

## 場の量子論における scattering operator

神戸大学理学部 麦 林 布 道

### § 1. Introduction

量子力学とくらべたとき、場の量子論の一番大きな特徴はそれが粒子数の一定でない系を取扱うということである。最も素朴には、場の量子論は無限に多くの自由度をもった系の量子力学であると解釈される。もっとも、相対論的不変性や、無限個の粒子が存在する状態などのうるさいことがらもあるが、ここではそれらを一応論外にして、場の量子論を(可分な) Hilbert 空間におけるベクトルと演算子に関する問題と考える。この問題は近年とみに数学者の興味をひき、この数年来いくつかのグループで研究が行われてきたが、昨年その成果が二つの本にまとめられたので、先づそれらの表題を掲げて、この報告の大体の方向を示すことにする。

[1] K.O. Friedrichs: Perturbation of spectra in Hilbert space, Amer. Math. Soc., Providence, 1965.

[2] F.A. Berezin: Method of second quantization, Nauka, Moscow, 1965.

(ロシア語); 英訳 Academic Press, New York, 1966.

[1]の内容については、これから追々述べていく。[2]はこの報告の主題である scattering operatorにはあまり触れていないが、正準変換(特に演算子について一次の)、二次の演算子の対角化の問題を詳細に検討しており、応用として Thirring model を分析しているので、以下に論ずることがらの今後の発展に大いに寄与することが期待される。

さて、scattering operator の定義の仕方には幾通りかあるが、大別すると次の如くなる。

1. wave operators によって
  - 1 a. time-dependent method
  - 1 b. stationary method,
2. 摂動級数 (Dyson 級数) によって,
3. asymptotic states
4. asymptotic operators から,

量子力学における scattering operator の数学的研究は 1947 年頃 1 a の方法に

よって始められ、その結果はよく知られている。(例えば、[3] ~ [6] を見よ) その後、他の方法による定義もしらべられつつある。1) については、[7] 及びそこに掲げられた文献を見よ。2) に関する研究はあまりないが、例えば [8] がある。3 と 4 の方法は場の量子論において重要になる。

scattering operator が物理的に重要な量であることはいうまでもないが、数学者がこれに関心を示したのは、先づその一歩手前の wave operator で、その存在がいえれば、非摂動系の Hamiltonian  $H_0$  と摂動系の Hamiltonian  $H$  のスペクトルの構造の類似性がわかることであつたと思われる。即ち

$$W_t(H, H_0) = e^{iHt} e^{-iH_0 t}, \quad W_t(H_0, H) = e^{iH_0 t} e^{-iHt}$$

とすれば、次の定理が成立つ [3]

定理 1 wave operators

$$W_{\pm}(H, H_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} W_t(H, H_0) P_0$$

$$W_{\pm}(H_0, H) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} W_t(H_0, H) P$$

が strong limit で存在すれば、

- i)  $W_{\pm} \equiv W_{\pm}(H, H_0) = W_{\pm}^*(H_0, H)$
- ii)  $W_{\pm}^* W_{\pm} = P_0, \quad W_{\pm} W_{\pm}^* = P$
- iii) unitary equivalence (spectral transformation)

$$W_{\pm}(H_0 P_0) = (HP) W_{\pm}, \quad (H_0 P_0) W_{\pm}^* = W_{\pm}^*(HP)$$

- iv) scattering operator

$$S = W_+^* W_-, \quad SS^* = S^* S = 1$$

定理の証明は一切省略するが必要な方は原著をみて頂きたい。

## § 2. 場の量子論における regular perturbation と adjusted operator の強収束

wave operator が強収束の意味で存在するための Hamiltonian に対する条件は、量子力学の場合についていろいろ与えられているが、そのどれもいわゆる regular perturbation の条件よりきつまいようである。一方、場の量子論における regular perturbation は [9] ~ [11] で調べられていて、次のことがわかっている。

$$(1) \quad H = H_0 + \lambda V$$

において、 $H_0$  は self-adjoint (かんたんのために、positive definite),  $V$  は formally symmetric とする。実際問題では  $H_0$  は

$$(2) \quad H_0 = \int w(\vec{k}) a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) d\vec{k}$$

のような形をしている。ここに、 $w = \sqrt{\vec{k}^2 + \mu^2}$  ( $\mu$  は粒子の質量),  $a^*(\vec{k})$ ,  $a(\vec{k})$  は生成消滅演算子である。また  $V$  はいわゆる normal form に書かれていて

$$V = \sum_{\ell, m} V_{\ell m},$$

$$(3) \quad V_{\ell m} = \int a^*(\vec{k}_1) \dots a^*(\vec{k}_\ell) v_{\ell m}(\vec{k}_\ell; (\vec{k})_m) a(\vec{k}'_1) \dots a(\vec{k}'_m) d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}'_m$$

積分核  $v_{\ell m}(\vec{k}_\ell; (\vec{k}')_m)$  は  $\ell$  個の変数  $\vec{k}$  と  $m$  個の変数  $\vec{k}'$  の夫々に関して適当な対称性をもっている。(以下、 $v_{\ell m} \sim v_{\ell m}(\vec{k}; (\vec{k}')_m)$  で表わす)。ここでは、かんたんのために、一種類の粒子の自己相互作用について書いたが、粒子の種類が多くなれば、(1) は (2), (3) のような項の和の形になると了解されたい。

### 定理 2

a. Boson と fixed source の相互作用

Boson の質量  $\mu$  は 0 でないと仮定する。

regular perturbation の条件は  $G_2 \equiv \int d\vec{k} |v|^2 / w^2 < \infty$  である。但し  $v \sim \vec{v}(\vec{k}) = v(\vec{k}) / \sqrt{2W}$  . このとき,  $D(H^{\frac{1}{2}}) = D(H_0^{\frac{1}{2}})$  が成立つ。尚, より強い条件  $G_1 = \int d\vec{k} |v|^2 / w < \infty$  が満たされていれば  $D(H) = D(H_0)$  となる。

b.  $n (= \ell + m)$  個の粒子の相互作用

すべての bosons の質量は 0 でないと仮定する。  $v \sim v_{\ell m}(\vec{k}_\ell; \vec{k}'_m)$  が条件

$$\sum_{p, p'} \left| \int v_{\ell m}(\vec{k}; \vec{k}'_m) h_{p_1}(\vec{k}_1) \dots h_{p'_m}(\vec{k}'_m) d\vec{k}_1 \dots d\vec{k}'_m \right| < \infty$$

を満たすものとする。但し  $\{h_p(\vec{k})\}$  は Hermite 関数の完全系, そのとき,

- i)  $v$  がボーズ演算子について一次ならば, 任意の  $\lambda$  に対して
- ii)  $v$  がボーズ演算子について高々双一次ならば, 充分小さい  $|\lambda|$  に対して (1) は regular perturbation になる。何れの場合も  $D(H) = D(H_0)$  である。

尚, [12] も total Hamiltonian の定義について議論している。

しかし乍ら, 場の量子論においては, 最も簡単な例についても strong limit での wave operator は存在しない。即ち, 中性スカラー・メソンと fixed source の相互作用 (中性スカラー・モデルと呼ぶ) において,  $w\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} W_t(H_0, H)$  は存在するが,  $s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} W_t(H_0, H)$  は存在しないことが示されている [13]。

したがって, 場の量子論では, 量子力学の場合と違って, 定理 1 のような経路から total Hamiltonian のスペクトルの構造を知るわけにはいかない。その代わりに, ここでは, § 1 で scattering operator の定義で述べた 4 に相当する方法が有効である。即ち,  $a\{f^*\} \equiv \int a(\vec{k}) f^*(\vec{k}) d\vec{k}$ ,  $f(\vec{k}) \in L^2$ , とおけば, それに対応する "adjusted operator"

$$W_t^*(H_0, H) a\{f^*\} W_t(H_0, H)$$

の  $t \rightarrow \pm\infty$  のとき strong limit の存在と, その極限演算子の性質について次の定理が証明できる。

定理 3 定理 2 の条件の上に, b については更に条件

$$v_{\ell m}(\vec{k}; \vec{k}'_m) = \sum_{j=1}^{\text{finite}} v_1^{(j)}(\vec{k}_1) \dots v_{\ell+m}^{(j)}(\vec{k}'_m)$$

但し、すべての  $v^{(i)} \in S$  ( $S$ は無限回連続微分可能で、遠方で全ての逆巾より速く0になる関数の全体) が満されているものとする。そのとき、 $D(\mathbb{R}^3)$ で

$$a_{\pm}\{f^*\} \equiv s\text{-}\lim_{t \rightarrow \pm\infty} W_t^*(H_0, H) a\{f^*\} W_t(H_0, H)$$

が存在し、次の関係式が成立つ。 $wf(\vec{k}) \in L^2$  のとき、

$$(4) \quad [H, a_{\pm}\{f^*\}] = -a_{\pm}\{wf^*\}, \quad [H, a_{\pm}^*\{f\}] = a_{\pm}^*\{wf\}.$$

また  $f(\vec{k}), g(\vec{g}) \in L^2$  のとき、

$$[a_{\pm}\{f^*\}, a_{\pm}^*\{g\}] = \int f^*(\vec{k}) g(\vec{k}) d\vec{k}$$

即ち、写像  $a, a^* \rightarrow a_{\pm}, a_{\pm}^*$  は正準変換になっている。

(4)は  $H_0$  と  $a\{f^*\}, a^*\{f\}$  の満たす交換関係と全く同形である。 $H_0$  が作用する Hilbert 空間は  $H_0$  の点スペクトルである粒子が一つも存在しない状態 (free vacuum) を cyclic vector として、それに  $a^*\{f\}$  を有限回施してえられるベクトルの全体で張られている。regular perturbation の条件から、 $H$  は free vacuum に対応する点スペクトル (true vacuum) をもつ。定理 3 は  $H$  が点スペクトルをもてば、それに応じて必ず  $H_0$  のスペクトルと全く同一の構造のものを含んでいることを示している。true vacuum は一般に free vacuum からずれている。

### § 3. Friedrichs の方法

上述の如く、wave operator が同時に spectral transformation を与えていることが、total Hamiltonian のスペクトルの構造を知る上に重要であったが、Friedrichs [1] はその逆の行き方をしている。即ち、spectral transformation を適当な方法で求めて、それから wave operator 乃至 scattering operator を定義して散乱問題を解こうというわけである。今からのそ理論の概要を紹介する。量子力学の場合には、理論は数学的に厳密な形で展開されているが、場の理論になると全く形式的である。それにも拘らず、両方の議論が平行して行われている点に興味があり、また場の理論についてえられている結果

は、一応物理学者を納得させるものを含んでいる。それらの厳密な定式化は今後に残された問題となるであろう。

#### A. 量子力学

定義  $r(\omega, \omega')$  を核とする積分演算子  $R$  (以下  $R \sim r(\omega, \omega')$  と書く) が次の条件をみたすとき, gentle class  $R$  の演算子という。

- 1°  $[H_0, Z] = R$ ,  $R \in R$ , が  $R$  について一次目の同次の解  $Z = XR$  をもつ。ここに  $H_0$  は free Hamiltonian で完全連続スペクトルのみをもつとする。
- 2°  $R$  にある gentle norm  $\|R\|$  が導入できて

$$\|R_1 X R_2\|, \|(X R_1) R_2\| \leq \|R_1\|, \|R_2\|$$

- 3°  $R_0 \in R$ ,  $R \in \bar{R} \implies R_0 X R, (X R_0) R \in R$
  - 4°  $R_1, R_2 \in R \implies X R_1 X R_2 = X(R_1 X R_2 + (X R_0) R_1)$
  - 5° すべての  $R \in R$  について,  $X R \leq r_0 \|R\|$  なる  $r_0$  が存在する。
- いま  $X$  として

$$X R \sim (\omega - \omega')^{-1} r(\omega, \omega'),$$

$$(\omega - \omega')^{-1} = (\omega - \omega')^{-1} + i\pi \delta(\omega - \omega')$$

と選ぶと, 条件 4° は自動的に満たされる。

相互作用 Hamiltonian  $V$  が  $R$  に属しているとして, 方程式

$$R^+ = (1 + X R^+) V, \quad R^- = V(1 - X R^-)$$

を考える。そのとき, 次の定理が成立つ。

定理 4  $\|V\| < 1$  ならば上の方程式は  $R \in R$  なる解をもち

$$U^\pm = 1 \pm X R^\pm$$

で定義される  $U^\pm$  は次の性質をもつ。

$$i) \quad U^+ H = H_0 U^+ \quad , \quad H U^- = U^- H_0$$

$$ii) \quad U^+ U^- = 1 \quad (4^\circ \text{から})$$

$$iii) \quad V \text{が更に } \|V\| < (1+r_0)^{-1} \text{ をみたせば, } U^- U^+ = 1$$

i) によって, 演算子  $W_t(H_0, H)$  は

$$W_t(H_0, H) = (1 + XR^-(t)) U^+$$

と書きかえられる。但し,  $XR^-(t) = e^{iH_0 t} X R^- e^{-iH_0 t}$

補題 1  $R \in R$  のとき

$$s\text{-}\lim XR^+(t) = \begin{cases} X_\infty R, & t \rightarrow \infty \\ 0, & t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

ここに,  $X_\infty R \sim 2\pi i \delta(\omega - \omega') r(\omega, \omega')$

この補題から次の定理がえられる。

定理 5

$$s\text{-}\lim W_t(H_0, H) = \begin{cases} S_0^- U^+, & t \rightarrow \infty \\ U^+, & t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

同様にして

$$s\text{-}\lim W_t(H, H_0) = \begin{cases} U^- S_0^+, & t \rightarrow \infty \\ U^-, & t \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\text{但し, } S_0^\pm = 1 + XR^\pm \quad S_0^+ S_0^- = S_0^- S_0^+ = 1$$

従って、次のようにおいてよい。

$$S_0^- = S \quad , \quad U^+ = W_-^* \quad , \quad S_0^- U^+ = W_+^*$$

$$S_0^+ = S^* \quad , \quad U^- = W_- \quad , \quad U^- S_0^+ = W_+$$

gentle operator の条件 4° は wave operator の unitarity を保証するのに重要である。H<sub>0</sub> が連続スペクトルの下に点スペクトルをもつ場合には 4° はそのままの形で成立たず、次のように修正しなければならない： R<sub>1</sub> = R<sup>+</sup> , R<sub>2</sub> = R<sup>-</sup> に対して

$$XR^+XR^- = X(R^+XR^- + (XR^+)R^-) + 1 - \tau^2, \quad 1 > \tau > 0,$$

$\tau$  は一般に  $\omega$  以外の変数について matrix になっている。その結果 unitary な  $U^\pm$  をうるには、定義(5)を

$$U^+ = (1 + XR^+)^{-1} \quad , \quad U^- = (1 - XR^-)^{-1}$$

で置きかえればよい。 $\tau$  が matrix でなく単なる数の場合には、scattering operator S は  $\tau$  に無関係なことが示される。

## B. 場の量子論

場の量子論の相互作用は gentle class の演算子ではないが、その代りに "totally smooth class of" を導入すると量子力学のときと同じような議論ができる。 $\mathcal{O}_f$  の定義にはいろいろ面倒な準備があるし、また条件のうちにはもともと非常に形式的なものが含まれていて、詳しく書いても仕方がないので、省略するが、とにかく、

$$\mathcal{O}_f = \left\{ Q = \sum_{l,m}^{\text{finite}} Q_{lm} \right\} \quad , \quad Q_{lm} \sim q_{lm}(\omega)_l ; (\omega')_m$$



また  $\mathcal{O}$  の部分集合であって、 $Q_{00} = 0$  なるものの全体を  $\mathcal{O}'$  で表わす。

量子力学のときにならって

$$XQ_{lm} \sim [\omega - \omega']_{lm}^{-1} q_{lm}(\omega)_l; (\omega')_m$$

でもって演算子  $X$  を定義する。ここに

$$[\omega - \omega']_{lm}^{-1} = (\omega - \omega')_{lm}^{-1} + i\pi \delta(\omega - \omega')_{lm}$$

でさらに、 $(\omega - \omega')_{lm} = \omega_1 + \dots + \omega_l - \omega_1 - \dots - \omega'_m$ 、 $lm = 0$  のときは  $\delta(\omega - \omega')_{lm}$  の項はない。 $Q_{00}$  に対しては  $X$  は定義できない。

先づ、相互作用  $V \in \mathcal{O}'$  について方程式

$$(6) \quad :Q^+ e^{XQ^+} : = :e^{XQ^+} :_V, \quad :Q^- e^{XQ^-} : = V :e^{XQ^-} :$$

を考える。 $:$  は Wick の normal product を意味する。

補題 2 方程式(6)が解  $Q^\pm \in \mathcal{O}$  をもてば、 $R^\pm = :Q^\pm e^{\pm XQ^\pm} :$

$$X(R^+ XR^- + (XR^+) R^-) = XR^+ XR^- - (XR^+ XR^-)_{00}$$

を満たす。 $(\quad)_{00}$  は vacuum 期待値である。

定理 6 充分小さい  $V$  に対して

$$\tau^2 \equiv 1 - (XR XR)_{00} > 0$$

であって

$$U^+ = \tau^{-1} (1 + XR^+) , \quad U^- = (1 - XR^-) \tau^{-1}$$

で定義される  $U^\pm$  は次の性質をもつ。

$$i) \quad U^+ H = H_0 U^+ , \quad H U^- = U^- H_0$$

$$ii) \quad U^+ U^- = 1$$

$U^- U^+ = 1$  が成立つための  $V$  の条件は与えられていない。 $U^- U^+ = 1$  を仮定すれば、以下の議論は量子力学のときと同様に行える。この考えに基づいて中性スカラー・モデルの分析がなされている。この場合  $\tau$  は丁度波動関数のくりこみに現われる因数になっている。

理論を相対論的不変な形式に書こうとすると、先づ考えなければならないのが運動量の保存則である。このとき、相互作用は運動量の保存を表わす  $\delta$  関数を含んでいる。Friedrichs

$$\text{は } V = \sum_{\ell, m} V_{\ell m}$$

$$V_{\ell m} \sim \delta(\vec{k} - \vec{k}')_{\ell m} v_{\ell m}^0(\vec{k}_\ell; (\vec{k}')_m)$$

であって、 $v_{\ell m}^0 \sim v_{\ell m}^0(\vec{k}_\ell; (\vec{k}')_m)$  が  $\mathcal{H}$  に属するような相互作用を考えて、conservation smooth な相互作用と呼んでいる。次節で他の場合と比較して掲げる結論は、Lee モデルの分析に基づいたものである。

#### § 4. 結果の比較

以上の結果を次の四点に焦点をおいて比較してみよう。

- 1) wave operator が強収束の意味で存在するかどうか。
- 2) adjusted operator の strong limit が存在するかどうか。

次に  $H_0$  のスペクトルとして、下に有界な絶対連続スペクトルと、その下にある孤立した点スペクトルを仮定する。後者のない場合を(a)、ある場合を(b)とする。場の量子論では、free vacuum があるので常に(b)である。そこで摂動が加わると、

- 3) 点スペクトルがずれるかどうか。
- 4) 連続スペクトルの下端と点スペクトルの間隔が変わるかどうか。(a)の場合には、連続スペクトルの下端がずれるかどうか)

を問題にする。3) を vacuum shift, 4) を mass shift と呼ぼう。場の量子論で mass shift があれば、粒子の質量のくりこみを考えることになる。

表中 weak とは必ずしも weak limit の存在を意味しない。weak limit すら存在しないかも知れない。また、yes は一般にはずれるという程度のことを表わす。

	Quantum Mechanics			Quantum Field Theory		
	regular perturbation*)	gentle perturbation		regular perturbation*)	totally smooth perturbation*)	conservation smooth perturbation
		(a)	(b)			
1	$\lim W_t(H_0, H)$	strong	weak	weak	weak	weak
2	$\lim W_t^*(H_0 H) a(f) W_t(H_0, H)$	/	/	strong	strong	weak
3	vacuum shift	/	/	yes	yes	yes
4	mass shift	no	yes	no	no	yes

\*) 正確にいえば, 更に附加的な条件が必要である。例えば定理3で述べた如く

例として、この表を Lee モデル

$$V \rightleftharpoons N + \theta$$

のいろいろな取扱いにあてはめてみよう。各粒子の個数を  $\mathcal{N}_V$ 、 $\mathcal{N}_N$ 、 $\mathcal{N}_\theta$  とすれば、粒子数の保存則

$$\mathcal{N}_1 \equiv \mathcal{N}_V + \mathcal{N}_N = \text{一定}$$

$$\mathcal{N}_2 \equiv \mathcal{N}_V + \mathcal{N}_\theta = \text{一定}$$

があるので Hilbert 空間全体は  $(\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2)$ -sectors の直和に分解される。この保存則のため、各 sector を独立して量子力学流に取扱えるし、また第二量子化の方法による取扱いも出来るので、結果の比較には都合がよい。

さて、 $(0, 0)$ -sector と  $(1, 1)$ -sector だけを考える。前者は vacuum  $\Psi_0$  free vacuum と true vacuum は同じである。後者は  $a_V^* \Psi_0$  及び  $a_N^* a_\theta^* \Psi_0$  なる形のベクトルで張られている。先づこの  $(1, 1)$ -sector での問題を量子力学流に処理する。V 粒子と N 粒子をとめたとき、この問題は gentle perturbation の (b) の取扱いを受けることになり、physical V のエネルギーが bare V の質量より小さくなるのに、連続スペクトルの下端は動かないので、相対的に mass shift が起ることがよく知られている。V 及び N の recoil を考え、運動量の保存則を考えなければ、場の量子論における regular perturbation 的取扱いが可能になり、vacuum のエネルギーはもともとずれないが、それに対して、 $N-\theta$  散乱を表わす連続スペクトルの下端はもちろん、physical V を表わす連続スペクトルの下端も動かないことが示せる [9]。さらに、運動量保存則を考慮に入れると、conservation smooth perturbation の取扱いに変わり、今度は physical V を表わす連続スペクトルの下端がずれる [1]。具体的な計算によってえられたこれらの結果はいずれも上の表と consistent である。

## §5. おわりに

場の量子論において、今まで数学的に厳密な取扱いが出来ているのは、Lee モデルの如く何らかの保存則があるために自由度が大きく制限されて、実質的に量子力学系とかわらないか、中性

スカラー・モデルの如く total Hamiltonian を対角化する spectral transformation が少くとも形式的には求まっている場合か、その何れかである。わずかに、§ 2 で述べたことがらはこれらの範囲をでている。実際、例えば、荷電スカラー・メソンと fixed source との相互作用をこの理論で取扱うことが出来、total Hamiltonian のスペクトルの様子の一部がわかる。しかし、問題を完全に解くにはまだ程遠い。

一方、場の理論の公理論的方法によって、この方面の問題についても一般的結論が数多くえられているが、話を非相対論的にしたとき、それらに対応するものがどうなっているか、また、それらが Hamiltonian のスペクトルを求めたり、散乱問題を解く上に役立つかどうかを見るのは甚だ興味がある。このことは今後の課題とし、ここではこれらの問題に関連の深そうな二三の解説をおげるに止める [14] ~ [16]。

#### 文 献

[1] , [2] 前 出

[3] S.T. Kuroda: On the existence and unitary property of the scattering operator, *Nuovo Cimento* 12 (1959), 431-454.

[4] S.K. Kuroda: Perturbation of continuous spectra by unbounded operators I, II, *J. Math. Soc. Japan* 11 (1959), 247-262; 12 (1960), 243-257.

[5] T. Kato: Wave operators and unitary equivalence, *Tech. Rep. No. 11, Univ. California, Berkeley, 1963.*

[6] M.Š. Birman: Conditions for the existence of wave operators, *Izv. Akad. Nauk SSSR* 27 (1963), 883-906 (ロシア語)

[7] S.K. Kuroda: Abstract stationary method.

[8] R.T. Prosser: Convergent perturbation expansions for certain wave operators, *J. Math. Phys.* 5 (1964), 708-713.

- [9] Y. Kato and N. Mugibayashi: Regular perturbation and asymptotic limits of operators in quantum field theory, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 103-133.
- [10] Y. Kato and N. Mugibayashi: On the definition of the total Hamiltonian in the fixed-source theory, Prog. Theor. Phys. 30 (1963), 409.
- [11] N. Mugibayashi and Y. Kato: Regular perturbation and asymptotic limits of operators in fixed-source theory, Prog. Theor. Phys. 31 (1964), 300-310.
- [12] A. Galindo: On a class of perturbations in quantum field theory, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 48 (1962), 1128-1134.
- [13] J.M. Cook: Asymptotic properties of a boson field with given source, J. Math. Phys. 2 (1961), 33-45.
- [14] R. Haag: Quantum theory of collision processes. Lectures in Theor. Phys. Vol. 3, Boulder, 1961, pp.326-352.
- [15] H. Araki: Einführung in die axiomatische Quantenfeldtheorie. I,II. Lecture note ETH, Zürich, 1961/62.
- [16] R. Jost: The general theory of quantized fields, Amer. Math. Soc., Providence, 1965.