

分散型非線型方程式の一モデル*

名古屋大 プラズマ研 谷 内 俊 彌

最近無衝突プラズマの磁気流体近似を考えると所謂分散型非線型方程式にしばしば相遇する。たとえば冷いプラズマで荷電中性を仮定できる長波長極限では、磁場がz軸方向を向いていて全ての量がxとtだけの函数であるときには基本方程式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial nu}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

$$A^2 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + n^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{B^2}{2} = 0 \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial x} \right) + B \frac{\partial u}{\partial x} = R_{ie}^{-2} A^{-2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(n^{-1} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \tag{3}$$

となる。上式で全ての量は代表的な速度、密度、磁場の強さ、振動数を用いて無次元化してある。Aはそれらの量でつくられたアルフベン数(一定)、nは密度、uはイオンの速度のx成分、Bは磁場の強さ、 R_{ie} は次で定義される。

$$R_{ie}^2 = \omega_{ic} \omega_{ec} / \omega^2$$

ω_{ic} 、 ω_{ec} はイオン及び電子の代表的なBの大きさによるサイクロトロン振動数、 ω は代表的な振動数である。従って $R_{ie} \gg 1$ と考えられる。

$R_{ie} \rightarrow \infty$ の極限では方程式系は圧力零の完全理想磁気流体の方程式になる。しかし R_{ie} を有限にとどめると、有限の R 、 R_m (R :レイノルズ数、 R_m :磁気レイノルズ数) の磁気流体力学と全く異った解を持つ。これは本質的には R_{ie} を含む項が時間的に可逆な性質をもち系全体が時間反転に関して不変であることによる。(この意味で方程式系(1)~(3)の系を分散型磁気流体力学と呼ぶ

*) もとの講演題目は

無衝突衝撃波の一モデル

になっていましたが、必ずしも適切ではありませんので、この様に改めます。

う。従来のそれは散逸型磁気流体力学と呼ばれよう。)

方程式系(1)~(3)は、 $B \propto n$ になる解を考えれば $\gamma=2$ なる完全流体の方程式故衝撃波が発生する。しかし定常解を求めると、衝撃波的な解はなく、孤立波が $1 < A < 2$ の時のみ存在する。したがって波が急峻になっていって R_{ie}^{-2} がききだしてもそれは衝撃波的なものにならない。そこで第一の問題が生じる。即ち「波が急峻になっていくと、解は一体どんなものにおちつくだらうか？」

次にピストンで押す問題を考えよう。通常の磁気流体ではピストンの前面に衝撃波が先行してその前面及びピストンとの間の状態は一定に保たれている。「これは分散型磁気流体力学の場合にはどうなるであろうか？」これが第二の問題である。

更にRiemannの問題を考えると、通常の磁気流体力学ならば、解は一本の衝撃波と Simple Wave Contact Surface であるがこの場合はどうなるであろうか？ 等々の問題がいくつかでてくる。

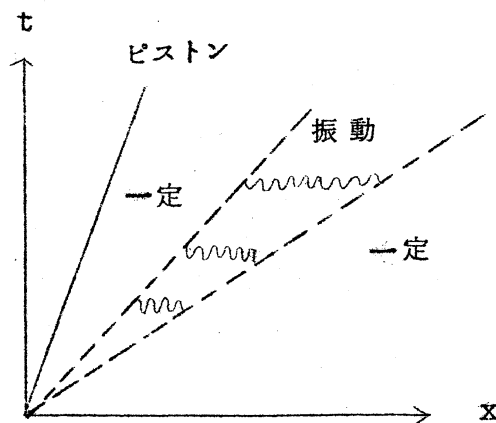
第一の問題と第二の問題は計算機を用いて調べられている。第一の問題は、ある場合には方程式系(1)~(3)を更に変形して近似的に

$$u_t + u u_x = \delta^2 u_{xxx} \quad (4)$$

なる形の方程式 (Kortweg-de Vries の式)に書きかえてしらべることができる。⁽¹⁾ この方程式の数値計算がKruskal-Zabursky⁽²⁾ によってなされた。それによれば、時間がたつにつれて波が急峻になると δ がきいていくつかの孤立波に分れそして始めの状態に戻ることが示された。

第二の問題は、Auer, Hurwitz and Kilb⁽³⁾ によってやはり計算機を用いてしらべられた。その結果は、 $R_{ie} \gg 1$ で二つの一定状態に近似的に分れるが、この場合特徴的なこととして中間に振動状態があらわれ、その幅が時間とともに広がってゆく。

このようにして、分散型非線型方程式を系統的にしらべておくことは興味深いし、又重要な意味をもっている。ここでは Schrödinger 方程式にある種の非線型変換を施して得られる分散型非線型方程式を使って、散逸型非線型方程式とのちがいがしらべられ



る。(4)とくに重要なのは此処のモデルでは厳密解が求められるということである。

Schrödinger 方程式：

$$\psi_{,t} = i\epsilon \psi_{,xx} \quad (5)$$

に於て

$$\left. \begin{aligned} n &= |\psi|^2, \\ u &= 2\epsilon \operatorname{Im}(\psi_{,x}/\psi) \end{aligned} \right\} (6)$$

なる変換を施すと、

$$\left. \begin{aligned} n_{,t} + (nu)_{,x} &= 0, \\ u_{,t} + u u_{,x} &= 2\epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(n^{-1/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n^{1/2} \right) \end{aligned} \right\} (7)$$

なる方程式が得られる。方程式(7)は分散型非線型方程式をあたえるが、この解は Schrödinger 方程式(5)の解を用いて厳密に求めることができる。(5)から(7)を導出する道筋は拡散方程式

$$\varphi_{,t} = \epsilon \varphi_{,xx}$$

から Burgers 方程式を導く場合と似ている。そこでは流れの速度 u を

$$u = -2\epsilon \varphi_{,x} / \varphi$$

で定義して、ただちに

$$u_{,t} + u u_{,x} = \epsilon u_{,xx} \quad (8)$$

を得た。勿論この場合には密度の保存をあらわす式は別に考えられねばならない。

方程式(7)及び(8)で $\epsilon \rightarrow 0$ の極限を考えると全く同一の双曲型微分方程式系

$$\left. \begin{aligned} n_{,t} + (nu)_{,x} &= 0 \\ u_{,t} + u u_{,x} &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

を得る。しかし乍ら(7)の解の $\epsilon \rightarrow 0$ の極限は(8)のそれとは異ってくる。この問題を Riemann の問題についてしらべてみよう。初期条件として、

$$n = 1$$

$$u = \begin{cases} q_1 & x \leq 0 \\ q_2 & x > 0 \end{cases}$$

を採用する。この場合、(7)で $\epsilon \rightarrow 0$ とした極限の解として $q_1 > q_2$ のときには (圧縮のとき)

$$\left. \begin{array}{lll} x < q_2 t & u \rightarrow q_1 & n \rightarrow 1 \\ x = q_2 t & u \rightsquigarrow q_1 & n \rightsquigarrow \frac{5}{4} \\ q_2 t < x < q_1 t & u \rightarrow (q_1 + q_2)/2 & n \rightsquigarrow 2 \\ x = q_1 t & u \rightsquigarrow q_2 & n \rightsquigarrow \frac{5}{4} \\ x > q_1 t & u \rightarrow q_2 & n \rightarrow 1 \end{array} \right\} (10)$$

$q_1 < q_2$ (膨脹) のときには

$$\left. \begin{array}{lll} x \leq q_1 t & u \rightarrow q_1 & n \rightarrow 1 \\ q_1 t < x < q_2 t & u \rightarrow x/t & n \rightarrow 0 \\ x \geq q_2 t & u \rightarrow q_2 & n \rightarrow 1 \end{array} \right\} (11)$$

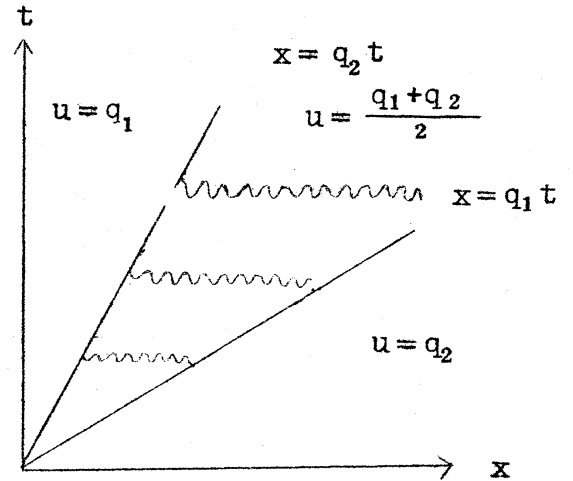
となる。ここで \rightarrow は $\epsilon \rightarrow 0$ の極限で strongly convergent をすることを意味し、 \rightsquigarrow は振動 (波長は ϵ^{-1}) を平均するという意味での weak convergence をあらわす。これらの解は(8)式で $\epsilon \rightarrow 0$ の極限とくらべられねばならない。それは、 $q_1 > q_2$ では(10)と異って、

$$\begin{array}{lll} x < \frac{q_1 + q_2}{2} t & u \rightarrow q_1 & n \rightarrow 1 \\ x = \frac{q_1 + q_2}{2} t & u = \frac{q_1 + q_2}{2} & n \rightarrow \infty (\exp(\epsilon^{-1})) \\ x > \frac{q_1 + q_2}{2} t & u \rightarrow q_2 & n \rightarrow 1 \end{array}$$

となり, $q_1 < q_2$ の場合には(11)と一致する。これから判るように圧縮の場合には, 分散型方程式の解の極限は散逸型方程式の解の極限といちぢるしく異って, 衝撃波が2本あらわれる。

その間では, 解は非常に激しく振動し, 文献(8)の数値解と類似性をもっている。その意味で我々のモデルは, 分散型方程式に共通な性質をしらべるのに充分適したものと云えよう。

膨脹の場合には, 方程式系が散逸型の極限でも分散型の極限でも同じ結果を与える。これは膨脹によって高階微分の項 (ϵ に比例する) が効かなくなることから考えれば当然の結果である。



方程式(9)の散逸型の極限に相当した解を求める difference scheme は $\text{Lax}^{(5)}$ によって与えられた。それでは分散型の極限に相当した解を求める difference scheme は如何なるものになるであろうか。これは我々のモデルを使ってしらべることができるかもしれない。これは(5)の解を

$$\psi(x, t + \Delta t) = \sqrt{\frac{-i}{4\pi\epsilon \Delta t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(x-x')^2/4\epsilon \Delta t} \psi(x', t) dx'$$

の形に書いたとき, 右辺の積分を適当に近似することによってなされるだろう。

引用文献

- (1) C.S. Gardner & G.K. Morikawa, Courant Institute of Mathematical Sciences Report NO. NYO 9082, 1960.
- (2) N.J. Zabusky and M.D. Kruskal, Phys. Rev. Letters 15 240 (1965)
- (3) P.L. Auer, H. Hurwitz, Jr. and R.W. Kilb, Phys. Fluids 4, 1105 (1961), 5, 298 (1962).

- (4) N. Yajima, A. Outi and T. Taniuti, Research Report of
Institute of Plasma Physics, Nagoya University
IPPJ-47. (1966) .
- (5) P.D. Lax, Comm. Pure Appl. Math. 7 159 (1954) , 10 537
(1957) .