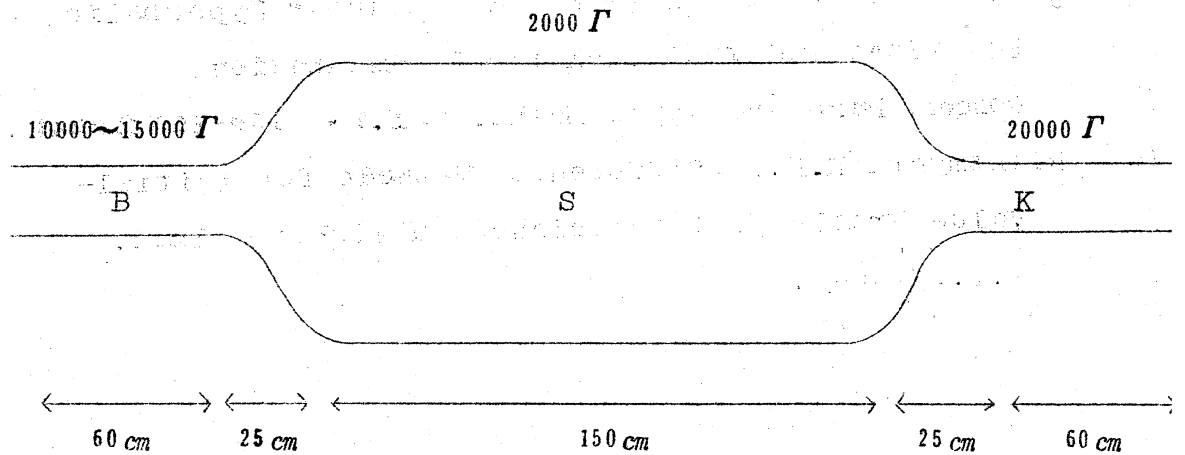


プラズマの磁気チャネル中の流れ

日本大学 川上一郎
理工学部

§1. 序

核融合反応を制御された状態で実現するためには、高温高密度のプラズマをつくる必要がある。いわゆるBSG計画はこのようなプラズマをつくる一つの方法として提案され、現在名古屋大学プラズマ研究所で実験が開始されているが、その概要は次の通りである。



第1図

第1図におけるBの位置に、水素やヘリウムのガスをおき、Bの磁場を急激に強くすると、衝撃波によって電離され、プラズマが生成される。このプラズマをSの磁場の弱いところに流してやると、プラズマがもし理想気体と考えてよければ、温度は保たれたまま、圧力と密度は減少する。ここで再び断熱的に圧縮を行えば、温度は一層高くなり、密度も大きくなる。この過程をくり返すことにより、高温高密度までもって行こうというのである。

しかし問題は、プラズマがSを通り過ぎてKの方に出してしまえば、この計画は失敗する。そこで本当にS中にプラズマの大部分が止まるか否かを、数値実験によって確かめようというのが、以下のべる計算の目的である。

考えているプラズマは、系の大きさに比べて著しく小さい平均自由行程を持ち、粒子個数も大きいので、流体と考えられる。Bより吹き出したプラズマがS中に止まる迄を流体的に考察するならば、次の様に言える。プラズマの真空に接した先端部 (cavitation front) は、稀薄なために超音速でSを素通りするが、後続する主要な部分がSのKに近い部分に停滞しはじめると、流れは音速よりおそくなる。この境目では衝撃波が発生し、その衝撃波がSのBに近い部分まで移動すれば、その右側は流れは小さくなり、Sにプラズマは捕えられる。

したがって、実際に衝撃波が発生するかどうか、主な問題になるわけである。

出来るだけ問題を単純化するために、プラズマは理想電磁流体であるとする。この時用いる式として次のものを採用する。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{連続の式})$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (\text{運動方程式})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\text{Maxwell の方程式})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0 \quad (\text{プラズマの電磁氣的性質})$$

$$\frac{\partial (p \rho^{-\gamma})}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla (p \rho^{-\gamma}) = 0 \quad (\text{状態方程式})$$

ρ = 密度 , \mathbf{v} = 流体 , p = 圧力 , \mathbf{j} = 電流
 \mathbf{B} = 磁束密度 , \mathbf{E} = 電場 , γ = 比熱比。

§ 2. 近 似 法

以上の式は、このままでは扱いにくいので、さらに近似を行なう。そのために、磁力線にそった方向、磁力線の法線方向、磁力線の倍法線方向に向いた単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{e}_x = \mathbf{B}/B$, $\mathbf{e}_y = R \partial \mathbf{e}_x / \partial x$ (R は曲率半径) , $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y$ とし、これを基底とする座標 (moving frame) を用いて、方程式を書きあらため、流れは磁力線に沿っている。すなわち

$$\mathbf{v} = u \mathbf{e}_x$$

と仮定する。このとき、方程式は三つのグループに分かれる。第一のグループは、磁場は時間的には変化しない

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

ということを示している。したがって、 \mathcal{G} は真空中（プラズマがないとき）の磁場をあらわすと考
えて差支えない。第二のグループは、法線方向と倍法線方向の力の釣合いを示すもので、

$$\frac{\rho u^2}{R} + \left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right)_y = \frac{B^2}{4\pi R}$$

$$\left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right)_z = 0$$

となる。 $\rho u^2/R$ が遠心力を、 $B^2/4\pi R$ が磁力線の張力をあらわしている（添字は微分）。
第三のグループは、磁力線に沿った方向のプラズマの運動をあらわし

$$\rho_t + (\rho u)_x - \rho u B' = 0$$

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x = 0$$

$$(p \rho^{-\gamma})_t + u(p \rho^{-\gamma})_x = 0$$

とかける。このグループは、 $B' = \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x}$ を与えられたものと考えれば、他のグループとは
独立に解けることに注目して、このグループだけを取り出して、以下解くことを考える。

§3. 微分方程式

U を、未知数 ρ , u , p でつくった縦ベクトル

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}$$

とおけば、解くべき方程式は、

$$U_t + A U_x = B$$

と書ける。 A の3つの固有値は

$$\lambda_t = u + c$$

$$\lambda_0 = u$$

$$\lambda_{\pm} = u \pm c$$

で、それぞれに対する左固有ベクトルは

$$l_+ = (0, \rho c, 1)$$

$$l_0 = (-c^2, 0, 1)$$

$$l_- = (0, -\rho c, 1)$$

である (規格化はしてない。また $c^2 = rD/\rho$)。この左固有ベクトルを左からかければ、各々の固有値に対して

$$l U_{\sigma} = l B t_{\sigma} \quad \text{along } x_{\sigma} = \lambda t_{\sigma}$$

を得る。 $x_{\sigma} = \lambda t_{\sigma}$ は、特性曲線の方程式であり、 σ は特性曲線にそった微分をあらわす。具体的に書けば、

$$\begin{aligned} (u + \frac{2}{r-1}c)_{\alpha} &= \frac{c}{r(r-1)} [\ln(p\rho^{-r})]_{\alpha} + u c B^1 t_{\alpha} \\ &\quad \text{along } x_{\alpha} = (u+c)t_{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (u - \frac{2}{r-1}c)_{\beta} &= -\frac{c}{r(r-1)} [\ln(p\rho^{-r})]_{\beta} - u c B^1 t_{\beta} \\ &\quad \text{along } x_{\beta} = (u-c)t_{\beta} \end{aligned}$$

$$(p\rho^{-r})_{\omega} = 0 \quad \text{along } x_{\omega} = u t_{\omega}$$

初期条件として、 $p\rho^{-r} = \text{const.}$ ならば、衝撃波が発生するまでは $p\rho^{-r} = \text{const.}$ である。したがって、第1式と第2式の右辺第1項はゼロであり、第3式は恒等式になる。

§4. 衝 撃 波

非線型双曲型偏微分方程式は、初期値が一価連続微分可能であっても、時間とともに多価になることがある。物理的にはこのような解は許されないので、不連続面を入れて、この面の両側ではもとの方程式を満たすようにする。この不連続面の入れ方は、物理的要求から、質量、運動量、エネルギーの流れが保存されねばならない。特にこの不連続面を横切って質量の流れがある場合のこの不連続面を、衝撃波面と呼ぶことにする。この面の両側の状態と、この面の速さ（衝撃波速度）との関係をRankine-Hugoniotの関係式と呼ぶことにする。

方程式を

$$U_t + F_x = B$$

の形（保存則形）に書いたときの、Rankine-Hugoniotの関係式は、Sを衝撃波速度として

$$S[U] = [F]$$

の形にあらわせる。[]は波面の両側の値の差をしめす。特にわれわれの場合には

$$[\rho v] = 0,$$

$$[p + \rho v^2] = 0,$$

$$\left[\frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right] = 0 \quad (v = u - s)$$

で、質量、運動量、エネルギーの保存を示す。

§5. 初期・境界条件

$t=0$ で、 $x \leq 0$ にあるプラズマが噴出しはじめたとする。衝撃波生成前は $p\bar{\rho}^{\gamma} = \text{const.}$ であるが、磁場が一定 ($B^1 = 0$) である時の解は、解析的に知られている：

$$u = \frac{2c_0}{\gamma+1} \left(1 + \frac{x}{c_0 t} \right),$$

$$c = \frac{2c_0}{\gamma+1} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} \frac{x}{t} \right).$$

密度および圧力は $\rho = c^{\frac{2}{\gamma-1}}$, $p = c^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$ として求まる。 $t=0$ でかつ $x=0$ は特異点であるため、これはさげねばならない。したがって、 $x=L, t > (\frac{2}{\gamma-1} c_0)^{-1} L$ で $B^1 \neq 0$ になるとして、数値解を求めることにする。

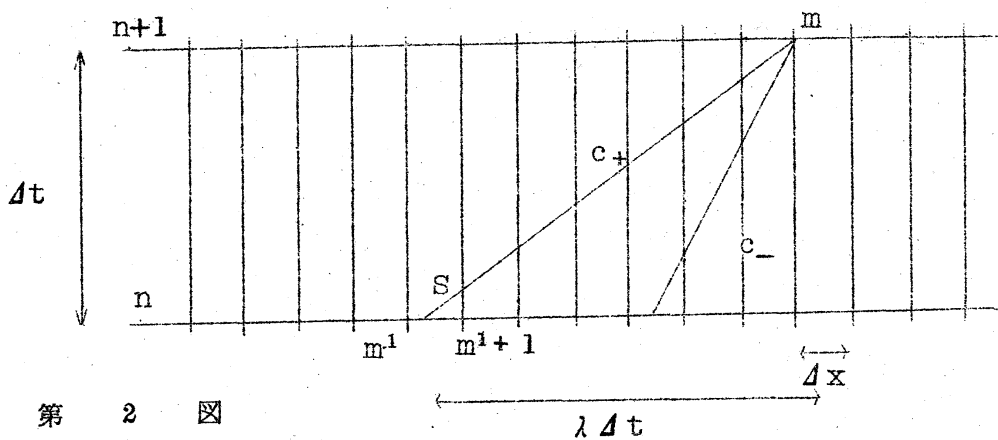
§6. 差分方程式

(1) 衝撃波発生前は $p \rho^{-\gamma} = \text{const.}$ であるから、 $\ell \cdot U_\sigma = \ell B t_\sigma$ を差分方程式化して用いることができる。いま

$$f = u \pm \frac{2}{\gamma-1} c, \quad g = \pm u \cdot c B^1$$

とおけば、微分方程式 $f_\sigma = g t_\sigma$ を差分に直して

$$f_m^{n+1} = f_{m^1+1}^n - (\lambda_m^{n+1} \Delta t / \Delta x - (m - m^1 - 1)) (f_{m^1+1}^n - f_{m^1}^n) + g_m^{n+1} \Delta t$$



第 2 図

を得る。 m^1 は、 $(n+1, m)$ からおろした特性曲線の足が、 $m^1 \Delta x$ と $(m^1 + 1) \Delta x$ の間にあるようにえらぶ。この式は implicit であるから、iteration をおこなう。また、安定性の条件は、

$$|\lambda \Delta t / \Delta x - (m - m^1 - 1)| \leq 1$$

であるが、 m^1 が上述のようにえらばれていることによって、常に満足されている。 $m^1 = m - 1$

であるような場合が, Courant-Friedrichs-Lewy の安定性の条件である。

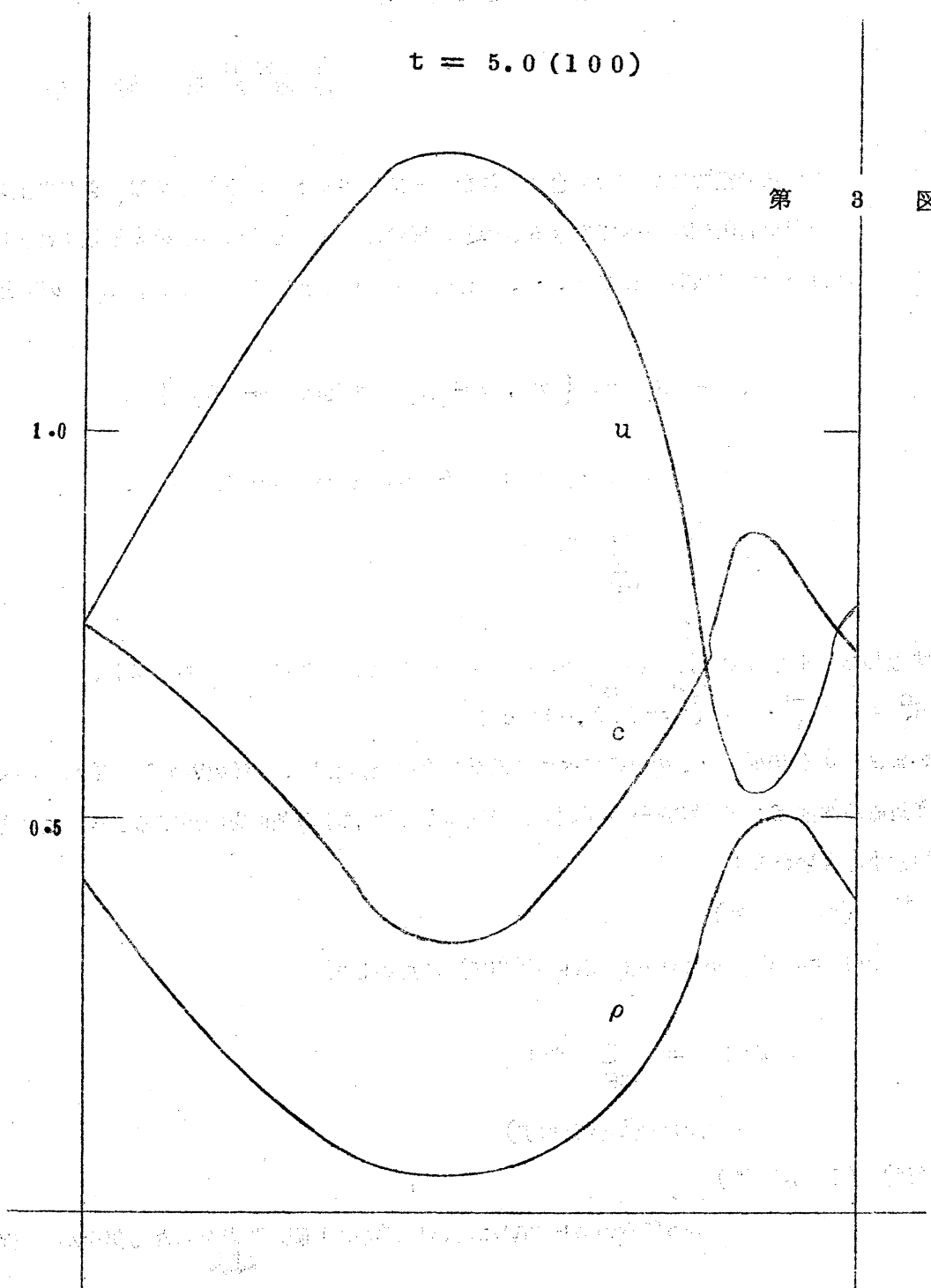
(2) 衝撃波面の近傍では, 方程式を $U_t + F_x = B$ の形にして, 差分を取る。

$$U_m^{n+1} = \left\{ (m_2 - m) U_{m_1}^n + (m - m_1) U_{m_2}^n - (F_{m_2}^n - F_{m_1}^n) \Delta t / \Delta x \right\} / (m_2 - m_1)$$

ここに m_1 は, 最大の λ で $(n+1, m)$ からおろした特性曲線の足が, $m_1 \Delta x$ と $(m_1 + 1) \Delta x$ の間に入るようにえらび, m_2 は最小の λ の足が $(m_2 - 1) \Delta x$ と $m_2 \Delta x$ の間に入るようにえらぶ。この差分式は, $m_1 + 1 = m = m_2 - 1$ の時が, Δx によって与えられたものになっている。

§ 7. 計 算 例

簡単のため, $B = B_0 (1 - \alpha \cos \pi x)$ ($\alpha < 1$) として求めた例を示す。すべての数値は系の特徴的な量の大きさを規格化してある。図に示した例は, 100 step 後の flow の様子を示す。あきらかに $u < c$ で, 衝撃波が発生している。



$$R = 7.5$$

$$L = 0.05$$