

## 解析空間の Tangent Cone について

東京大学 笠原 乾吉  
教養部

§ 1. 接ベクトル, 接空間などを, 解析空間において定義し, 特異点の近傍の状態や写像の局所的性質などを調べようとするのは当然であろう。部分的にはいろいろ試みがあつたにちがいないが, まとまつた研究は数年前から始つた。現在までにえられた結果を概観するのがこの講演の目的である。

まず, 特異点において接ベクトルをどのように定義するかが問題である。最近, Whitney [5] は, いろいろと提案しているが, 今までのところ調べられているのは代数幾何でいわれる tangent vector と tangent cone であり, それも後者はごく最近の Whitney の研究 [5, 6] だけのように思われる。

### § 2. “接ベクトル”

$(X, \mathcal{O}_X)$  を reduced analytic space とする。 $\mathcal{O}_X$  は  $X$  上の正則函数芽の層で,  $x \in X$  における正則函数芽の全体を  $\mathcal{O}_{X,x}$  とかく。 $\mathcal{O}_{X,x}$  は局所環で, その極大ideal を  $\mathfrak{m}_x$  とすると,  $\mathfrak{m}_x$  は  $x$  で値 0 をとる正則函数芽の全体で  $\mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_x = \mathbb{C}$  (複素数体) となる。

定義 次の条件をみたす写像  $t: \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow \mathbb{C}$  の全体を  $T_x(X)$  とかく。

(i)  $\mathbb{C}$ -linear

(ii)  $t(fg) = f(x) \cdot t(g) + t(f) \cdot g(x)$ , ( $f, g \in \mathcal{O}_{X,x}$ )

$T_x(X)$  は  $\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$  (これは複素ベクトル空間になる) の dual space と同型になることを注意しておく。 $t \in T_x(X)$  は定数及び  $\mathfrak{m}_x^2$  の元に対しては 0 を対応させるからである。

$T(X) = \bigcup_{x \in X} T_x(X)$  とおく。 $(T_x(X))$  の元を,  $x \in X$  における  $X$  の “接ベクトル” というが, 他の定義もあり, くいちがいがあるからここでは命名しないことにする。

$(Y, \mathcal{O}_Y)$  を別の reduced analytic space とし,  $\tau: X \rightarrow Y$  を正則写像とする。

$$d\tau_x(t)(f) = t(f \circ \tau), \quad (t \in T_x(X), f \in \mathcal{O}_Y, \tau(x))$$

よつて,  $d\tau_x : T_x(X) \rightarrow T_{\tau(x)}(Y)$  が定義され  $\mathbb{C}$ -linear である。これから  $d\tau : T(X) \rightarrow T(Y)$  が定義される。

正則写像の合成に対し,  $d(\sigma \circ \tau) = d\sigma \circ d\tau$  が成立する。

$X$  が  $Y$  の部分空間で  $I_X$  を ideal の層とすると, (即ち,  $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y / I_X|_X$ )

$i : X \rightarrow Y$  を自然な injection とすれば  $di_x : T_x(X) \rightarrow T_x(Y)$  も injection で, 像は

$$I_m di_x = \left\{ \tilde{t} \in T_x(Y) \mid \tilde{t}(f_\nu) = 0; f_\nu, (\nu=1, 2, \dots, k) \text{ は } I_{X, x} \text{ の生成元} \right\}$$

となる。 $T_x(X)$  は  $T_x(Y)$  の線型部分空間とみなしうる。

定理  $T(X)$  に解析的構造を入れ, 自然な射影  $\pi : T(X) \rightarrow X$  及び, 正則写像  $\tau : X \rightarrow Y$  に対する  $d\tau : T(X) \rightarrow T(Y)$  が正則になるようにできる。

概証:  $X$  が  $\mathbb{C}^n$  の領域  $D$  のとき,  $D \times \mathbb{C}^n$  ( $x, v$ ) に  $\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial z_i} \Big|_x \in T_x(D)$  を対応させると, bijective であり, これで  $D \times \mathbb{C}^n$  の構造を  $T(D)$  に入れる。

$X$  が  $\mathbb{C}^n$  の領域  $D$  内の解析的集合  $A$  のとき,  $D$  を小さくして ideal の層  $I_A$  は  $D$  内の正則関数  $f_1, \dots, f_k$  により各点で生成されるとしてよい。 $T(A) \xrightarrow{di} T(D) \cong D \times \mathbb{C}^n$  ( $i$  は  $A \rightarrow D$  の自然な injection) による  $T(A)$  の像をみると

$$\left\{ (x, v) \in D \times \mathbb{C}^n \mid x \in A, \sum_i v^i \frac{\partial f_k}{\partial z_i} \Big|_x = 0 \quad (k=1, 2, \dots, k) \right\}$$

となり,  $D \times \mathbb{C}^n$  内の解析的集合である。これで  $T(A)$  に解析的構造を入れる。あとは省略。

$T(X)$  の正則な section の全体を  $\mathfrak{X}(X)$  とおく。次のことはすくにわかる。(  $\mathfrak{X}(X)$  の元を "正則ベクトル場" といつてもよい。 )

$$\xi \in \mathfrak{X}(X) \stackrel{\text{def}}{\iff} \xi : X \rightarrow T(X), \text{ 正則で } \xi(x) \in T_x(X)$$

$$\iff \xi \text{ は各 } x \in X \text{ に } \xi_x \in T_x(X) \text{ を対応させる写像で, 開集合 } \forall U \subset X \text{ と } \forall f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \text{ に対し } f(x) = \xi_x f_x \text{ で定義される } \xi f \text{ は } \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \text{ の元になる。}$$

$$\iff \xi \text{ は } \mathcal{O}_X \text{ から } \mathcal{O}_X \text{ への } \mathbb{C}\text{-vector spaces の層としての準同型写像で}$$

$\xi(fg) = \xi(f) \cdot g + f \cdot \xi(g)$ , ( $\forall f, g \in \mathcal{O}_{X, x}; \forall x \in X$ )  
 が成立する。

$T(X)$  の正則な sections の芽が作る  $X$  上の層 (集合の層) を  $\mathcal{E}_X$  とかく。  $\mathcal{E}(X) = \Gamma(X, \mathcal{E}_X)$  である。

定理  $\mathcal{E}_X$  は自然に  $\mathcal{O}_X$ -modules の層 (i.e. 解析的層) となり coherent である。  
 (Rossi [4])

系  $X$  を Stein 多様体とし,  $Y$  を  $X$  の analytic subspace とする。このとき,  
 $\forall \xi \in \mathcal{E}(Y)$  に対し  $\exists \tilde{\xi} \in \mathcal{E}(X)$  があり,  $di \circ \xi = \tilde{\xi} \circ i$  とできる。 ( $i: Y \rightarrow X$  自然な injection)。

証明  $\mathcal{E}'_{X, x} = \mathcal{E}_{X, x} : x \notin Y$   
 $\{t \in \mathcal{E}_{X, x} \mid t(f) = 0, \forall f \in I_{Y, x}\}$

とおく。 ( $I_Y$  は  $Y$  の ideal の層。) これは連接層で  $\mathcal{E}'_X \rightarrow \mathcal{E}_Y \rightarrow 0$  ( $x \notin Y$  で,  $x \in Y, x=0$  とする。) という完全列より  $\Gamma(X, \mathcal{E}'_X) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{E}_Y) \rightarrow 0$  という完全列をうる。 (Rossi [4] を参照)

$\mathcal{E}_{X, x}$  の元 (i.e.  $x \in X$  の近傍での "正則ベクトル場") が存在するかどうかについて次の定理がある。

定理  $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{E}_{X, x}$  があり,  $\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)$  が  $T_x(X)$  で 1 次独立である。

$\Leftrightarrow k$  次元複素多様体  $M$  と解析空間  $V$  があり,  $x$  の  $\exists$  近傍  $U$  が  $M \times V$  と解析的同型になる。

(Rossi [4])

証明  $\Leftarrow$  は明らか。  $\Rightarrow$  をいう  $X = A \subset D \subset \mathbb{C}^n$  としよ。 ( $A$  は領域  $D$  内の解析的集合。)  $D$  を小さくして,  $A$  に対応する ideal の層  $I_A$  は  $f_1, \dots, f_\rho \in \Gamma(D, \mathcal{O}_D)$  で生成され,  $\xi_1, \dots, \xi_k$  は  $\mathcal{E}(D)$  の元に延長されているとしてよい。座標をうまくとり,  $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial z_1}$  とできる。 (Chevalley: Lie groups I, p.89 をみよ。)

$\xi_1 \in \mathcal{E}(A)$  より  $A$  上  $\frac{\partial f_\nu}{\partial z_1} \equiv 0$  となり, 故に  $\frac{\partial f_\nu}{\partial z_1} \in \Gamma(D, I_A)$  したがって  $A$  上  $\frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{\partial f_\nu}{\partial z_1} \right) \equiv 0$  となる。これをくりかえして,  $A$  上  $\frac{\partial^\lambda f_\nu}{\partial z_1^\lambda} \equiv 0$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, \nu = 1, 2, \dots, \rho$ ) をうる。  $M_1 = \{z_2 = \dots = z_n = 0\}$ ,  $V_1 = A \cap \{z_1 = 0\}$  とおくと,

$(z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow (z_1, 0, \dots, 0) \times (0, z_2, \dots, z_n)$  によつて  $A \cong M_1 \times V_1$  となる。 $\xi_2$  を  $V_1$  で考え、くりかえしていけばよい。

定理  $x \in X$  での  $X$  の既約成分の次元のうち最小を  $r$  とする。このとき、 $x$  の近傍  $v$  と、 $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathfrak{t}(U)$  があり、 $U$  内の、次元が  $r$  の通常点  $y$  では  $\xi_1(y), \dots, \xi_k(y)$  が  $T_y(X)$  をはり、その他の点では  $\xi_1, \dots, \xi_k$  はみな  $0$  になる。(Whitney [6] Lemma 15.1)

$X$  全体について、 $\mathfrak{t}(X)$  の元の存在は、 $X$  の automorphism と関係があり Kaup の研究 [2, 3] がある。

$\tau: X \rightarrow Y$  を正則写像として、 $x \in X$  の近傍  $U$  があり、 $\tau(U)$  は  $\tau(x)$  の近傍内の解析的集合で、 $\tau$  の制限  $\tau|_U$  が  $U$  から  $\tau(U)$  への解析的同型になるとき、仮に、 $\tau$  は  $x$  で regular であるということにする。

- 定理 (i)  $x$  が  $X$  の通常点  $\iff \dim_{\mathbb{C}} T_x(X) = \dim_x X$   
 (ii)  $\dim_{\mathbb{C}} T_x(X) \leq d \iff x$  のある近傍が  $\mathbb{C}^d$  へ regular に写せる。  
 (iii) 正則写像  $\tau: X \rightarrow Y$  が  $x \in X$  で regular  $\iff d\tau_x: T_x(X) \rightarrow T_{\tau(x)}(Y)$  が injective  
 (iv)  $A_i$  を  $\mathbb{C}^{n_i}$  の領域内の解析的集合 ( $i=1, 2$ ) とし、 $\tau$  を  $A_1$  から  $A_2$  の正則写像とする。 $x \in A_1$  とし  $\dim T_x(A_1) = n_1$  とし、 $\tau$  は  $x$  で regular とせよ。 $\tau$  を  $\mathbb{C}^{n_1}$  内の  $x$  の近傍から  $\mathbb{C}^{n_2}$  への正則写像に拡張すると、その写像は  $x$  で regular である。

証明 (ii)  $X = A \subset D \subset \mathbb{C}^n$ , ( $A$  は領域  $D$  内の解析的集合),  $\dim T_x(A) < n$  とせよ。 $T_x(A) \subsetneq T_x(D)$  より、 $\exists t \in T_x(D) \setminus T_x(A), \exists f \in I_{A;x}, t(f) \neq 0$  とできる。

( $I_A$  は ideal の層)。  $t$  は  $\sum_i a^i \frac{\partial}{\partial z_i}$  であるから、 $z_1, \dots, z_n$  を座標で  $z_n = f$  にとることができる。 $A \subset \{z_n = 0\}$  となり、 $A$  は  $\mathbb{C}^{n-1}$  にうめこまれる。

(iii)  $d = \dim T_x(X)$ ,  $d' = \dim T_{\tau(x)}(Y)$  とし、 $x, \tau(x)$  の近傍を  $\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^{d'}$  内の局所解析的集合とみなし、 $\tau$  を  $\mathbb{C}^d$  内の  $x$  の近傍から  $\mathbb{C}^{d'}$  への正則写像  $\tilde{\tau}$  に延長しておく。

右図より、 $d\tau_x$  が injective なら  $d\tilde{\tau}_x$  もそうなり、 $\tilde{\tau}$  は regular で  $\tau$  も regular になる。逆は明らか。

$$\begin{array}{ccc} T_x(\mathbb{C}^d) & \xrightarrow{d\tilde{\tau}_x} & T_{\tau(x)}(\mathbb{C}^{d'}) \\ \parallel & & \parallel \\ T_x(X) & \xrightarrow{d\tau_x} & T_{\tau(x)}(Y) \end{array}$$

(I)は(II)から、(IV)は(III)と同様にして容易である。

定義  $\tau: X \rightarrow Y$ を正則写像とし、 $x \in X$ とする。次のようにおく。

$$\text{rank}_x(\tau) = \dim \text{Im } d\tau_x, \quad \text{corank}_x(\tau) = \dim \text{ker } d\tau_x.$$

この定義から、 $\text{rank}_x(\tau) + \text{corank}_x(\tau) = \dim T_x(X)$ である。このrankの定義は Jacobian matrix によるその拡張であり、Remmert による写像のrankとは異なる。多様体の場合によく知られた結果が次のように拡張される。i次元多重円板を $P^i$ とかくことにする。

定理  $\tau: X \rightarrow Y$ は正則写像で、 $x \in X$ の近傍に於てcorankは恒等的にmであるとする。 $\dim T_x(X) = n$ とし、 $x \in X$ の近傍 $v$ を $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍内の解析的集合と同型にとる。両者を同一視し、 $x$ は $\mathbb{C}^n$ の原点とする。 $\mathbb{C}^n$ の座標を $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m$ 、 $T_x(\mathbb{C}^{n-m} \times \{0\} = \text{ker } d\tau_x = \{0\}$ になるようにとる。

このとき、原点を中心とする多重円板 $P^n = P^{n-m} \times P^m$ を適当にとり、次のようにできる。 $P^{n-m}$ 内の解析的集合 $S$ があり、 $U \cap P^n = S \times P^m$ となり、 $\tau|_{U \cap P^n}$ は、射影 $P^{n-m} \times P^m \rightarrow P^{n-m}$ がひきおこす写像 $U \cap P^m \rightarrow S$ と、 $\mathbb{C}$ 解析的同型写像 $S \rightarrow \tau(U \cap P^n)$ との合成になる。 $(\tau(U \cap P^n))$ は $Y$ の局所解析的集合になる。(Holmann [1])

この定理の応用として、 $L$ を $X$ の複素変換群とし、 $\forall x \in X$ に対し $\text{orbit } L(x) = \{g(x) \mid g \in L\}$ が純 $m$ 次元であるとすれば、 $\forall x \in X$ は $A \times P^m$  ( $A$ は解析空間)と同型な近傍をもち $\forall a \in A$ に対し $\{a\} \times P^m \subset \mathbb{C} L(g)$ となることが示される。

定理  $Y$ を $X$ の解析的部分空間で、 $r: X \rightarrow Y$ を正則写像で $r|_Y$ は恒等写像とする。(即ち、正則なretraction.)  $y \in Y$ において、 $\dim T_y(Y) = m$ 、 $\dim T_y(X) = n$ とし、 $X$ 上の $y$ の近傍を $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m$ の原点の既傍内の解析的集合と同型で( $y$ は原点)、 $Y$ は $\{0\} \times \mathbb{C}^m$ に(局所的に)含まれているようにとる。

このとき、充分小さい( $X$ 上の) $y$ の近傍への $r$ の制限は、射影 $\mathbb{C}^{n-m} \times \mathbb{C}^m \rightarrow \{0\} \times \mathbb{C}^m$ によつてひきおこされる写像と一致する。(Holmann [1])

これは、 $A$ を $\mathbb{C}^n$ の領域 $D$ 内の解析的集合とし、 $r: D \rightarrow A$ という正則retractionが存在すれば $A$ は特異点をもたず、 $r$ のfibreは $A$ の近傍で特異点をもたぬというRossiの結果を含んでいる。

§ 3. Whitney の “接ベクトル”

$D$  を  $\mathbb{C}^n$  の領域,  $A$  を  $D$  内の解析的集合とし  $P$  を  $A$  の点とする。

Whitney は  $v \in \mathbb{C}^n$  が  $P$  における  $A$  の “接ベクトル” であるということに, いくつかの定義を試みる。  $A$  の通常点の全体を  $\mathring{A}$  とおく。

$$C_1(A, p) = \left\{ v \mid \exists U: p \text{ の } \mathbb{C}^n \text{ 内の近傍, } \exists \tilde{v} \in \mathfrak{L}(U), \forall q \in \mathring{A} \text{ に対し } \tilde{v}(q) \in T_q(A) \right. \\ \left. \text{で, } \tilde{v}(P) = v \right\}$$

$$C_2(A, p) = \left\{ v \mid q_i \rightarrow p \text{ となる } \forall q_i \in \mathring{A} \text{ に対し } \exists v_i \in T_{q_i}(A), v_i \rightarrow v \right\}$$

$$C_3(A, p) = \left\{ v \mid \exists q_i \in A, \exists a_i \in \mathbb{C}, a_i(q_i - p) \rightarrow v \right\}$$

$$C_4(A, p) = \left\{ v \mid \exists q_i \in \mathring{A}, \exists v_i \in T_{q_i}(A), q_i \rightarrow p, v_i \rightarrow v \right\}$$

$$C_5(A, p) = \left\{ v \mid \exists q_i, q'_i \in A, \exists a_i \in \mathbb{C}, a_i(q_i - q'_i) \rightarrow v \right\}$$

$$C_6(A, p) = T_p(A) \subset T_p(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}^n$$

一般に,  $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \subset C_5 \subset C_6$  が成立する。しかし, 証明は (自明の部分もあるが), 簡単ではない。( [5] の始めの方に証明の概略があるが, 完全には [5], [6] の多くの結果が必要と思われる。  $C_1, C_2, C_6$  は  $\mathbb{C}^n$  の線型部分空間となり, 他は cone であり代数的集合になることが示される。

Whitney は  $C_3(A, p)$  を主に調べている。まず, 二通りの特徴づけが示される。

local ring  $\mathcal{O}_{A, p}$  の associate graded ring  $\mathcal{O} = \mathbb{C} \cup \frac{\mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P} \cup \frac{\mathfrak{m}_P^2}{\mathfrak{m}_P^3} \cup \dots$  を考え,  $C_3(A, p) \subset C_6(A, p) = T_p(A) \xrightarrow{\sim} \left( \frac{\mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P^2} \right)^*$  により  $C_3(A, p)$  を  $\left( \frac{\mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P^2} \right)^*$  の部分集合とみなすとき

$$C_3(A, p) = \left\{ t \in \left( \frac{\mathfrak{m}_P}{\mathfrak{m}_P^2} \right)^* \mid t \text{ は } \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C} \text{ の ring homomorphism に拡張できる} \right\}$$

となる。

$f \in \mathcal{O}_{D, p}$  に対し,  $f$  を  $P$  中心の Taylor 級数に展開し次数の等しい項をまとめたとき, 0 でない最低次の項を  $f$  の  $p$  における initial polynomial といつて  $f_p^*$  とかくことにする。  $D$  における  $A$  の ideal の層を  $I_A$  とする。  $C_3(A, p)$  は,  $I_{A, p}$  に属する  $\forall f$  に対する

$f_p^*$  の共通零点集合と一致する。 $(I_{A,p}$  が principal ideal のときは生成元  $f$  に対する  $f_p^*$  の零点が  $C_3(A, p)$  になるが、一般には、 $I_{A,p}$  の生成元だけでは不足である。

$C_3(A, p) = T_p(A)$  は  $I_{A,p}$  に属する  $f$  に対する  $f_p^*$  のうち、一次式であるものだけの共通零点である。) )

$n$ 次元複素射影空間を  $P^n$  とかき、 $P^n$  内の  $r$ 次元線型部分空間の集合を  $G^{n,r}$  とかき普通に位相を入れる。(グラスマン多様体である。)  $C^n$  の  $r$ -plane を(原点を通るように平行移動して)  $P^{n-1}$  の  $(r-1)$ 次元部分空間とみなし、さらに  $G^{n-1, r-1}$  の点とみなしたりする。原点でない  $v \in C^n$  は、 $o$ と  $v$ を通る直線を考えることにより、 $P^{n-1}$  の点に対応する。 $C^n$  内の原点を頂点とする cones は、 $P^{n-1}$  内の部分集合と  $1:1$ に対応する。cone  $C_3(A, p)$  に対応する  $P^{n-1}$  の部分集合を  $C_3^*(A, p)$  とかく。

$C^{*n}(p) = \{ (q, \nu) \in C^n \times P^{n-1} \mid q-p \text{ と } \nu \text{ とは従属} \}$ とおき、 $\pi: C^{*n}(p) \rightarrow C^n$  を射影とおくと、 $q \neq p$ なら  $\pi^{-1}(q)$  は1点で、 $\pi^{-1}(p) = p \times P^{n-1}$  となり、 $\pi$  は正則で proper な写像となり、 $p \times P^{n-1}$  を除くと biholomorphic である。 $(C^{*n}(p))$  は  $C^n \times P^{n-1}$  の解析的集合である。 $\pi$  は proper modification の一種で、これは Hopf の  $\sigma$ -process とよばれているものである)。

さて、 $A_p^* = \{ C^{*n}(p) \cap (A \times P^{n-1}) \} - (\{p\} \times P^{n-1})$ 、(閉包は  $D \times P^{n-1}$  内のもの、これは  $D \times P^{n-1}$  内で解析的)とおくと、 $\pi|_{A_p^*}: A_p^* \rightarrow A$  は  $p$  の原像を除き biholomorphic である。 $p$  の原像が  $p \times C_3^*(A, p)$  になることが示され、これから  $\dim C_3^*(A, p) = \dim_p A - 1$ 、したがって  $\dim C_3(A, p) = \dim_p A$  が示される。

この方法の系として、 $A$  が  $p$  で既約なら  $C_3^*(A, p)$  が連結になることから、 $o$  でない  $\forall v \in C_3(A, p)$  に対し、 $p$  を端点とする  $A$  内の arc  $\Gamma: \phi(\lambda)$ 、 $0 \leq \lambda \leq 1$ 、 $\phi(0) = p$  をとり、 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\phi(\lambda) - p}{\lambda} = v$  とできることがわかる。

#### § 4. Whitney の stratification

前節に続いて Whitney の研究の紹介を続ける。 $A \subset D \subset C^n$  を前節と同じとし、ここでは、 $A$  は純  $r$ 次元と仮定する。 $D$  内の特異点をもたぬ純次元局所解析的集合を manifold ということにする。

$A$  の stratification (層にわけること)、即ち、 $A$  を manifolds の合併集合にばら

ばらし (各 manifold を stratum という), その状態で特異点の様子などを調べたい。最近, Zariski は equisingularity という概念を導入し, 別の stratification を試みているが (Amer. J. Math. 1965), Whitney は次のようにする。

$\mathcal{M} = \{M_i\}_{i \in I}$  を manifolds の集合とする。

- (I)  $A = \bigcup_{i \in I} M_i$ , disjoint sum で locally finite (即ち,  $i \neq j$  なら  $M_i \cap M_j = \emptyset$ , 各  $x \in A$  に近傍  $U$  がとれ,  $U \cap A_i \neq \emptyset$  となる  $i$  は有限.)。
- (II)  $\bar{M}_i$  及び  $\bar{M}_i - M_i$  は  $D$  内の解析的集合。 ( $\forall i \in I$ , 閉包は  $D$  内でのもの。)
- (III)  $i \neq j, \bar{M}_i \cap M_j, \dim M_i > \dim M_j$  .
- (IV)  $i \neq j, \bar{M}_i \supset M_j, \dim M_i = m$  のとき,  $\forall p \in M_j$  と任意に  $m$ -plane  $T$  を与える。  $\bar{M}_i$  の通常点  $q_\nu$  を  $q_\nu \rightarrow p, T_{q_\nu}(\bar{M}_i) \rightarrow T$  (in  $G^{n-1, m-1}$ ) にとれるならば,  $T_p(M_j) \subset T$  となる。
- (V)  $i \neq j, \bar{M}_i \supset M_j, \dim M_i = m$  とし, 任意に  $p \in M_j$  と  $v \in \mathbb{C}^n$  をとり, 任意に  $m$ -plane  $T$  をとる。このとき,  $M_j$  の点  $p_\nu$  と  $\bar{M}_i$  の通常点  $q_\nu$  と複素数  $a_\nu$  をとり,  $p_\nu \rightarrow p, q_\nu \rightarrow q, a_\nu(p_\nu - q_\nu) \rightarrow v, T_{q_\nu}(\bar{M}_i) \rightarrow T$  とできれば,  $v \in T$  となる。

Whitney は, (I), (II) をみたす  $\mathcal{M}$  は細分して (III) をみたすようにでき, (I), (II), (III) をみたす  $\mathcal{M}$  (これを  $A$  の stratification とよぶ) は細分して (IV), (V) をみたすようにできることを示し, 結局  $A$  に対し (I)~(V) をみたす  $\mathcal{M}$  (regular stratification という) の存在を示す。これが [6] の主定理である。

regular stratification の存在を用いて, 特異点の近傍の状態や,  $C_i(A, p)$  のことが若干調べられる。例えば,  $\forall p_0 \in A, \forall \varepsilon > 0$  に対し,  $\exists \delta > 0$  をとり,  $d(p, p_0) < \delta$  をみたす  $A$  の通常点  $\forall p$  に対し  $\exists v \in T_p(A)$  があり  $d^*(p - p_0, v) < \varepsilon$  となる。(  $d, d^*$  は  $\mathbb{C}^n, \mathbb{P}^{n-1}$  の距離)。  $B$  を  $p$  を通り  $A$  に含まれる解析的部分集合とすると  $C_4(B, p) = C_4(A, p)$  となる。 etc.

さて, 各  $p \in A$  の上に  $C_i(A, p)$  をのせた fibre space を考えよう。

$$C_i(A) = \{ (p, v) \in A \times \mathbb{C}^n \mid v \in C_i(A, p) \} \quad (i = 1, 2, \dots, 6)$$

とおく。  $C_6(A) = T(A)$  が  $D \times \mathbb{C}^n$  で解析的になることはすでに示したが,  $C_4(A)$  と  $C_5(A)$



もそうなることが示される。特に、 $A$ の特異点集合を $S$ とするとき、 $C_4(A)$ は $T(A-S)$ を含む最小の解析的集合である。

$C_3(A)$ は $D \times \mathbb{C}^n$ で解析的でない。 $\mathbb{C}^4$ で

$$A = \{ t^2 y^2 - t^2 x^2 + x^3 - y^4 = 0 \}$$

を考えると、 $C_3(A, (0, 0, 0, 0)) = \{ x = 0 \}$ ,  $t \neq 0$  のとき  
 $C_3(A, (0, 0, 0, t)) = \{ y = \pm x \}$  で、 $C_3(A)$ は閉集合でない。

### § 5. semi-analytic fibration

$A \subset D \subset \mathbb{C}^n$ は前節と同じで $\mathcal{M}$ を $A$ のstratification (即ち、前節(i)(ii)(iii)をみたす)とする。 $P_0 \in M \in \mathcal{M}$ のとき、 $P_0$ の近傍 $U_0$ を次のようにとれるとき、 $P_0$ で $\mathcal{M}$ とconsistentなsemi-analytic fibrationがあるという。

$N$ を $P_0$ での $M$ のorthogonal planeとし、 $M_0 = M \cap U_0$ ,  $N_0 = N \cap U_0$ とおく。bijection  $\phi : M_0 \times N_0 \rightarrow U_0$ が存在し、各 $q \in N_0$ に対し、 $F(q) = \{ \phi(p, q) \mid p \in M_0 \}$ とおくとき、

- (i)  $p \in M_0$ を固定すると、 $\phi$ は $q$ について連続、
- (ii)  $q \in N_0$ を固定すると、 $\phi$ は $p$ について正則で、 $M_0$ から $F(q)$ への解析的同型になる。
- (iii) 各 $M' \in \mathcal{M}$ と各 $q \in N_0$ に対し、 $F(q) \cap M' = \emptyset$ か又は $F(q) \subset M'$ のどちらかである。

が成立する。

semi-analytic fibrationがあれば、 $\mathcal{M}$ は前節の(iv)をみたすことはわかる。(v)との関係は不明である。

Whitneyは $A$ が純 $n-1$ 次元のとき、stratification  $\forall \mathcal{M}$ を細分して、純 $n-2$ 次元である $\forall M \in \mathcal{M}$ の各点にsemi-analytic fibrationが存在するようになれることを示している。これは、Zariskiのequisingularityによるstratificationの例にもなっており興味深い。

後記 differential formについて何もふれなかった。Rossi [4] や、Grauert-Kerner, Math. Ann., 153 (1964) 236-260 などに記述がある。

“正則ベクトル場。  $\mathfrak{L}(X)$  は  $[X, Y] = XY - YX$  により Lie algebra になるが、これと、 $X$  の Lie transformation group との間に関係があり（多様体のときと同様な）、これを Kaup [2, 3] が調べている。特に [3] では reduced でない一般の解析空間で議論を行なっている。

#### 文 献

- (1) H. Holmann : Local properties of holomorphic mappings, Conference on complex analysis, Minneapolis 1964, pp. 94-109
- (2) W. Kaup : Holomorphe Vektorfelder und Transformationsgruppen komplexer Räume, Münster or Schriftenreihe, Heft 24, 1963.
- (3) W. Kaup : Infinitesimal Transformationsgruppen Komplexer Räume. Math. Ann. 160 (1965). pp. 72-92.
- (4) H. Rossi : Vector fields on analytic spaces, Annals of Math. 98 (1963), pp. 455-467.
- (5) H. Whitney : Local properties of analytic varieties, Differential and combinatorial topology, Princeton, 1964, pp. 205-244,
- (6) H. Whitney : Tangents to an analytic variety, Annals of Math. (1965) pp. 496-549.