

場の量子論への応用における二、三のトピック

京都大学 荒木 不二洋

§ 1. はじめに

前回にかなり一般的な話をしたので、今回はいくつかの、必ずしも互に関係のないトピックについて話をする。

まず前回問題を提起し予想を述べておいた作用素環束の構造に関して、I型因子の完備プール束については完全な答がわかったので結果だけを証明なしに§3で説明する。§2は無限直積の連続積への拡張の話で§3の準備となる。§4に完備でないプール束の場合についての短い議論を加えた。§5では話をかえて C^* 代数の自己同型写像による群の表現に関して、 C^* 代数のある状態の集合と群の中心の双対空間の関係についての予想を述べた。

このほか、とりあげるべき問題としては最近のボルヒヤースの仕事⁽¹⁾がある。これについて十分解説するにはかなりの時間が必要なのでここには書かないが、 C^* の表現という立場から場の理論をみたときに、与えられた表現空間から弱位相での極限として導かれる真空状態での表現と、もとの表現との関係を論じ、さらにその二つの表現を結ぶユニタリ変換を与えられた C^* 代数に canonical に附加してさらに大きな C^* 代数を作り、上記二つの表現およびそれから派生する表現を、拡大した C^* 代数の表現として見なおし、スピンと統計の関係についての議論をしたものである。結果が物理的におもしろいこと以外にその technique はいろいろの点で興味がある。

さらに Kastler⁽²⁾が自由場に附ずいた C^* 代数のいろいろな定義の可能性を検討しているが、いくつかの例題を与えるという意味で興味があるのではないかと思われるが、これについてもふれる時間がないと思うのでここには書かない。

§ 2. ヒルベルト空間の指数空間と連続積

有限個のヒルベルト空間 H_i , $i = 1 \dots n$ と、それぞれの上の作用素環 R_i が与えられたとき、それらのテンソル積 $\bigotimes_{i=1}^n H_i$, $\bigotimes_{i=1}^n R_i$ の定義はよく知られている⁽³⁾。また無限個の H_i および R_i があるときには、von Neumann⁽⁴⁾が完全および不完全無限直積 $\bigotimes_i H_i$, $\bigotimes_i^c H_i$ を定義しており、その上で

$$(2.1) \quad \otimes_i R_i = \left[\bigcup_i \{R_i \otimes (\bigotimes_{j \neq i} 1_j)\} \right]'$$

が定義される。

一方直和の場合には，離散的な直和の一般化として直積分 $\int^{\oplus} H_x d\mu(x)$ が考えられる。そこでテンソル積についても同様に連続積といったものが考えられないかということになる。

この節では，von Neumannの不完全無限直積に対応する連続積を考える。作用素環については $\otimes \mathcal{L}(H_i)$ のみを論ずる。ヒルベルト空間の有限テンソル積，不完全無限直積，および連続積は一括して特徴づけることができるが，それについては次節でのべる。

まずヒルベルト空間 L が与えられた時，その指数空間 e^L を次のようにして導入する。

補助定理 有限行列 (A_{ij}) が positive semidefinite ならば行列 $(e^{A_{ij}})$ も positive semidefinite である。特に $A_{k1} = A_{kk} = A_{11} (= A_{1k})$ のような組 $k, 1 (k \neq 1)$ がなければ， $(e^{A_{ij}})$ は positive definite である。

証明は略す。

今 $\Phi_i \in L, i = 1, \dots, n$ と複素数 c_1, \dots, c_n に対し

$$(2.2) \quad \Phi = \sum c_i e^{\Phi_i} \quad (\Phi_i : \text{distinct})$$

のような記号を導入し，内積

$$(2.3) \quad (\Phi, \Phi') = \sum_{ij} c_i * c'_j e^{(\Phi_i, \Phi'_j)_L}$$

を定義すると，上記補助定理によりこの内積は正定符号である。

(物理の慣用に従い (Φ, Φ') は Φ' について線型， Φ について反線型である。)ここに $(\ , \)_L$ は L での内積を表わす。

(2.2)の全体を内積(2.3)について完備化して得られるヒルベルト空間を L の指数空間と呼び， e^L と書くことにする。 $\Phi = 0$ に対応する e^L のベクトル e^0 は特に $\Phi_0(L)$ と書く。

今 $K \in \mathcal{L}(L), \Phi_a, \Phi_b \in L$ とする時， e^L の作用素 $T(\Phi_b, K, \Phi_a)$ を

$$(2.4) \quad T(\Phi_b, K, \Phi_a)(\sum c_i e^{\Phi_i}) = \sum c_i e^{(\Phi_a, \Phi_i)} e^{K\Phi_i + \Phi_b}$$

のように定義する。 $T(\Phi_b, K, \Phi_a)$ は一般には有界ではなく、

$$(2.5) \quad T(\Phi_b, K, \Phi_a)^* \supset T(\Phi_a, K^* \Phi_b)$$

が成立する。また

$$(2.6) \quad T(\Phi_b, K, \Phi_a) T(\Phi'_b, K', \Phi'_a) \\ = e^{(\Phi_a, \Phi'_b)} T(\Phi_b + K\Phi'_b, KK', \Phi'_a + K'^* \Phi_a)$$

である。

$T(\Phi_b, K, \Phi_a)$ が positive semidefinite であるのは、(2.5)より $K=K^* \Rightarrow K \geq 0$ $\Phi_a = \Phi_b$ のときであり、そのとき有界であるためには次の条件が必要十分である。(1) $\|K\| \leq 1$ (2) K の固有値 1 に属するスペクトル射影演算子を $E(1)$ と書くと $E(1)\Phi_a = 0$ (3) Φ_a は $(1-K)^{-1/2}$ の domain に入っている。この時 T のノルムは $\exp \| (1-K)^{-1/2} \Phi_a \|^2$ で与えられる。

$T(\Phi_b, K, \Phi_a)$ がエルミットでない場合は(2.5), (2.6)により $T(\Phi_b, K, \Phi_a)^* T(\Phi_b, K, \Phi_a)$ を計算して、それが上記条件を満たすかどうかで、 $T(\Phi_b, K, \Phi_a)$ が有界かどうか判定できる。

次に特に L が

$$(2.7) \quad L = \int L_\alpha d\mu(\alpha)$$

のようにヒルベルト空間 L_α の直積分の形に書き表わされているとする。測度 μ を

$$(2.8) \quad \mu = \mu_d + \mu_c$$

のように離散的な部分 $\mu_d (\mu_d(\Delta) = \sum_{x \in \Delta} \mu_d(\{x\}))$ と非離散的な部分 $\mu_c (\mu_c(\{x\}) = 0)$ にわけて

$$(2.9) \quad L_c = \int L_\alpha d\mu_c(\alpha)$$

とおくと

$$(2.10) \quad e^L = \left(\otimes_{\alpha} e^{\mu(\alpha)L_\alpha} \right) \otimes e^{L_c}$$

ただし $\mu(\alpha)L_\alpha$ は $\mu(\{x\}) = 0$ か $\neq 0$ に従い 0 または L_α 、また e^0 は 1 次

元空間と規約し,

$$(2.11) \quad \Phi = \int \Phi_x d\mu(x), \quad \Phi_c = \int \Phi_x d\mu_c(x)$$

ならば

$$(2.12) \quad e^\Phi = \left(\otimes_{\alpha} e^{\mu(\{\alpha\})\Phi\alpha} \right) \otimes e^{\Phi_c}$$

のように対応させる。ただし括弧の中は $\Phi_0(L_\alpha)$ を基準にした (すなわち $\otimes_{\alpha} \Phi_0(L_\alpha)$ を含む) 不完全無限直積である。

e^L は L が 0 のみからなる trivial な場合を除いて無限次元であるから, 有限次元の H_i を含んだ無限直積は指数空間の形に書けない。そのような場合も含んだテンソル積の一般的な特徴づけは次節で説明する。ここでは e^{L_c} が不完全無限直積の連続な場合への極限である点を説明する。

今 α の空間を S とし, S を互いに disjoint な可測部分集合 S_i に分割し, μ の S_i への restriction を μ_i と書き, $L_i = \int_{S_i} L_\alpha d\mu_i(\alpha)$ とおくと,

$$(2.13) \quad L = \sum_i^{\oplus} L_i$$

であるから, (2.12) により

$$(2.14) \quad e^L = \otimes_i e^{L_i}$$

となる。 S_i への分割をいくらでも細かくして考えられるので, その極限として連続積の概念を導入する。

(S, \mathcal{B}, μ) を測度空間とし, μ は非離散的とする。各 $x \in S$ に対してヒルベルト空間 \mathcal{H}_x および \mathcal{H}_x の特定の単位ベクトル $\Phi_0(x)$ が与えられていて, $\dim \mathcal{H}_x$ は x の可測関数とする。また \mathcal{H}_x の部分空間 $L_x = \Phi_0(x)^\perp$ に完全正規直交系 $e\mu(x)$ が与えられているものとし, これを基準にした直積分空間を $L = \int^{\oplus} L_x d\mu(x)$ とする。このとき, e^L をヒルベルト空間の族 \mathcal{H}_x , $x \in S$ の, 基準ベクトル族 $\Phi_0(x)$ (および基準基底族 $e\mu(x)$) についての連続積と呼び

$$(2.15) \quad e^L = \otimes_x^{d\mu(x)} \mathcal{H}_x \quad (\text{w. r. t. } \otimes_x \Phi_0(x))$$

と書くことにする。また

$$(2.16) \quad \Phi = \int \Phi(x) d\mu(x) \in L \quad (\Phi(x) \in L_x)$$

のとき

$$(2.17) \quad e^\Phi = \otimes_x (\Phi_0(x) + \Phi(x) d\mu(x))^{1/2}$$

のように書くことにする。(もう少し一般に

$$(2.18) \quad \otimes_x (\Phi_0(x) + \Phi(x) d\mu(x))^{1/2} + c(x) \Phi_0(x) d\mu(x) \\ = e^{\int c(x) d\mu(x)} e^\Phi$$

を導入してもよい。この式から $\Phi(x)$ を $\Phi_0(x)$ に直交するものに限った理由が明らかであろう。)

また演算子に関しては、 \mathcal{H}_x の上の演算子 Q_x を $L(x)$ から $L(x)$ へ写像する部分 $K(Q)$, $L(x)^\perp$ から $L(x)$ へ写す部分 $\Phi_b(Q_x)$ ($c\Phi_0(x) \rightarrow c\Phi_b(Q)_x$ のように $L(x)$ のベクトル $\Phi_b(Q_x)$ で表わされる), $L(x)$ から $L(x)^\perp$ へ写す部分 $\Phi_a(Q_x)$ ($\Phi \in L(x) \rightarrow (\Phi_a(Q_x), \Phi)\Phi_0(x)$ のように $L(x)$ のベクトル $\Phi_a(Q_x)$ で表わされる), および $L(x)^\perp$ から $L(x)^\perp$ へ移す部分 $c(Q_x)$ ($k\Phi_0(x) \rightarrow kc(Q_x)\Phi_0(x)$ のように数 $c(Q_x)$ で表わされる) に分けて考え,

$$L = \int^\oplus L(x) d\mu(x) \text{ で}$$

$$K = \int^\oplus K(x) d\mu(x) \quad K(Q_x) = K_x$$

$$\Phi_b = \int^\oplus \Phi_b(x) d\mu(x) \quad \Phi_b(Q_x) = \Phi_b(x) d\mu(x)^{1/2}$$

$$\Phi_a = \int^\oplus \Phi_a(x) d\mu(x) \quad \Phi_a(Q_x) = \Phi_a(x) d\mu(x)^{1/2}$$

$$c = \int^\oplus c(x) d\mu(x) \quad c(Q_x) = c(x) d\mu(x)$$

と書いた時

$$e^c T(\Phi_b, K, \Phi_a) = \otimes_x (1 + Q_x)$$

のような記号を使うのが適当である。

実はこのような記号あるいは考え方の効用は、次節でのべる定理の証明に際して、(2.14)

のような分解を行なつて分割を細かくして考えるという形で発揮される。これについては長くなるので省略するが、一応上の記号から連続積という名前が的はずれてないことはわかると思う。

物理では L が一粒子の空間に相当し、 e^L は Fock 空間である。(5) (従つて e^L を L の対称テンソル代数の形に書くこともできる。)

$\otimes_x \Phi_0(x) \equiv \Phi_0(L)$ はその真空状態で、生成演算子 a^* 、消滅演算子 a を使うと

$$e^\Phi = e^{(a^*\Phi)} \Phi_0(L)$$

$$T(\Phi_b, K, \Phi_a) = e^{(a^*\Phi_b)} e^{(a^*[\log K]a)} e^{(\Phi_a a)}$$

である。

e^L の中で e^Φ の形のベクトルおよび $T(\Phi_b, K, \Phi_a)$ の形の演算子の特徴づけも次節でのべる。

§ 3. I 型因子の完備ブール束

τ を完備ブール束として各 $\alpha \in \tau$ にあるヒルベルト空間 \mathcal{H}_α の I 型因子 $R(\alpha)$ が対応して

$$(3.1a) \quad R(\bigvee_k \alpha_k) = (\bigcup_k R(\alpha_k))'$$

$$(3.1b) \quad R(\bigwedge_k \alpha_k) = (\bigcap_k R(\alpha_k))$$

$$(3.1c) \quad R(\alpha') = R(\alpha)'$$

$$(3.1d) \quad R(1) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_\tau)$$

$$(3.1e) \quad R(0) = \{ \lambda 1 \}$$

とする。 $R(\alpha)$ 全体を $R(\tau)$ と書き、 τ の \mathcal{H}_τ 上 I 型因子による表現または単に I 型因子の完備ブール束と呼ぶ。

τ の原子で生成される完備ブール束を τ_d 、 τ_d の単位元の τ での補元に含まれる τ の元全体の作る完備ブール束を τ_c とすると τ は τ_d と τ_c の直積で τ_c は原子を含まない。 τ_d を τ の原子的部分、 τ_c を τ の連続部分と呼ぶことにする。

原子的な τ ($\tau = \tau_d$) について $R(\tau)$ の例は von Neumann の不完全無限直積を

使つて次のように作られる。 τ の原子の全体を τ_0 とし、各 $i \in \tau_0$ に対応してヒルベルト空間（有限次元でもよい） H_i を考え、 H_i の単位ベクトル Φ_i を任意に一つきめて $\otimes \Phi_i$ を含む不完全無限直積（ τ_0 が有限なら有限テンソル積）

$$(3.2) \quad \mathcal{H}_\tau = \otimes H_i$$

を考える。

$$(3.3) \quad R(i) = \mathcal{L}(H_i) \otimes \left\{ \otimes_{j \neq i} 1_j \right\}$$

$$(3.4) \quad R(\alpha) = \left(\bigcup_{i \in \tau_0, i \leq \alpha} R(i) \right)''$$

と定義すれば、 $R(\alpha)$ は τ の表現になる。

次に連続的な τ ($\tau = \tau_c$) についての $R(\tau)$ の例は、前節の連続積を利用して次のように作ることができる。まずあるヒルベルト空間 L の射影演算子による τ の表現 $\alpha \in \tau \rightarrow P(\alpha)$ が与えられているとする。

$$(3.5a) \quad [P(\alpha), P(\beta)] = 0$$

$$(3.5b) \quad P(\bigwedge \alpha_k) = \prod P(\alpha_k)$$

$$(3.5c) \quad P(\alpha') = 1 - P(\alpha)$$

$$(3.5d) \quad P(0) = 0, \quad P(1) = 1$$

このような P は、例えば測度空間 (S, \mathcal{B}, μ) が与えられており、 $\mu_d = 0$ で

$$(3.6) \quad L = \int_S L_x \, d\mu(x)$$

のような場合、各 $\Delta \in \mathcal{B}$ に対して部分空間

$$(3.7) \quad L(\Delta) = \int_{\Delta} L_x \, d\mu(x)$$

に属する射影演算子 $P(\Delta)$ 全体を考えれば得られる。（ τ としては $P(\Delta)$ 全体の作る束を取ればよい。） 逆に L が separable ならば、 $P(\alpha)$ の生成する可換作用素環のスペクトル分解を考えることにより、 $P(\alpha)$ はこのような $P(\Delta)$ として得られる。

L が可分であるかどうかにかかわらず、上のような $P(\alpha)$ が与えられていると、

$$(3.8) \quad L = P(\alpha)L \oplus P(\alpha')L$$

に対応して

$$(3.9) \quad e^L = e^{P(\alpha)L} \otimes e^{P(\alpha')L}$$

と分解できるので、この分解を使つて

$$(3.10) \quad R(\alpha) = \mathcal{L}(e^{P(\alpha)L}) \otimes 1$$

と定義すると $R(\alpha)$ が τ の I 型因子による表現であることが簡単に示される。この表現 R を e^P と書くことにする。

この節の主定理はこの逆である。

定理 完備ブール束 τ のヒルベルト空間 \mathcal{H}_τ 上 I 型因子による表現 $R(\tau)$ が与えられた時、常に別のヒルベルト空間 L ($\log \mathcal{H}_\tau$ とも書く) と L 上射影演算子による τ の表現 $P(\tau)$ および τ の各原子 i に対応してヒルベルト空間 \mathcal{H}_i が存在して

$$(3.11) \quad \mathcal{H}_\tau = \left\{ \bigotimes_i \mathcal{H}_i \right\} \otimes e^L$$

となり、 $\alpha \in \tau$ が

$$(3.12) \quad \alpha = \alpha_d \vee \alpha_c, \quad \alpha_c \in \tau_c, \quad \alpha_d = \bigvee_{i \in I} i \quad (i \in \tau_d)$$

に対応する $R(\alpha)$ は

$$(3.13) \quad R(\alpha) = \left\{ \bigotimes_i R_i \right\} \otimes e^P(\alpha)$$

のように表わせる。 \mathcal{H}_i の次元は $R(i) = \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$ で与えられ、 L と $P(\tau)$ はユニタリ同値の範囲で R により一意的に定まる。

定理 完備ブール束 τ の \mathcal{H}_1 上の I 型因子による表現 R_1 と \mathcal{H}_2 上の表現 R_2 がユニタリ同値である為の必要十分条件は、 τ の各原子 i に対し $R_1(i)$ と $R_2(i)$ が同型で、 R_1, R_2 に対応する L と $P(\tau)$ が互いにユニタリ同値であることである。

特に \mathcal{H}_τ が可分ならば L も可分で最後の条件は $P(\tau)$ の生成する可換作用素環のスペクトル測度の同値類と多重度関数のスペクトル測度についての同値類で判定される。

この主定理の証明の副産物として次の定理も得られる。

定義 τ の \mathcal{H}_τ 上の表現 R が与えられたとき, τ の有限個の元 $\alpha_1 \dots \alpha_n$ で

$$(3.14a) \quad \alpha_i \wedge \alpha_j = 0 \quad \text{for } i \neq j$$

$$(3.14b) \quad \bigvee_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

をみたす任意の組と, 任意の $Q_i \in R(\alpha_i)$ に対して

$$(3.15) \quad \|\Phi\|^{n-1} (\Phi, Q_1 \dots Q_n \Phi) = \prod_{i=1}^n (\Phi Q_i \Phi)$$

をみたす \mathcal{H}_τ のベクトル Φ を $R(\tau)$ に関する積ベクトルと呼ぶ。また \mathcal{H}_τ 上の作用素 Q で, (3.14) をみたす任意の $\alpha_1 \dots \alpha_n$ に対して

$$Q = Q_1 \dots Q_n, \quad Q_i \in R(\alpha_i)$$

と書けるとき, Q を $R(\tau)$ に関する積演算子という。

定理 Φ が $R(\tau)$ に関する積ベクトルであるためには, \mathcal{H}_τ を (3.11) の形に書いたとき

$$\Phi = c(\otimes \Phi_i) \otimes e^\Phi$$

の形に書けることが必要十分である。また Q が $R(\tau)$ に関する積演算子であるためには

$$Q = (\otimes Q_i) \otimes T(\Phi_b, K, \Phi_a)$$

で K が $P(\tau)$ の commutant に属することが必要十分である。($T(\Phi_b, K, \Phi_a)$ が有界である条件はすでにのべた。) $R(\tau)$ に関する積ベクトルは \mathcal{H}_τ で total, また積演算子全体 ($K = 1$ のものに限つてもよい) は既約である。

上記 Q で Φ_b, Φ_a, K 等に制限をつけて, そのような Q で生成される作用素環を考えると, 一般に I 型以外のものが得られる。 $K = 1$ の場合は Ref. 3 で取扱われているものになる。いずれにしても離散的な場合の $\otimes_i R_i$ に対応している。

§ 4. I 型因子の不完備ブール束

τ を完備ブール束とし, 各 $\alpha \in \tau$ に対応して \mathcal{H}_τ 上の因子 $R(\alpha)$ が定まり (3.1)

をみたすとき， $R(\alpha)$ 全体を τ の f_y 上因子による表現とよぶ。一般の $R(\tau)$ についてはほとんど何もわかっていないが，興味がある一つの場合は， $R(\tau)$ が I 型因子の不完備ブール束の表現から得られる場合である。 σ を τ の部分ブール束とし任意の $\alpha \in \tau$ は

$$\alpha = \bigvee_{\beta \in \sigma, \beta \leq \alpha} \beta$$

のように表わされるものとし， $\alpha \in \sigma$ については $R(\alpha)$ が I 型因子であるとき $R(\sigma)$ は不完備ブール束 σ の I 型因子による表現とよぶ。 σ と各 $\alpha \in \sigma$ に対し I 型因子 $R(\alpha)$ が与えられていて，(3.1)をみたしていれば， σ を完備化したものを τ とし， $\alpha \in \tau$ に対して $R(\alpha)$ を (3.1 a) により定義すれば， τ の一般の因子による表現 $R(\tau)$ が得られる。ただし最初与えられた $R(\alpha)$ については， $\bigvee_k \alpha_k, \bigwedge_k \alpha_k$ が σ の中に存在するものに限り (3.1 a), (3.1 b) を要請する。

このような I 型因子による不完備ブール束の表現に関して，次の定理はユニタリ不変量を与える。(もちろんこれだけでは分類に不十分である。)

定義 $R_1 \cdots R_n$ を $i \neq j$ なら $R_i \wedge R_j = \{\lambda 1\}$ ， $R_i \subset R_j'$ であるような I 型因子とする。各 R_i から極小射影演算子 P_i を任意にえらんで作った。

$$(\Phi, P_1 \cdots P_n \Phi)$$

の $P_1 \cdots P_n$ をいろいろ変えた時の \sup を

$$d(\Phi; R_1 \cdots R_n)$$

と書く。

定理 $R(\sigma)$ を I 型因子による不完備ブール束 σ の表現とする。今 α_{ki} ， $i=1 \cdots n_k$ ， $k=1, 2, \dots$ を $(k, i) \neq (1, j)$ なら $\alpha_{ki} \wedge \alpha_{1j} = 0$ のような可附番個の σ の元とし，

$$d_k(\Phi) = d(\Phi; R_{k1} \cdots R_{kn_k})$$

とおく。 $k \rightarrow \infty$ での $d_k(\Phi)$ の集積点の集合(すなわち $\bigcap_N \overline{\bigcup_{k \geq N} d_k(\Phi)}$)は Φ に無関係で，表現 $R(\sigma)$ のユニタリ不変量を与える。

I 型因子の不完備ブール束を完備化したとき得られるような因子を constructible ⁽⁶⁾ と呼ぶと，constructible な因子の型を決定するには上記のユニタリ不変量が有用で

ある。(6)(7)

これに関連して少し興味のある問題は二つの I 型因子の共通部分としてどのようなものが可能か、あるいは二つの I 型因子があるときユニタリ不変量で分類する問題がある。これに関連して I 型因子の共通部分が因子であるときそれは constructible かということも興味がある。

なお § 2, § 3 で述べたようなことを $R(\alpha)$ が因子でない場合に調べるのも興味がある。物理ではフェルミ粒子の Fock 空間とか荷電粒子の Fock 空間とかで物理量の生成する作用素環を考えると非相対論の場合そのような例ができる。

また I 型因子による不完備ブール束 σ の表現の例は、 σ として 3 次元ユークリッド空間の有界可測集合およびその補集合の作るブール束を考え、統計力学的状態での物理量の作る作用素環を考えると得られる。したがってその構造の数学的解析が大層望ましい。

以上に述べた諸定理の証明は近く発表の予定である。

§ 5. C^* 代数の自己同型写像による群の表現

前回に説明したような C^* 代数を使つた物理の formulation では当然 C^* 代数の自己同型写像によるリー群の表現が問題になる。これに関連して物理に表われる現象から予想される命題を一つ説明する。この命題は下に述べる形では必ずしも正しくないかもしれないが、大体そのようなことが成立してほしいという程度のものである。

C を可分単純 C^* 代数、 $Q \in C \rightarrow Q^{\lambda(t)} \in C$ を一実変数 t を持つ C の自己同型写像 $\lambda(t)$ の作る群 (すなわち $\lambda(t_1) \lambda(t_2) = \lambda(t_1 + t_2)$) とし、 $t \rightarrow Q^{\lambda(t)}$ は C のノルムについて連続であるとする。今 t の L_1 関数 f に対し

$$Q(f) = \int Q^{\lambda(t)} f(t) dt$$

と定義すると、 $Q(f) \in C$ で $Q(f)$ は f の L_1 ノルムと $Q(f)$ の C でのノルムについて連続である。

次に f のフーリエ変換

$$\tilde{f}(E) = \int e^{iEt} f(t) dt$$

を考え、実軸上の集合 Δ に対し \tilde{f} の support が Δ に入るような f に対応する $Q(f)$ 全体で生成される左イデアルを $L(\Delta)$ と書き、特に $\Delta = (-\infty, 0)$ のとき

$L(\Delta)$ が極大左イデアルであるとする。

さらに必要ならば

$$(5.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|[Q_1, Q_2^{\lambda(t)}]\| = 0$$

を仮定しても多分よい。

そこですべての t に対し $\lambda(t)$ と可換な C の自己同型写像の全体の作る群を考え、それがあるリー群 G の連続、忠実な表現であるとする。

$$g \in G \Rightarrow \lambda(g) : Q \rightarrow Q^{\lambda(g)}$$

G はもとの t の作る one parameter subgroup (T_0 と呼ぶことにする) を含む。

また C の上の因子状態 (C^{*+} の元で、附ずいた C の巡回表現が因子であるもの) の全体 S_{eq} を考える。(S は state, eq は equilibrium の略) S_{eq} のうち $\lambda(G)$ で互いに移り合うものを同値と考え、そのようにして得られた同値類の全体を S_{eq} とする。

予想される定理は G の中心 G_Z の双対空間 G_Z^* の中に \widehat{S}_{eq} が canonical に imbed できるはずだということである。この場合 \widehat{S}_{eq} には C についての弱位相を入れる。物理の場合 G_Z, G_Z^* は R^n に同型で、 \widehat{S}_{eq} の次元も G_Z, G_Z^* と同じだが、上の imbedding で G^* 全部はおおわないと考えられる。

この予想は化学反応論の相定理と呼ばれるものの描象化であるが unnecessary 条件を書いたかも知れないし、また上の条件が不十分かもしれない。

ここに述べたのは応用の可能性のある状況の一例であるが、とにかく C^* 代数の自己同型によるリー群の連続表現の解析がのぞまれる。

なお上述の C の性質のうち $\Delta = (-\infty, 0)$ に対応する $L(\Delta)$ が極大であるという性質 (物理的には真空の一意性) は、質量 0 の粒子 (あるいは exciton) が不在の場合には成立すると予想されている (Goldstone の定理といわれる) が、その厳密な formulation や証明はわかっていない。一方質量 0 の粒子がある場合には、 $L(\Delta)$ が極大でない例を簡単に作ることができる。例えば自由粒子の真空と、そこへ質量 0 の自由粒子がボーズ凝縮をした状態とは、粒子の密度が違うので異なる状態を与えるが、エネルギー密度はまったく同じで、両者とも上記 $L(\Delta)$ を kernel ($\varphi(Q, Q_1) = 0$ for

all $Q \in C$ のような Q_i の全体) に含むので, $L(\Delta)$, は極大であり得ない。この場合でも \widehat{S}_{eq} の同値類のうち $L(\Delta)$ を kernel に含むものは一つしかわかつていないので, 一意的ではないかと予想される。そこで, \widehat{S}_{eq} の同値類の中で $L(\Delta)$ を kernel に含むものは一意的かという問題も興味がある。このような問題にはいわゆる局所性の条件を C に課することが重要であろう。その具体的な形は (5.1) のような性質を $\lambda(t) \in G_Z$ に対し要求するのである。これに関する話は別の機会に述べたい。

References

- (1) H. J. Borchers, Commun. Math. Phys. 1 (1965), 57-79.
および "Local Rings and the Connection of Spin with Statistics" (preprint)
- (2) D. Kastler, Commun. Math. Phys. 1 (1965), 14-48.
- (3) 例えば J. Dixmier, Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien, p.26-30.
- (4) J. von Neumann, Compos. Math. 6 (1938), 1-77.
- (5) H. Araki, J. Math. Phys. 4 (1963), 1343-1362.
- (6) D. J. C. Bures, Compos. Math. 15 (1963), 169-191.
なお最近 Berkeley の Calvin Moore が I 型の R_i から作った $\otimes R_i$ の型 (I, II, III 等) をすべての場合について決定する条件を与えたといううわさである。
- (7) H. Araki, Progr. Theoret. Phys. 32 (1964), 956-965.