならば smooth であること，又 GCR-algebra は $\hat{A}$ が T_0-space であることを証明した。Fell とほとんど時を同じくして J. Dixmier は次のことが同値であることを示し([3])。

(a1) A が GCR-algebra.

(a2) $\hat{A}$ が T_0-space.

更に [4] において以下のことも同値であることを示した。

(a3) $\hat{A}$ が standard Borel space.

(a4) $\hat{A}$ が smooth.

(a5) $\hat{A}$ の topological Borel structure と Mackey の Borel structure が一致する。

(a4) $\Rightarrow$ (a1) と既出の Kaplansky の結果とを合せれば，smooth dual をもてば I 型ということになり，Mackey の予想の半分が解決され，更に smooth dual をもつ C^*-algebra は GCR-algebra のみであることも判明したわけである。しかし A の一般の表現とその構造との関係はつかめず Mackey の予想の半分はそのまま残つた。

Glimm [14] はこのような背景の下に Fell，Dixmier とも独立してそれまでの結果をすべて証明し，更に前述の予想を(Metrically smooth dual の場合も含めて)完全に解決したほかに，当時まだ未知の部分であつた II 型，III 型の表現の存在についても基本的な結果を与えたものである。

§ 2. Glimm

<u>定理</u>　Separable な C^*-algebra A　については次のことは同値である。

Ⅰ. (a1)　A が GCR algebra

(a2)　$\hat{A}$ が T_0-space

(a3)　$\hat{A}$ が standard Borel space

(a4)　$\hat{A}$ が smooth

(a6)　$\hat{A}$ が metrically smooth

(a7)　A が Ⅰ型の C^*-algebra

(a8)　A が Ⅱ型の表現をもたない。

(a9)　A が Ⅲ型の表現をもたない。

Ⅱ. (b1)　A が non-zero GCR ideal をもたない。

(b2)　A が faithful なⅡ型の表現をもつ。

(b3)　A が faithful なⅢ型の表現をもつ。

主要部は今までのことから，(a6)⇨(a1)，(a7)⇨(a1)，(a8)⇔(a9)である。

このことは又 C^*-algebra においては A がⅡ型の表現をもつことと，Ⅲ型の表現をもつこととは同値だということであり，von Neumann algebra の理論でこれまで予想されなかつた事態が C^*-theory には起ることを示している。Glimm は上の結果を NGCR algebra においてⅡ型及びⅢ型の表現を同時に構成することによつて示した。証明の主要部は NGCR algebra には von Neumann algebra の hyperfinite factor　の構成に比すべき次のような $2^n \times 2^n$ matrix units の「近似的な」遂次拡大が存在することを示すことにある。

<u>Lemma 1.</u>　A：NGCR algebra, unit をもつ。

$(s_0, s_1, s_2 \cdots)$ A の self-adjoint element の列とする。

(但し s_0 を positive, $\| s_0 \| = 1$ にとる)

このとき A の単位球内に次のような element の system が存在する。$(a_1, a_2, \cdots a_n \in \{0, 1\}, n = 1, 2, 3, \cdots)$

(1) $s_0 + \frac{1}{4} \geq v(0)\, v(0)^*$

(2) $j \leq k$, $(a_1, a_2, \cdots a_j) \neq (b_1, b_2, \cdots b_j)$ のとき

$$v(a_1, a_2, \cdots a_j)^* v(b_1, b_2, \cdots b_k) = 0$$

(3) $k \geq 2$, $v(a_1, a_2, \cdots a_k) = v(a_1, a_2, \cdots a_{k-1}) v(0_{k-1}, a_k)$

(4) $j < k$ $\quad v(a_1, a_2, \cdots a_j)^* v(a_1, a_2, \cdots a_j) v(0_{k-1}, a_k)$

$$= v(0_{k-1}, a_k)$$

(5) $v(\phi) = 1$, $v(0_k) \geq 0$

(6) $e(j) = \sum_{a_1, \cdots a_n \in \{0, 1\}} v(a_1, a_2, \cdots a_j) v(a_1, a_2, \cdots a_j)^*$ とおく

と

$\forall j \geq 0 \quad \exists t_j$: $v(a_1, a_2, \cdots a_j)\, v(b_1, b_2, \cdots b_j)^*$ の linear combination

$$\| e(j+1)(s_j - t_j) e(j+1) \| \leq \frac{1}{j+1}$$

更に上の system は次の条件をみたすようにとれる。

(7) $\exists b(j) \in A^+$ $(j = 1, 2, 3 \cdots\cdots)$: $\| b(j) \| = 1$

$$v(a_1, a_2, \cdots a_j)^* v(a_1, a_2, \cdots a_j) b(j) = b(j)$$

但しここで $\quad v(0_k) = v(\overbrace{0, 0, \cdots, 0}^{k ケ})$.

この Lemma は「任意の II_1 -型 factor は hyperfinite factor を含む」という Murray-Neumann 〔24〕の結果の C^*- analogue である。この証明はスペクトル論を巧妙に駆使して興味深いものであるが詳細は原論文にゆずる。

今 $M(n)$ を $v(a_1, a_2, \cdots a_n) v(b_1, b_2, \cdots b_n)^*$ の linear combination, $N(n)$ を $M(0) \cup M(1) \cup \cdots \cup M(n)$ の linear combination,

$$N = \overline{\bigcup_{n \geq 0} N(n)} \qquad とおく。$$

上の Lemma の system の意味の一端を明らかにしたのが次の Lemma である。

Lemma 2. A を NGCR algebra, $\{v(a_1, a_2, \cdots a_n)\}$ を Lemma 1 の system とする。Π を $\pi(e(j)) \neq 0$ $(j=1, 2, \cdots)$ であるような A の表現とすると

1) $\pi(M(n))$ は $[\text{range}\ \pi(e(n+1))]$ を不変にし，$\pi(M(n)) \mid [\text{range}\ \pi(e(n+1))]$ は $\pi(v(a_1, a_2, \cdots a_n)\ v(b_1, b_2, \cdots b_n)^*)$ を matrix units とする $2^n \times 2^n$ の matrix algebra である。

2) $\pi(v(a_1, a_2, \cdots a_{n-1})v(b_1, b_2, \cdots b_{n-1})^*) \mid [\text{range}\ \pi(e(n+1))]$ は $\pi(M(n)) \mid [\text{range}\ \pi(e(n+1))]$ の要素の linear combination 。

3) $\{[\text{range}\ \pi(e(n))]\}$ は単調減少。

ここで定理の証明を (b1)⇒(b2), (b1)⇒(b3) の形で考える。任意の C^*-algebra A には必ず最大の GCR ideal K が存在して $A \neq K$ ならば A/K は NGCR algebra になるから，$(a8) \Rightarrow (a1)$，$(a9) \Rightarrow (a1)$ （従つて又 $(a7) \Rightarrow (a1)$）は上のことが示されれば明らかであろう。

$0 < p \leq \frac{1}{2}$ をとり $q = 1 - p$ とおく。今

$$\varphi(1)=1,\ \varphi(v(a_1, a_2, \cdots a_n)v(b_1, b_2, \cdots b_n)^*)$$

$$= \delta^{b_1, b_2, \cdots b_n}_{a_1, a_2, \cdots a_n}\ q^{\sum_{i=1}^{n} a_i}\ p^{n - \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

とおくと Lemma 2 の π を identity representation にとれば明らかに φ は N(n) 上の state であることがわかる。よつて φ は N 上の state に（unique に）拡大出来る。φ を更に A上へのその一つの state extension とする。π_φ を φ による A の canonical な表現とすると，先ず Lemma 1 の (i) と φ の性質から $\pi_\varphi(s_0) \neq 0$。ここで s_0 は A^+ の中で任意に定められるから，もし π_φ が p のとり方でII型又はIII型の表現になることが証明されれば求める結論がえられたことになる。

$f(n) = P[\text{range}\ \pi_\varphi(e(n))]$， $f = \inf f(n)$ とおく

明らかに $f \in \widetilde{\pi_\varphi(A)}$ (weak closure) で且つ Lemma 2 を用いれば $\pi_\varphi(M(n))$ は任意の n について fH を不変にし，$\pi_\varphi(M(n))f$ は $2^n \times 2^n$ matrix algebra であることがいえる。一方 $s_1, s_2 \cdots$ を A の self-adjoint part

の dense set にとつておけば Lemma 1 の (6) より $\pi_{\varphi}(N)f$ は $f\pi_{\varphi}(A)f$ の中でノルム位相で dense なことがわかる。そこで今 $\widetilde{\pi_{\varphi}(N)f}$ が「$p=\frac{1}{2}$ のときはII型，$0<p<\frac{1}{2}$ のときはIII型」とわかつたとすると，$f\pi_{\varphi}(A)f$ の commutant $(f\pi_{\varphi}(A)f)'=f\pi_{\varphi}(A)'f$ も又夫々II型又はIII型になる。しかるに $\varphi=\omega_{\xi}\pi_{\varphi}$ と canonical に φ を表現したときに $\xi\in fH$ がいえることから $a\in\pi_{\varphi}(A)'$ $\longleftrightarrow af\in\pi_{\varphi}(A)'f$ が同型対応であることがわかり，$\pi_{\varphi}(A)'$ がII型又はIII型，従つて結局 $\widetilde{\pi_{\varphi}(A)}$ が $p=\frac{1}{2}$，$0<p<\frac{1}{2}$ の時夫々II型及びIII型になる。そこで「…… ……」の部分の証明であるが，Glimm は

(*) $\widetilde{\pi_{\varphi}(N)f}=\widetilde{f\pi_{\varphi}(A)f}$ が Neumann-Pukánszky によるII型及びIII型の，von Neumann algebra の factor の example と同型。

であることを示した。われわれはここに Lemma 1 の system の構成の重要な意味をみることが出来る。即ち上のことは von Neumann algebra においては単に example の範囲内にとどまつていた以下の factor の構成法の議論が C^*-algebra においては「一般の NGCR algebra ― ひいてはI型でないすべての C^*-algebra」における表現の現象となつていることを示している。そこで Neumann-Pukánszky による factor の構成を簡単に考えてみよう。measure space (X_0, s_0, μ_0) を $X_0=\{0, 1\}$，$s_0=X_0$ の部分集合全体の ring，$\mu_0\{0\}=p$，$\mu\{1\}=q$ とする。任意の n について $(X_n, s_n, \mu_n)=(X_0, s_0, \mu_0)$ とおき $\{(X_n, s_n, \mu_n) \mid n=1, 2, 3\cdots\}$ の product measure space を (X, s, μ) とする。ここで X の要素は $x=(x_n)$ ($x_n=0$ 又は 1) とかけるから $y=(y_n)\in X$ との和 $z=x+y$ を $z_n=x_n+y_n \pmod 2$ で定義すれば X は compact な(可換)位相群になる。

$$\Delta=\{x=(x_n) \mid \text{有限ケを除いて } x_n=0\}$$

とおくと Δ は X の countable dense subgroup で且つ

$$x\cdot\gamma=x+\gamma \qquad (\gamma\in\Delta)$$

という作用で X の homeomorphism を induce する。Δ の generator を $\gamma_k=((\gamma_k)n \mid \text{但し} (\gamma_k)_n=\delta_n^k)$ とおく。Δ は明らかに s の automorphism

を induce するから

$$\forall \gamma \in \Delta \text{ に対して } \mu_\gamma(E) = \mu(E_\gamma) \quad \text{for} \quad E \in s$$

とおくと measure μ は次の条件をみたす。（Pukánszky〔28〕）。

1） Δ で quasi－invariant i.e. μ_γ は μ に関して絶対連続。

2） ergodic i.e. E を Δ－invariant measurable set とすると $\mu(E)=0$ 又は $\mu(X-E)=0$

3） $0 < p < \frac{1}{2}$ の時 non－measurable.

（μ と同値な Δ－invariant measure ν が存在する時 μ を measurable という。$p=\frac{1}{2}=q$ の時は μ 自身が Δ－invariant だから measurable である）

そこで Hilbert space H を

$$H = l_2(\Delta) \otimes L^2(X,\mu) = \left\{ f(\gamma,x)\ \gamma\in\Delta,\ x\in X \,\middle|\, \sum_{\gamma\in\Delta}\int_X |f(\gamma,x)|^2 d\mu < \infty \right\}$$

とおく，但し

$$(f,g) = \sum_{\gamma\in\Delta}\int_X f(\gamma,x)\overline{g(\gamma,x)}\,d\mu$$

今 u_α $(\alpha\in\Delta)$，$\ell(\rho(x)\in L^\infty(X,\mu))$ を

$$(u_\alpha f)(\gamma,x) = \left(\frac{d\mu_\gamma}{d\mu}(x)\right)^{1/2} f(\gamma+\alpha,\ x\alpha)$$

$$(l(\rho)f)(\gamma,x) = \rho(x)f(\gamma,x) \qquad (f\in H)$$

で定義すると，u_α，$l(\rho)$ は H 上の有界作用素で特に u_α は unitary 作用素となるが，$\{u_\alpha,\ l(\rho)\}$ によつて生成される von Neumann algebra M は $p=\frac{1}{2}$ のとき II_1 型，$0<p<\frac{1}{2}$ のとき III 型の factor になる。そこで M と $\widetilde{\pi_\varphi(N)f}$ との対応であるが，$\rho(a_1, a_2, \cdots a_k)(x)$ を $\{(x_n)\,|\,x_i=a_i\ \ i=1,2,\cdots k\}$ という集合の特性函数とすると，M は u_α 及び $l(\rho(a_1, a_2, \cdots a_k))$ によつても生成されるから，その対応として

$$\theta(l(\rho(a_1,a_2,\cdots a_n)))=\pi_\varphi(v(a_1,a_2,\cdots a_n)v(a_1,a_2,\cdots a_n)^*)f$$

$$\theta(u\gamma_n)=\Sigma_{a_1,a_2\cdots a_{n-1}}\{\pi_\varphi(v(a_1,a_2,\cdots a_{n-1},0)v(a_1,a_2,\cdots a_{n-1},1)^*)f$$

$$+\pi_\varphi(v(a_1,a_2,\cdots a_{n-1},1)v(a_1,a_2,\cdots a_{n-1},0)^*)f\}$$

とおく。この時 θ は $\{u_\alpha, l(\rho(a_1,a_2,\cdots a_k))\}$ により生成された C^*-algebra M_1 より $\pi_\varphi(N)f$ への onto の isomorphism に拡大出来る。更に H の要素

$$g(\gamma,x)=\begin{cases}1 & \gamma=e \quad (\Delta\text{の単位元})\\ 0 & \gamma\neq 0\end{cases}$$

をとると，g は M_1 の generating vector（$[M_1 g]=H$）で且つ

$$\omega_g \mid M_1=\omega_\xi\theta$$

一方 ξ も又 fH での $\pi_\varphi(N)f$ の generating vectorになつているから θは spatial isomorphismになり，$\widetilde{\pi_\varphi(N)}f$ と M との同型対応にまで拡大出来ることがわかる。

次に Mackey の予想の完全な解決にあたる$(a6)\Longrightarrow(a1)$ の証明をみてみよう。この場合にも A の，ideal I による factor algebra の dual $\widehat{A/I}$，と $\hat{A}$ との関係を考えれば A が NGCR algebra の時 $\hat{A}$ が metrically smooth にならないことを証明すればよい。更にもし $\hat{A}$ の中に部分集合 K（必ずしも Borel set でなくともよい）が存在して $\hat{A}$ の Borel subspace として metrically countably separated にならないならば容易にわかるように $\hat{A}$ 自身も metrically countably separated にならないから，結局上の様な部分集合を探せばよいことになる。

前と同様に Lemma 1 の s_1, s_2, …… を A の self-adjoint part の dense set とする。$\xi_0\in H_\infty$，$\|\xi_0\|=1$ を任意にとり固定する。

$$e(p,a)=\sum_{a_1,a_2,\cdots a_{p-1}} v(a_1,a_2,\cdots a_{p-1},a)v(a_1,a_2,\cdots a_{p-1},a)^* \quad (a=0\ 又は\ 1)$$

とおき，これを用いて

$$K^c = \{ \pi \in Irr_\infty(A) \mid (\pi(e(k))\xi_0, \xi_0) = 1 \text{ 且つ } (\pi(e(k,1))\xi_0, \xi_0) = 0 \text{ 又は } 1 \}$$

とおく。K^c は $Irr_\infty(A)$ の Borel set である。そこで

$$\theta : K^c \to X \text{ を } \theta(\pi) = \{ (\pi(e(k,1))\xi_0, \xi_0) \mid k = 1, 2, \cdots \}$$

と定義する。これに関して Glimm は Lemma 1 の別の意義を示す次のような結果を与えている。

$\{ d_n \mid d_n = 0 \text{ 又は } 1 \}$ をとり前の φ の定義の時のように N 上の state ψ を

$$\psi(1) = 1, \ \psi(v(a_1, a_2, \cdots a_n) v(b_1, b_2, \cdots b_n)^*) = \delta^{d_1, d_2, \cdots d_n}_{a_1, a_2, \cdots a_n} \ \delta^{d_1, d_2, \cdots d_n}_{b_1, b_2, \cdots b_n}$$

と定義する。この時 ψ は N の pure state になるので A 全体への pure state extension を又 ψ とかくことにする。

Lemma 3. 1) π_ψ を ψ の canonical な表現とすると，π_ψ は無限次元の既約表現である（$\pi_\psi = \pi_{\{d_i\}}$ とおく）

2) $\pi_{\{d_i\}}$ と $\pi_{\{t_i\}}$ が unitary 同値 $\rightleftarrows (d_i) \equiv (t_i) \mod \Delta$

以下 $H_\psi = H_{\{d_i\}}$，$\psi = \omega_\xi \pi_\psi$ となる $\xi \in H_\psi$ を $\xi = \xi(\{d_i\})$ とかくことにする。

上の Lemma を用いれば θ が onto であることは，$(d_1, d_2, \cdots)$ を X の任意の元とするとき $H_{\{d_i\}}$ より H_∞ への unitary transformation U を $U\xi(\{d_i\}) = \xi_0$ となるようにとり $\pi = U\pi_{\{d_i\}}U^{-1} \in Irr_\infty(A)$ とおけば $\theta(\pi) = (d_i)$ となることからわかる。K を K^c の unitary 同値類とし，K には K^c よりの quotient Borel structure $\mathcal{B}_q$ を考える。Lemma 3 の 2) から θ は

$$\tilde{\theta} : K \to X/\Delta \quad (1\text{対}1 \text{ onto})$$

を induce する。$X/\triangle$ に X による quotient Borel structure を考える。一方 X の Borel structure は，θ による K^c の Borel structure の quotient structure と一致することがわかるから，$\widetilde{\theta}$ は Borel isomorphism になる。次に

$$\rho : \widetilde{\pi} \in K \rightarrow \hat{\pi} \in \hat{A}$$

を K の $\hat{A}$ への embedding map とし，これにより $\rho(K)$ の Borel structure を K に移したものを $\mathcal{B}_s$ とする。それぞれの成り立ちから $\mathcal{B}_q \supset \mathcal{B}_s$ は明らかである。さて $X/\triangle$ は Mackey〔 ；定理7．2〕により metrically countably separated でないから（K，$\mathcal{B}_q$）も又そうである。従つて（K，$\mathcal{B}_s$）（ひいては $\rho(K)$ in $\hat{A}$）も metrically countably separated でないことになり求める結論が得られる。

尚 Lemma 3 における表現 $\pi\{d_i\}$ の kernel は $\{d_i\}$ のとり方に無関係に定まるという性質があり，これから又いくつかの重要な結果が導びかれる。

§3. Glimm 以後 — Effros の結果

G_n を H_n 上の unitary operator の group とし，これに strong topology を考える。$u \in G_n$，$\pi \in Rep_n(A)$ に対して

$$u(\pi) = u\pi u^*$$

とおくと（G_n，$Rep_n(A)$）は Topological transformation group となり $\hat{A}_n$ は G_n による $Rep_n(A)$ の factor space である。そして $\hat{A}_n$（実際は $\hat{A}_\infty$ のみ問題）が smooth になるかどうかという話は $Rep_n(A)$ とそれへの G_n の作用の仕方の問題であるということが出来る。そこで Glimm は〔29〕において smoothness の問題を separable locally compact transformation group（G，X）の問題に直し，前節とほぼ同様な結果を得たが，そこでの条件はあまりすつきりしたものではなかつた。

しかし E.G.Effros は〔29〕の結果が位相的なものよりもむしろ category theorem 的なものに根源をもつことを示すことによつてこれまでの結果に明決な背景を与えた。（〔8〕）

結果の主要部分は

(G, X)を polonais transformation group (G と X が polonais space) とすると次の結果は同値である。

(1) 各 orbit が，第二類の集合。

(2) X/G が T_0-space (X/G の quotient topology で)

(G, X)に更に次の条件をつけ加える。

(C) 単位元 $e \in G$の各近傍Nに対して e の近傍 M が存在して $\forall x \in X$: $\overline{Mx} \subseteq Nx$.

この時(1)，(2) は次のこととも同値である。

(3) X/G が (quotient Borel structure で) countably separated.

(4) X は non-trivial ergodic measure をもたない。

ここで (4)$\Longrightarrow$(2) は X/G が T_0 でなければ X 上に non-trivial ergodic measure が存在するという形で証明され，そこでの measure の構成が，Lemma 1 の system の構成に対応する部分であるが，後者よりはずつと議論は簡単である。(もつともこの部分の原型はやはり Glimm の〔 〕である。)

次に(G, X)に(c) よりもつと強い条件

(D) 単位元 $e \in G$の各近傍 N に対して次の性質をみたす C の近傍 M が存在する。

Q_m を点 $x \in X$ での decreasing な open set の basis とすると，

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \overline{MQ_m} \subseteq N_X .$$

を満たすものとすると今迄の結果は更に次のことと同値になる。

(5) X/G が standard。

(6) quotient map : $X \rightarrow X/G$ は Borel cross-section をもつ。

ここで C^*-algebra の時の transformation group (G_n, Rep_n (A)) は polonais で且つ条件 (D) をみたす (〔8〕) から上の結果は当然 $\hat{A}$ に適用出来るが，表現が I 型という概念は一応上の議論の外のものである。しかし Effros は次の結

果を示すことによつて両者の連関を導き合せて Glimm の定理の別証を得ている。

"μ を $Irr_{\infty}(A)$ 上の ergodic measure, $\zeta \to \pi(\zeta)$ を identity map とすると，μ による direct integral 表現 $\pi = \int_{Rep_{\infty}(A)} \pi(\zeta)\, d\mu$ が I 型であるための必要十分条件は μ が trivially ergodic であることである。"

Glimm の定理の (b) の部分が ergodic measure の議論のみで（Lemma 1 の複雑な構成をさけて）証明出来るかは現在まだ未解決である。

尚 $\hat{A}$ が smooth の時に $\hat{A}$ 上に measure に関係しない（global な）Borel cross-section が存在することは上の Effros の結果からもわかるわけであるが，C^*-algebra の時には Dixmier が先に証明している（〔5〕）。

文　献

〔1〕 J.Dixmier ; Sur les representations unitaires des groupes de Lie algebriques, Ann. Inst. Fourier, 7(1957), 315-328.

〔2〕 ________ ; Sur les representations unitaires des groupes de Lie nilpotents V, Bull. Soc. Math. France, 87(1959), 65-79.

〔3〕 ________ ; Sur les C^*-algebres, Bull. Soc. Math. France, 88(1960), 95-112.

〔4〕 ________ ; Sur les structures boreliennes du spectre d'une C^*-algebres, Publ. Inst. Hautes Etudes Sc., n°6 (1960) 227-303.

〔5〕 ________ ; Dual et quasi - dual d'une algebre de Banach involutive, Trans. Amer. Math. Soc., 104 (1962), 278-283.

[6] __________ ; Utilisation des facteurs hyperfinis dans la théorie des C^*-algèbres, C. R. Acad. Paris. Sci. 258 (1964), 4184.

[7] __________ ; Les C^*-algèbres et leurs représentations, Ganthier-Villars, Paris, 1964.

[8] E.G.Effros ; Transformation groups and C^*-algebras, Ann. Math., 81 (1965), 38-55.

[9] J. Ernest ; A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups, Trans. Amer. Math. Soc., 104 (1962), 252-277.

[10] J.M.G.Fell ; C^*-algebras with smooth dual, Illinois J. Math., 4 (1960), 221-230.

[11] __________ ; A new proof that nilpotent groups are CCR, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 237-268.

[12] J.Glimm ; On a certain class of operator algebras, Trans. Amer. Math Soc. 95 (1960), 318-340.

[13] __________ ; A Stone-Weierstrass theorem for C^*-algebras, Ann. Math., 72 (1960), 216-244.

[14] __________ ; Type I C^*-algebras, Ann. Math., 73 (1961), 572-612.

[15] A.Guichardet ; Sur les representations factoriel des C^*-algèbres, C. R. Acad. Sc., 252 (1961), 1088-1089.

[16] __________ ; Sur un probléme posé par G. W. Mackey. C. R. Acad. Sc., 250 (1960), 962-963.

[17] __________ ; Sur la décomposition des représentations des C^*-algèbres. C. R. Acad. Sc., 258(1964), 768-770.

[18] Harish-Chandra ; Representation of a semi-simple Lie group on a Banach space I, Trans. Amer. Math.

Soc., 75 (1953), 185-243.

〔19〕 I.Kaplansky ; The structure of certain operator algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 219-255.

〔20〕 ________ ; Group algebras in the large, Tôhoku Math. J., 3(1951), 249-256.

〔21〕 A.A.Kirillov ; Unitary representations of nilpotent Lie groups, Uspekhi Math. Nank 17 (1962), 57-110 (ロシヤ語).

〔22〕 G.W.Mackey ; Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc., 85 (1957), 134-165.

〔23〕 ________ ; The theory of group representations Ⅱ巻, mimeographed notes, Univ. Chicago, 1955.

〔24〕 F.J.Murray and J.von Neumann, On rings of operators Ⅳ. Ann Math., 44 (1943), 716-808.

〔25〕 J.von Neumann ; On rings of operators Ⅲ, Ann. Math., 41 (1940), 94-161.

〔26〕 M.Takesaki ; On some representations of C^*-algebras, Tôhoku Math. J., 15 (1963), 79-95.

〔27〕 ________ ; On the unitary equivalence among the components of decompositions of representation of involutive Banach algebras and the associated diagonal algebras. Tôhoku Math. J., 15 (1963), 363-393.

〔28〕 L.Pukánszky ; Some examples of factors, Publ. Math., 4 (1956), 135-156.

〔29〕 J.Glimm ; Locally compact transformation groups, Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 124-138.