数理解析研究所講究録
第 10 巻 1966 年 1-14

双曲型偏微分方程式の数値解法の理論について

京 大 工　　山　口　昌　哉

1. 双 曲 型　Well posedness.

ある瞬間 t_0 における状態 $u(x, t_0)$ が既知であるとき，その系を支配する微分法則にしたがって t_0 以後の t における状態 $u(x, t)$ を定めることを初期値問題を解くという。ここではその微分法則が次の一階連立微分方程式系であたえられる場合を考えよう。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} \quad . \tag{1}$$

A，Bは $\ell\times\ell$ の行列，uは ℓ 次元ベクトルである。現在の計算機の能力では空間次元は高々 3 次元までであるからここでは空間 2 次元とした。例えば圧縮性流体の方程式は，

$$\begin{cases} \rho_t = -m_x - n_y \\ m_t = -\left(p + \dfrac{m^2}{\rho}\right)_x - \left(\dfrac{mn}{\rho}\right)_y \\ n_t = -\left(\dfrac{nm}{\rho}\right)_x - \left(p + \dfrac{n^2}{\rho}\right)_y \\ E_t = -\left[\dfrac{m}{\rho}(p+E)\right]_x - \left[\dfrac{n}{\rho}(p+E)\right]_y \end{cases}$$

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ m \\ n \\ E \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} m = \rho u \\ \\ n = \rho v \end{matrix} \qquad \text{とかくと}$$

方程式は　$w_t = f(w)_x + g(w)_y$ とかける。ここで $f(w)$ ・ $g(w)$ は次の形である。

$$f(w)=\begin{pmatrix} -m \\ -\frac{(\gamma-3)}{2}\frac{m^2}{\rho}-(\gamma-1)E+\frac{(\gamma-1)}{2}\frac{n^2}{\rho} \\ -mn \\ -\gamma\frac{Em}{\rho}-\frac{(\gamma-1)}{2}\ \frac{m^3+n^2m}{2} \end{pmatrix},\quad g(w)=\begin{pmatrix} -n \\ -\frac{nm}{\rho} \\ -\frac{(\gamma-3)}{2}\frac{n^2}{\rho}-(\gamma-1)E+\frac{(\gamma-1)}{2}\frac{n^2}{\rho} \\ -\gamma\frac{En}{\rho}-\frac{(\gamma-1)}{2}\ \frac{n^3+nm^2}{2} \end{pmatrix}$$

$A(w)=\dfrac{\partial f}{\partial w}$ ， $B(w)=\dfrac{\partial g}{\partial w}$ とおくと $A(w)$ の固有値は $u+c$，u，$u-c$，$B(w)$ の固有値は $v+c$，v，$v-c$ であることはよく知られている。

そこでこのような初期値問題について数学はどのような結果を得ているかを述べてみよう。先ずA，Bが定数行列である場合を考えると，１９３０年代から１９６０年までのPetrowsky，Friedrichs，Gårding，Leray，Mizohata，Kreiss，Kasahara-Yamaguti 等の結果を要約すれば次のようになる。今ξ，ηを実数として．$A\xi+B\eta$ なる行列を考え，$A(\xi,\eta)=A\xi+B\eta$ とかくと，各ξ，ηに対し，正値行列 $N(\xi,\eta)$ が存在して，

(i)　$N(\xi,\eta)A(\xi,\eta)$　は対称

(ii)　$N_1<|N(\xi,\eta)|<N_2$　　N_1，N_2 は正の定数

この(i)(ii) が満足されるとき，xy平面での２乗可積分な初期値に対して解が存在し，次のエネルギー不等式が成立する。

$$\|u(t)\|\leq c\,\|u(0)\|\quad,\ (0\leq t\leq T)\ . \tag{2}$$

ただし，ノルムはxy平面での２乗積分のノルムをとった。u(t) は u(x，y，t) を省略して書いたものである。(2) が成立するときの系(1) は L^2 の意味でWell posed とよぶ。
逆に(i)(ii) はWell posed (L^2) であるための必要条件でもある。そこで(i)(ii) をみたすような系(1) を"双曲型"の系とよび，A，Bがuに依るような非線形の場合にも，A(u)，B(u) が形式的に(i)(ii) をみたすような上の例のような場合に双曲型非線型の系とよぶ。実際に出てくる典型的な場合は次の二つである。

α)　A，Bが共に対称行列の場合（対称双曲系）．

β) $A\xi + B\eta$ が $|\xi|^2 + |\eta|^2 = 1$ の上で相異なる実の根をもつ場合（正則双曲系）。
そこでA，Bがuに依るような場合，解の存在や一意性はどうなっているか。研究は次のような

$$A(u) = \frac{\partial f}{\partial u} \quad , \quad B(u) = \frac{\partial g}{\partial u}$$

なるごときf及びgの存在するConservation form について，いくつか行われている。いづれも初期値問題についてである。先ず$\ell=1$（つまりuがスカラーのとき） Olejnik が適当な制限条件のもとで解の存在と一意性を示している。（1956年） 空間二次元以上では Conway と Smoller が解の存在を（1965年），更にℓが任意で先のβに対応する type の保存系に対しては，P.D. Lax が特別な初期値に対する解の一意的存在を，(1957年）に，又，少し一般だが矢張り常数からわずかにずれた有界変動な初期値に対して同じ系について J．Glimm が（1966年）解の存在を示している。

以上が非線型双曲型方程式に関する数学的研究のほとんど全部であって他の多くの性質は証明されていない。勿論ここで述べたのは，大局的弱解に関する結果であって，局所的な解については多くの論文がある。このような貧しい数学の結果にも拘らず，応用数学としては上のような方程式系に対して数多くの数値解が試みられている。しかもその多くは単なる初期値問題ではなしに初期値境界値の混合問題である。逆に数値解に用いられた差分法が Olejnik の証明のような存在定理の証明に有効である場合がある。したがって数学的な結果を進めるにあたっても差分法の研究は欠くことが出来ない。勿論実際の数値解法で出合う発散の問題を理由づけ，発散しない有用な差分法（Scheme） を設計するためにも差分法の理論は必要と思う。

2. 差　分　法

系(1)において，A，Bが定数であってしかも双曲型である場合を考えよう。記述を簡単にするために，空間一次元（B＝0の場合）にしておこう。今時間軸tを0からTまでΔtの幅で分割する。tにおける状態 $u(t)$ から次のような操作によって$t+\Delta t$ の状態 $u(t+\Delta t)$ を定める事を考える。

$$u(t+\Delta t) = S_\Delta u(t) \qquad 0 \leq n\Delta t \leq T \tag{8}$$

但し S_Δ は空間的平行移動 T_j の一次結合であって次のようにあらわされているものとする。

$$S_\Delta = \sum_j C_j T_j \qquad C_j: \text{常数行列}, \tag{4}$$

$$T_j u(x, t) = u(x + j\Delta x, t) \qquad j \text{ 整数},$$

Scheme（差分法）というのは(3)のような操作を，$0 \leq n\Delta t \leq T$ として $\Delta t \to 0$，$\Delta x \to 0$ とした時，操作の列 $\{S_\Delta\}$ の事を指してよぶ。(3)の一つ一つは差分方程式（Δx，Δt 固定）である。例えば最も簡単な双曲型微分方程式

$$u_t + a u_x = 0 \qquad (u, a \text{スカラー})$$

の u_t を $\dfrac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$ で，

u_x を $\dfrac{u(x+\Delta x, t) - u(x-\Delta x, t)}{2\Delta x}$

でおきかえ次のような差分方程式をつくる。

$$\frac{u(x, t+\Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} = a\frac{u(x+\Delta x, t) - u(x-\Delta x, t)}{2\Delta x}$$

これを $\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \lambda$ とおき（今後常にこうする）

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \frac{\lambda a}{2}(T_{+1} - T_{-1})\, u(t)$$

$$= \left(T_0 + \frac{\lambda a}{2} T_{+1} - \frac{\lambda a}{2} T_{-1}\right) u(t)$$

とかけば，これは(3)の形である。このように(3)であたえられるScheme は実際には(1)の 微分方程式を $[t, t+\Delta t]$ の区間では代用するものとしてあらわれる。そこで我々は(3)で あたえられたScheme に次の2つの事柄をつけ加えて考察しなければ微分方程式と関連がつけられない；

(i) 正確度： tから $t+\Delta t$ でのone step において(3)はどれだけの打切り誤差でもって(1)の微分方程式系を近似しているか？

(ii) 安定性： 0からTまで上の差分法をn回適用するとして $\Delta t \to 0$ となったScheme の全部を考えても打切り誤差の累積は有界にとどまってくれるであろうか？

3. 正確度と安定性

正確度と安定性のはっきりした定義をあたえておこう。

正確度： 双曲型の系(1)に対して差分法(3)が正確度mであると云うのは(1)のExact smooth sol. が任意のu(t)(L^2)を初期値として〔t ,t+Δt〕の区間で差分法(3)を $O(\Delta t^{m+1})$ の誤差で満足することである。つまり次の式が成立することである。（ノルムは前のように2乗ノルム）

$$\| u(t+\Delta t) - S_\Delta u(t) \| \leq O(\Delta t^{m+1}) , \tag{5}$$

$$0 \leq t \leq (n-1)\Delta t .$$

安定性： S_Δをn回施した結果を S_Δ^n とかいて次の不等式が任意の初期値 u(0)(L^2)に対して成立するとき安定であるという。

$$\| S_\Delta^n u(0) \| \leq C \| u(0) \| , \qquad 0 \leq n\Delta t \leq T , \tag{6}$$

注　意．安定性は，$0 \leq t \leq T$ における差分法それ自身に対する条件であり，正確度は，（t, t+Δt）における微分方程式と差分方程式との関係であるけれども，それぞれ実際的な意味をもっていると思われる。先ず実際には Δt はあくまでも有限であって $\Delta t \to 0$ とはしないのであるから，Δt，Δx 有限のあらさでどのくらい正確なデータがでるかの問題があり正確なもの程よい。又安定性は，Δt，Δxを有限ではあっても，今実際に数値計算をある大きさの Δt，Δx でやって発散したとすると，どうしてもΔt，Δx をもっと小さくしてやって見ようとする欲望が生まれるものと思われる。したがって理論としては Δt，Δx が小にされた全体について考察しておくべきものだと考えられる。実際，P.D. Lax によって，もし(3)が正確度$m \geq 1$で(1)を近似ししかも安定ならば，差分法の解 $u_\Delta(t)$ は $\Delta t \to 0$ のとき確かに同じ初期値の(1)のExact Solutionに収束する事が証明されている。収束は L^2 の意味である。

具体的にあたえられたScheme（定数係数）について上の二つの事柄をしらべるためには，次の2通りのフーリエ変換が有効である。

x空間における u(x,t) のノルムを普通の2乗積分のノルムにとったときは，フーリエ変換は普通のフーリエ変換

$$\tilde{u}(\xi) = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int u(x)\, e^{-ix\xi} dx .$$

この場合空間上 mesh point 以外では $u(x)$ の値は適当に interpolate されているものとする。一方ノルムを discrete にとって空間上の mesh point $j\Delta x$ の上だけと考えたときは

$$\| u \|^2 = \sum_k | u(k\Delta x) |^2$$

と考えて，そのときは Discrete フーリエ変換

$$\hat{u}(\xi) = \sum_j u(j\Delta x)\, e^{-ij\xi}$$

とする。（この場合 Δx は固定して考えているのであって） 第2のフーリエ変換での ξ は上のフーリエ変換での $\Delta x \xi$ に対応する。そこで Scheme(3) のフーリエ変換を計算すると

$$\begin{aligned}
\widetilde{S_\Delta u} &= (\sqrt{2\pi})^{-n} \int S_\Delta u(x)\, e^{-ix\xi}\, dx \\
&= (\sqrt{2\pi})^{-n} \int \sum C_j T_j u(x)\, e^{-ix\xi}\, dx \\
&= \sum_j C_j e^{ij\Delta x\xi}\, \tilde{u}(\xi)
\end{aligned}$$

そこで

$$C(\Delta x\xi) = \sum_j C_j e^{ij\Delta x\xi}$$

とおくと discrete Fourier の ξ を用いて

$$C(\xi) = \sum_j C_j e^{ij\xi} \qquad |\xi| \leq \pi \tag{7}$$

とかける。$C(\xi)$ を Amplification factor とよぶ。これをもちいると，条件(5)(6)をそれぞれフーリエ変換して，$\lambda = \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ とおいて

正確度は

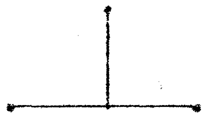
$$| e^{i\lambda A(\xi)} - C(\xi) | \leq c\, |\xi|^{m+1} \qquad |\xi| \text{ 小}, \tag{8}$$

安定性は

$$| C(\xi)^n | \leq B \qquad 0 \leq |\xi| \leq \pi, \tag{9}$$

となる。但しBはnに無関係な定数である。そこで例としてよく使用されるScheme の正確度と安定性を前述の最も簡単なスカラーの方程式について述べておこう。

A) 前述のSchemeである。



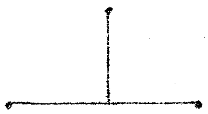
$$S_\Delta = 1 \cdot T_0 + \frac{\lambda a}{2}(T_{+1} - T_{-1}),$$

$$C(\xi) = 1 + i\lambda a \sin\xi, \qquad \text{正確度 } 1$$

$$|C(\xi)| = (1 + \lambda^2 a^2 \sin^2\xi)^{\frac{1}{2}}.$$

したがってたとえば $\xi = \frac{\pi}{2}$ のとき(9)が破れ不安定。

B) Friedrichs の Positive Scheme.



u_t を $\left[u(x, t+\Delta t) - \frac{u(x+\Delta x, t) + u(x-\Delta x, t)}{2}\right] / \Delta t$

u_x を $\left[u(x+\Delta x, t) - u(x-\Delta x; t)\right] / 2\Delta x$

でおきかえたもの. 前の例のごとくすると,

$$S_\Delta = \frac{1+\lambda a}{2} T_{+1} + \frac{1-\lambda a}{2} T_{-1}$$

$$C(\xi) = \cos\xi + i\lambda a \sin\xi \qquad \text{正確度 } 1$$

$$|C(\xi)|^2 = 1 - (1 - \lambda^2 a^2)\sin^2\xi$$

$|\lambda a| \leq 1$ で安定である。

C) Lax Wendroff の Scheme. この Scheme の導出には2通りの考え方がある。Taylor 展開から出発すると,

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \Delta t\, u_t + \frac{(\Delta t)^2}{2!} u_{tt} + O(\Delta t^3)$$

方程式 $u_t = a u_x$ をtで微分して

$$u_{tt} = a u_{xt} = a(a u_x)_x = a^2 u_{xx}$$

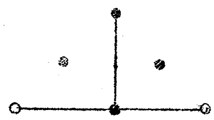
u_x 及び u_{xx} を中心差分（一階及び二階）

$$\frac{1}{2\Delta x}(T_{+1}-T_{-1})u \quad 及び \quad \frac{1}{(\Delta x)^2}(T_{+1}+T_{-1}-2T_0)u$$

$$=\left(\frac{T_{+\frac{1}{2}}-T_{-\frac{1}{2}}}{\Delta x}\right)^2 u$$

でおきかえて得られる。

$$u(t+\Delta t)=[1\cdot T_0+\frac{\lambda a}{2}(T_{+1}-T_{-1})+\frac{(\lambda a)^2}{2}(T_{+1}+T_{-1}-2T_0)]\,u(t) \quad .$$



第2は直観的導出で，

$$\frac{u(t+\Delta t,x)-u(t,x)}{\Delta t}=a\frac{u(t+\frac{\Delta t}{2},x+\frac{\Delta x}{2})-u(t+\frac{\Delta t}{2},x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}$$

$$右辺=a\frac{u(t,x+\frac{\Delta x}{2})-u(t,x-\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}+a\frac{\Delta t}{2\Delta x}[a u_x(t,x+\frac{\Delta x}{2})-a u_x(t,x-\frac{\Delta x}{2})]$$

$$+\ 0(\Delta t)$$

$$=a\frac{u(t,x+\Delta x)+u(t,x)-u(t,x-\Delta x)-u(t,x)}{2\Delta x}$$

$$+a\frac{\Delta t}{2\Delta x}[a\frac{u(t,x+\Delta x)-u(t,x)}{\Delta x}-a\frac{u(t,x)-u(t,x-\Delta x)}{\Delta x}]$$

$$+\ 0(\Delta t)$$

$$=a\frac{u(t,x+\Delta x)-u(t,x-\Delta x)}{2\Delta x}+a^2\frac{\Delta t}{2\Delta x^2}[u(t,x+\Delta x)+u(t,x-\Delta x)-2u(t,x)]$$

$$+\ 0(\Delta t)$$

これから，矢張り

$$u(t+\Delta t)=[1\cdot T_0+\frac{\lambda a}{2}(T_{+1}-T_{-1})+\frac{(\lambda a)^2}{2}(T_{+1}+T_{-1}-2T_0)]u(t)$$

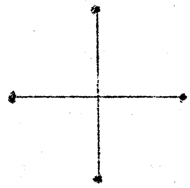
を得る。正確度が2であることは明らかであろう。

$$C(\xi) = 1 + i a \lambda \sin\xi - (a\lambda)^2 (1 - \cos\xi)$$

$$|C(\xi)|^2 \doteqdot 1 - (1 - \cos\xi)^2 \{(a\lambda)^2 - (a\lambda)^4\}$$

$|a\lambda| \leq 1$　のとき安定である。

D)　leap-frog　Scheme



$$u(t+\Delta t) = v(t-\Delta t) + \lambda a (T_{+1} - T_{-1})\, v(t)$$

これは3 level の Scheme であるけれども，矢張り Fourier 変換で$C(\xi)$を求めると$C(\xi)$は次の二次方程式の根であたえられる。

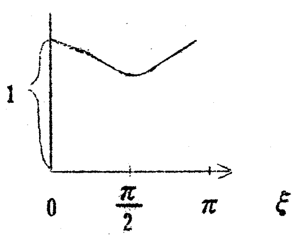
$$C(\xi)^2 - 2 i \lambda a \sin\xi\, C(\xi) - 1 = 0$$

$$C(\xi) = +\sqrt{1 - \lambda^2 a^2 \sin^2\xi} + i \lambda a \sin\xi \qquad \text{正確度 } 1$$

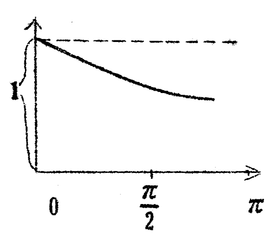
$|C(\xi)| = 1$　　　で安定である。

ここでξは $\Delta x \times$ Frequency を意味するから $|C(\xi)|$ のグラフをかくと，下の如くである。いずれも　$0 < |\lambda a| \leq 1$ として

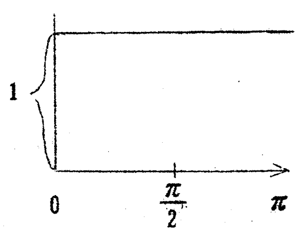
B



C



D



これによると Scheme Bは高い Frequencyの波を減衰させる作用があることがわかる。しかしもし$a = 0$であれば Scheme Cと同じようになることは注意すべきことである。

以上の諸例はすべてスカラーaの単独方程式について述べたけれども一般に対称な行列A，Bの場合，空間二次元でも計算できて正確度，安定性等をAmplification factor としての行列$C(\xi)$の性質として規定できる。又，非対称の場合にも．1で双曲型を定義したと

きのN(ξ , η) が定数行列ととれる場合には対称行例と同じような結果を得る。

又，$C(\xi)$ の性質として特に重要なことは，その固有根 $\lambda(\xi)$ がすべて

$$|\lambda(\xi)| \leqq 1 \qquad (\text{Von Neumann}) \ , \qquad |\xi| \leq \pi \tag{10}$$

なることが必要条件となることである。注目すべきことには，Bに述べたScheme を一般の双曲型定数係数の方程式について作ると，これは常にVon Neumann の条件をみたし，しかも安定であることが証明できる。Lax-Wendroff の Scheme について 同様なことを証明することは2×2行列を除いて出来ていない。次にAmplification factor の固有根 $\lambda(\xi)$ についての (10) の条件を強めて，

$$|\lambda(\xi)| \leqq 1-\delta|\xi|^{2r} \qquad |\xi| \leq \pi \tag{11}$$

が成立つ時そのScheme は2r次のdissipation をもつと云う。例えば(B) の Scheme はそれが0で(C) のScheme はdissipation 4 ($0<|a\lambda|<1$ のとき) であったことはたしかめられよう。このとき，次の定理が成立つ。いづれも定数係数。

Kreiss の定理　双曲系に対する差分法の正確度が2r－1，dissipation が2rであればその差分法は安定である。

Parlettの定理　対称な双曲系に対する差分法が正確度 2r－2，dissipation 2r であれば安定である。

最近筆者は正則な双曲系（1参照）に対して次の結果を得た。

定 理　正則双曲系に対しては正確度1以上で，任意order の（0でない）dissipation をもつScheme，又は $C(\xi)$ の固有根が $\xi=0$ を除いて相異なるScheme に対しては，安定性が保証される。

応用としては先に述べた2×2の非対称の Lax Wendroff の Scheme は正則双曲系に対しても次元2以上でも安定となる。（一次元はtrivial)。

最後に非線型の双曲系に対して現在用いられているScheme について述べよう。しかしこれ等についての厳密な意味での収束は，スカラーで一次元の場合（Olejnik の場合）を除いては証明されてはいない。ただ実験的に成功しているという外はない。

i) 空間一次元，ℓ次元ベクトルu，f(u) のConservation form:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial f(u)}{\partial x} \ .$$

A) Positive type (Lax, 1954)

丁度線型の場合のFriedrichs の Positive Scheme の非線型への拡張である。

$$u(t+\Delta t, x) - \bar{u}(t, x) = [f(u(t, x+\Delta x)) - f(u(t, x-\Delta x))]\frac{\Delta t}{2\Delta x},$$

ここで $\bar{u}(t, x) = \dfrac{u(t, x+\Delta x) + u(t, x-\Delta x)}{2}$. (12)

Olejnik はこのScheme を単独方程式に用いて先に述べた存在定理を得た。

B) Lax-Wendroff (LaxとWendroff, 1960年)

先の直観的導出と同じようにみちびかれる。

$$u(t+\Delta t) = u(t) + \lambda \Delta' f + \frac{1}{2}\lambda^2 \Delta A^2 \Delta u + \frac{1}{2}\lambda \Delta Q \Delta u, \tag{13}$$

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad \Delta' = \frac{1}{2}(T_{+1} - T_{-1}), \quad \Delta = T_{+\frac{1}{2}} - T_{-\frac{1}{2}} .$$

ここでQは $Q(\alpha, \beta)(\alpha - \beta)$, α, β は二つの ℓ 次元ベクトルであって, $\Delta Q \Delta u$ は全体として3次のorderをもち, Artificial viscosity と称する。

これに対応するlinear な Scheme の Amplification factor は

$$I + i\lambda A \sin\xi + \frac{1}{2}\{(\lambda A)^2 + \lambda Q\}(\cos\xi - 1), \tag{14}$$

であって, 今Qの部分をsmooth な解の部分では働かないとすると, Spectral mapping theorem からその固有根 $v(\xi)$ は下の形をもつ。

$$|v|^2 = 1 - (k^2 - k^4)(1 - \cos\xi)^2 + 0(\Delta x) \tag{15}$$

ここでkは λ 倍のAの固有根である。

ii) 空間2次元の場合, 方程式系を

$w_t = f(w)_x + g(w)_y$ として,

S. Burnstein 1965年のModified Lax Wendroff Scheme for Detached schock problem で用いられたSchemeを紹介する。次の式から出発する。

$$w(t+\Delta t)=w(t)+\Delta t(f_x+g_y)+\frac{\Delta t^2}{2}\{[A(f_x+g_y)]_x+[B(f_x+g_y)]_y\}$$

$$+\cdots\cdots\cdots$$

$$=w(t)+\Delta t[f+\frac{\Delta t}{2}[A(f_x+g_y)]]_x$$

$$+\Delta t[g+\frac{\Delta t}{2}[B(f_x+g_y)]]_y+\cdots\cdots$$

ここで微分を差分で置きかえる。

$$* \quad w(t,\Delta t)=w(t)+\lambda\{[C(\frac{\Delta x}{2})-C(-\frac{\Delta x}{2})]+[C(\frac{\Delta y}{2})-C(-\frac{\Delta y}{2})]\},$$

ここに $C(\frac{\Delta x}{2})=\frac{f(x^+,y)+f(x,y)}{2}+\frac{\lambda}{4}(A^++A)\{f(x^+,y)-f(x,y)+$

$$+\frac{1}{4}[g(x^+,y^+)+g(x,y^+)-g(x^+,y^-)-g(x,y^-)]\}$$

$$C(-\frac{\Delta x}{2})=T_{-1}^{(x)}C(\frac{\Delta x}{2}),$$

$$C(\frac{\Delta y}{2})=\frac{g(x,y^+)+g(x,y)}{2}+\frac{\lambda}{4}(B^++B)\{\frac{1}{4}[f(x^+,y^+)+f(x^+,y)-$$

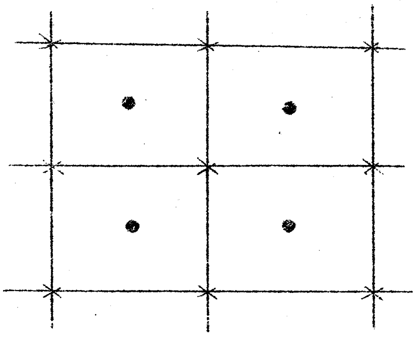
$$-f(x^+,y^-)-f(x,y^-)]+g(x,y^+)-g(x,y)\}$$

$$C(-\frac{\Delta y}{2})=T_{-1}^{(y)}C(\frac{\Delta y}{2}), \qquad \begin{aligned}&x^+=x+\Delta x, \quad x^-=x-\Delta x,\\ &A^+=A(x+\Delta x), \quad B^+=B(y+\Delta y).\end{aligned}$$

これがSchemeの式であるが，具体的な数値計算には次の2 step methodを用いる。
*がconservation formであることは重要である。

この方法の1つの利点はMatrix Vector Multiplication を必要としないことである。

Step 1.



(•) 印の4点での $t+\Delta t$ におけるwの仮の値を，(×) 印の9点のtにおけるwの値を用い次の式によって計算する。

但し $k=i\pm\frac{1}{2}$, $\ell=j\pm\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
w_{k,l} = \frac{1}{4}&\left(w_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + w_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}} + w_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + w_{k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}\right) \\
&+ \frac{\lambda}{2}\left\{f_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} + f_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}} - f_{k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}\right\} \\
&+ \frac{\lambda}{2}\left\{g_{k+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - g_{k+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}} + g_{k-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - g_{k-\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}\right\} .
\end{aligned}$$

Step 2. 次に上の値を用いて $t+\Delta t$ における f，gの中心差分 $f_{\tilde{x}}^{t+\Delta t}$, $g_{\tilde{y}}^{t+\Delta t}$ を，

$$f_{\tilde{x}}^{t+\Delta t} = f(w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - f(w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) + f(w_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) - f(w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})$$

$$g_{\tilde{y}}^{t+\Delta t} = g(w_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}) - g(w_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) + g(w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}) - g(w_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}})$$

で計算して，最後に

$$w_{i,j}^{(t+\Delta t)} = w_{i,j}(t) + \frac{1}{4}\left(f_{i+1,j} - f_{i-1,j} + f_{\tilde{x}}^{t+\Delta t}\right) + \frac{\lambda}{4}\left(g_{i,j+1} - g_{i,j-1} + g_{\tilde{y}}^{t+\Delta t}\right)$$

によってLax と Wendroff と同値な計算値を得る。〜〜〜 を附した項はtにおける中心差分と $t+\Delta t$ における差分との平均であり，高次の誤差を除いて，$f_{i+\frac{1}{2},j}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - f_{i-\frac{1}{2},j}^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ をあらわすから丁度前に1次元の時述べた直観的導出とも一致する。

ついでに二次元の場合の線型定数係数のLax Wendroff の Scheme についてAmpli−

fication factor を書いておこう。

$$C(\xi,\eta)=I+i\lambda(A\sin\xi+B\sin\eta)$$

$$-\lambda^2\left\{A^2(1-\cos\xi)+B^2(1-\cos\eta)+(\frac{AB+BA}{2})\sin\xi\ \sin\eta\right\}.$$

A，B対称のときは，$\lambda A^2\leq\frac{1}{8}$，$\lambda B^2\leq\frac{1}{8}$ でstable であることが示される。
$\lambda=\frac{\Delta t}{\Delta x}=\frac{\Delta t}{\Delta y}$ である。これにArtificial viscosity をつけたもの：

$$C(\xi,\eta)=I+i\lambda(A\sin\xi+B\sin\eta)\qquad \alpha,\beta>0$$

$$-\lambda^2(1+\frac{\alpha}{2})A^2(1-\cos\xi)-\lambda^2(1+\frac{\beta}{2})B^2(1-\cos\eta)$$

$$-\lambda^2\frac{(AB+BA)}{2}\sin\xi\sin\eta$$

は $\lambda A^2\leq\frac{1}{6}$，$\lambda B^2\leq\frac{1}{6}$ でstable である。