数理解析研究所講究録
第16巻1966年13-38

自動制御における絶対安定について

東北大学理学部　吉　沢　太　郎

自動制御における絶対安定の問題は1944年に、Lur'e とPostnikov により初めて系統立てて研究された。それ以来非常に多くの論文が現われた。その研究においては、Liapunov の second method が普偏的に用いられ、Liapunov の second method のあらゆる可能性が利用され、1950年代の終りには、このあらゆる可能性が使いはたされた感があり、絶対安定に対する研究は一時それ程活発でなくなり始めた。しかし1959年に Popov が新しい研究方法を展開した。その結果また新しい、興味深い研究が行われ、著しい成果が得られている。例えば Kalman, Yakubovitch, Aizerman 等で、正数微分方程式に対しては Halanay, Popov 等の研究がある。

現在、絶対安定性に関する主な研究分野は大きくわけて

(a) Liapunov の second method による研究（その後の Liapunov の second method の進展により、現在この方法による可能性はさらに拡げられた）。

(b) Popov の frequency response function を用いる研究

(c) 上述の2つの研究における相互関係

詳細については

S. Lefschez: Stability of nonlinear control systems, Academic Press.

A.M.Aizerman and F.R.Gantmacher: Absolute stability of regulator systems, Holden-Day, Inc.

を参照。

ここで、x, b, c を n-vector, A を n×n constant matrix,

σ, ξ, ρ を scalar とし、vector, matrix の transpose は肩に " ' " をつけて表わすことにして、

$$
(1) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + b\xi \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dt} = \phi(\sigma) \\[2ex] \sigma = c'x - \rho\xi \end{cases}
$$

または

$$
(2) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + b\xi \\[2ex] \xi = \phi(\sigma) \\[2ex] \sigma = c'x \end{cases}
$$

で表現される dynamic process を考察する。通常 (1) の場合は in-direct control, (2) の場合は direct control と呼ばれるもので、direct control と indirect control は technical な特性すなわち、amplifier, servo-motor の存在しないか、存在するかによる control system の分類に関したもので、数学的には、indirect control を direct control の particular case として取り扱うことができる。

$\phi(\sigma)$ は control system における characteristic function

とよばれ、すべての σ に対して定義され、 piecewise continuous, $\phi(0) = 0$ かつ additional condition を満たすものとする。ここでは簡明のため

(i) $\phi(\sigma)$ はすべての σ に対して continuous で、 $\phi(0) = 0$

とし、 additional condition としては、いろいろな場合が考えられる。その一つの場合は

(ii) $0 \leqq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leqq k$, k: finite positive number または infinity.

$k = \infty$ のときはこの条件は $0 \leqq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma}$ または $\sigma\phi(\sigma) \geqq 0$ で表わされる。また任意の rral number k_1, $k_2 (k_1 < k_2)$ に対して

$$k_1 \leqq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leqq k_2$$

の場合は、 $\phi_1(\sigma) = \phi(\sigma) - k_1\sigma$ とすれば、 $0 \leqq \frac{\phi_1(\sigma)}{\sigma} \leqq k_2 - k_1$ となり (ii) の場合になる。

また特別な additional condition として、

(iii) $\sigma\phi(\sigma) > 0$ for $\sigma \neq 0$, $\int_0^{\infty} \phi(\sigma) d\sigma = \int_0^{-\infty} \phi(\sigma) d\sigma = \infty$

が考えられる。

いま (2) における matrix A の characteristic root の一つが 0 であるとする

nonsingular linear transformation により (2) は

$$\frac{dz}{dt} = A_1{}^* z + s\xi, \quad \xi = \phi(\sigma), \quad \sigma = c^{*\prime} z$$

に transform される。ここで A* は第 n 列の要素はすべて 0 の行

列である。 c^* の第 n 番目の成分 c_n^* が 0 の場合は z の成分 $z_1, \ldots, z_{n-1}$ までに対する system が得られ、この system は $z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0$, $z_n = \text{const.}$ という特別な解の族をもち、zero solution が asymptotically stable でないから我々の問題外になる。 $c_n^* \neq 0$ ならば z_n は σ と $z_1, \ldots, z_n$ で表わされるから結局、 y, s, e を $(n-1)$-vector, ρ を scalar, A_1 を $(n-1) \times (n-1)$ matrix として、 (2) は

$$
(3) \quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A_1 y + s\phi(\sigma) \\[2ex] \dfrac{d\sigma}{dt} = e'y - \rho\phi(\sigma) \end{cases}
$$

に transform される。 (3) の代りに、しばしば u を $(n-1)$-vector とし differential equation

$$
(4) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A_1 u + s\xi \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dt} = \phi(\sigma) \\[2ex] \sigma = e'u - \rho\xi \end{cases}
$$

すなわち (1) の形のものを考える。 (4) において、 $(u,\xi) \longrightarrow (y,\sigma)$ への変換

$$
y = A_1 u + s\xi, \qquad \sigma = e'u - \rho\xi
$$

を行うと、 (3) に transform される。もし

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & s \\ e' & -\rho \end{vmatrix} \neq 0$$

ならば (3) と (4) は equivalent である。しかし $\Delta \neq 0$ は (3) において $\phi(\sigma) = h\sigma$, ($h \neq 0$) のとき、すなわち

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A_1 y + sh\sigma \\[2ex] \dfrac{d\sigma}{dt} = e'y - \rho h\sigma \end{cases}$$

の $y=0$, $\sigma = 0$ が asymptotically stable であるための必要条件である。 $\Delta = 0$ のときは asymptotic stabality が成立しないから、我々の問題外になる。

また $\det A_1 \neq 0$ ならば (4) は nonsingular transformation

$$y = A_1 u + s\xi, \quad \xi = \xi$$

により

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = A_1 y + s\phi(\sigma) \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dt} = \phi(\sigma) \\[2ex] \sigma = f'y - \gamma\xi \qquad f:(n-1)\text{-vector},\ \gamma:\text{scalar} \end{cases}$$

に transform される。したがつて、 $\Delta \neq 0$, $\det A_1 \neq 0$ のとき(3), (4), (6) はすべて equivalent である。

(3), (4), (6) の linear term に対する characteristic equation は

$$\lambda \det(\lambda E - A_1) = 0$$

したがつて、 $\det A_1 \neq 0$ ならば、 $\det(\lambda E - A_1) = 0$ は zero root を持つことはできない。よつて (6) の linear term に対する characteristic equation は simple zero root をもつ。

このようにして、もし A の characteristic root の一つが 0 ならば、system (2) は (3) または (4) に transform される。さらに zero root が simple zeor root ならば (2) は (6) に transform される。

A の characteristic root がすべて negative real part をもつとき、 A は stable であると言われ、このような場合は system は principal case といわれる。 A のどの characteristic root も real part は正でない場合は、 system は particular case と言われ、この特別な場合として、 zero root をもち、他の characteristic root は negative real part を持つ場合は (3) または (4) により discuss される。この zero root が simple root の場合はまた (6) を利用することができる。

A_1 の characteristic root はすべて negative real part をもつ場合は、上述の如く (3), (4), (6) はすべて同値で、この場合が通常 indirect control の system とよばれるものである。

system (1), (2) と (i), (ii) または (i), (iii) をみたす

characteristic function $\phi(\sigma)$ の class に関する absolute stability について考えてみる。たとえば

与えられた k に対して、(i), (ii) をみたす任意の $\phi(\sigma)$ に対して (2) の zero solution が globally asymptotically stable であるとき、system (2) の class は absolutely stable であると言われる。

(ii) における条件 $0 \leqq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leqq k$ は principal case においてのみ意味がある。実際 particular case において、$\phi(\sigma) \equiv 0$ はこの条件を満たすが、この場合 zero solution は asymptotically stable でない。したがつて particular case においては、

$$(7) \qquad 0 < \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leqq k \qquad (\sigma \neq 0)$$

または

$$(7') \qquad \varepsilon \leqq \frac{\phi(\sigma)}{\sigma} \leqq k \qquad (\sigma \neq 0), \quad \varepsilon : \text{arbitrary small} > 0.$$

自然な問題として、いわゆる Aizerman's conjecture がある。すなわちすべての linear characteristic function $\phi(\sigma) = h\sigma$, $(0 \leqq h \leqq k)$ に対する system (2) の asymptotic stability から、system の absolute stability が得られないか。このような conjecture は一般に正しくないことは Pliss により１９５８年に示された。

ここで少し歴史的なことにふれると、１９４４年に Lur'e とPostnikov が $k = \infty$ の場合について考え、初めて、x に関する２次形式と $\phi(\sigma)$ の積分を加えた形の Liapunov function を用いた。Lur'e はさらに resolving equation とよばれる連立方程式を考え、Liapunov function が必要な条件を満たすように附加すべき条件について考察した。その後特に Yakubovitch はこの方法をいわゆる indirect control において発展さした。1951年に Malkin は direct control を indirect control の particular case として、direct control system を取り扱い Lur'e が考えたような Liapunov function の system の解に沿つての derivative が negative definite になる条件を Sylvester criteria を直接適用することにより求めた。しかし1960年に Rozenvasser は Malkin の条件は indirect control の場合にのみ意味があり、direct control に対しては意味がないことを指摘した。ごく最近の著しい結果は、Kalman, Yakubovitch の研究で、それは Lur'e の resolving equation の方法と Popov の frequency の方法の間の関係を理解するのに非常に重要なものである。

Liapunov の second method を用いて absolute stability を論ずるのに基本になるのは次に述べる Barbaskin-Krasovskü の定理と、二次形式に対する Liapunov の定理である。

<u>Theorem 1.</u> autonomous system

$$(8) \qquad \frac{dx}{dt} = F(x)$$

において $F(x)$ は $\|x\| < \infty$ で連続、$F(0) \equiv 0$. 次の条件を満たす連続微分可能な scalar function $V(x)$ が $\|x\| < \infty$ で存在するとする。その条件は

1° $V(x)$ は positive definite

2° $\|x\| \to \infty$ のとき $V(x) \to \infty$

3° $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot F(x) \leqq -c(\|x\|)$, $c(r)$: positive definite

このとき (8) の zero solution は globally asymptotically stable (asymptotically stable in the large) である。

一般に P を $n\times n$ matrix, $P = P'$ とするとき二次形式 $x'Px$ が positive definite ならば $P > 0$ で表わす。また $n\times n$ matrix Q のすべての characteristic root が negative real part を持つとき、Q は stable であるといわれる。

Theorem 2. Aが $n\times n$ stable matrix のとき、任意の $n\times n$ symmetric matrix C に対し、$B = B'$, $A'B + BA = -C$ なる$n\times n$ matrix B が一意的に存在する。さらに $C > 0$ ならば $B > 0$ である。

ここで行列 M の determinant についての、ある関係式を lemma として述べておく。

Lemma 1. M を $(n+1)\times(n+1)$ matrix とし、

$$M = \begin{pmatrix} N & p \\ q' & \alpha \end{pmatrix}$$

とする。ここに N は nonsingular $n\times n$ matrix, p, q は n-vector, α は scalar とする。すると

$$\det M = (\alpha - q'N^{-1}p)\det N$$

これはつぎのようにして証明される。

$$\begin{pmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N & p \\ q' & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & N^{-1}p \\ q' & \alpha \end{pmatrix}$$

一方

$$\begin{vmatrix} E & N^{-1}p \\ q' & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & N^{-1}p \\ 0 & \alpha - q'N^{-1}p \end{vmatrix} = \alpha - q'N^{-1}p$$

したがって

$$\begin{vmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} N & p \\ q' & \alpha \end{vmatrix} = \alpha - q'N^{-1}p$$

$$\begin{vmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \det N^{-1} = \frac{1}{\det N}$$ であるから

$$\det M = (\alpha - q'N^{-1}p)\det N$$

が得られる。この関係は N, R をそれぞれ n×n, s×s matrix, P, Q を n×s matrix, N は nonsingular のとき

$$\begin{vmatrix} N & P \\ Q' & R \end{vmatrix} = \det(R - Q'N^{-1}P)\det N$$

と拡張できる。

まず system (2) の particular case すなわち indirect control

$$(9) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + b\xi \\[2ex] \dfrac{d\xi}{dt} = \phi(\sigma) \\[2ex] \sigma = c'u - \rho\xi \end{cases}$$ A: stable, $\phi(\sigma)$は(i), (iii) をみたす

について考える。 system (4) について述べたように変換

$$(10) \qquad x = Au + b\xi, \qquad \sigma = c'u - \rho\xi$$

により (u,ξ) より (x,σ) に変換すると

$$(11)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + b\phi(\sigma) \\ \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = c'x - \rho\phi(\sigma) \end{cases}$$

まえに述べたように、 $\Delta = \begin{vmatrix} A & b \\ c' & -\rho \end{vmatrix} \neq 0$ は $\phi(\sigma) = h\sigma,\ (h \neq 0)$ のときの asymptotic stability の必要条件、いいかえれば変換 (10) が nonsingular であるための必要十分条件である。いまの場合 A は stable であるから $\det A \neq 0$. よつて Lemma 1 の関係により

$$(12)\qquad \rho \neq -c'A^{-1}b$$

(12) は $x = 0,\ \sigma = 0$ が (11) の唯一つの critical point であるための必要十分条件である。

任意の $C > 0$ に対して、 A は stable だから Theorem 2 により、 $A'B + BA = -C$ かつ $B > 0$ なる matrix B が存在する。この B に対して

$$(13)\qquad V(x,\sigma) = x'Bx + \int_0^{\sigma} \phi(\sigma)d\sigma$$

を考えると、 V は x, σ に関して positive definite, $\|x\| + |\sigma| \to \infty$ ならば $V \to \infty$. (11) の解に沿つての derivative を計算すれば

$$(14)\quad \begin{cases} -\dot{V} = x'Cx + \rho\phi^2(\sigma) + 2\phi(\sigma)d'x, \\ d = -(Bb + \frac{1}{2}c) \end{cases}$$

したがつて $\dot{V}$ が negative definite ならば Theorem 1 により $x = 0,\ \sigma = 0$ は globally asymptotically stable になる。 $-\dot{V}$

が positive definite になるための必要十分条件は Sylvester inequality により、 $C > 0$ であるから

$$\begin{vmatrix} C & d \\ d' & \rho \end{vmatrix} > 0$$

$\det C > 0$ であるから Lemma 1 の関係により

$$\rho > (Bb + \frac{1}{2} c)' C^{-1} (Bb + \frac{1}{2} c) \tag{15}$$

したがつて $C > 0$, (12), (15) が成り立てば absolute stability が結論される。しかし一般に LaSalle により

<u>A が stable, $C > 0$ ならば $d'C^{-1}d \geqq -c'A^{-1}b$</u>

が成り立つことが示された。よつて $C > 0$ と (15) から当然 (12) (さらに強い条件 $\rho > -c'A^{-1}b$) が成り立つ。よつて、

<u>Theorem 3.</u> system (9) は

$$C > 0, \qquad \rho > (Bb + \frac{1}{2} c')' C^{-1} (Bb + \frac{1}{2} c), \tag{16}$$

$$A'B + BA = -C$$

ならば absolutely stable である。

一方 Yacubovich は (14) が positive definite であるための必要十分条件は

<u>$C - gg' > 0$ なる real vector $g = \dfrac{d}{\sqrt{\rho}}$ が存在する</u>

であることを示した。これは条件 (16) と同値である。

また Theorem 3 の条件の下では $\phi(\sigma)$ の満たす条件 (iii) において integral が divergent である条件なしで、すなわちただ条件

$$\sigma\phi(\sigma) > 0 \qquad \text{for} \quad \sigma \neq 0$$

をみたす characteristic function に対して absolute stability が結論できることが LaSalle により示されている。

いま上述と同じような考察を derect control (2) すなわち

$$(17) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + b\phi(\sigma) \\ \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = c'Ax + c'b\phi(\sigma) \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A\text{: stable,} \\ \phi(\sigma) \text{ は (i), (iii) をみたす} \end{array}$$

に対して行つてみる。形としては system (11) と同じである。Liapunov function (13) を考えると、いまの場合は (14) の代りに

$$(18) \qquad \dot{V} = x'Cx - 2(Bb + \frac{1}{2}A'c)'x\phi(\sigma) - c'b\phi^2(\sigma)$$

したがつて (15) に相当するものは

$$-c'b > (Bb + \frac{1}{2}A'c)'C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}A'c)$$

しかしこれは LaSalle の inequality により $-c'b > -c'b$ という矛盾をおこすから意味のないものになる。これは $\dot{V}$ は

$$(19) \qquad \dot{V} = (2Bx + \phi(\sigma)c)'(Ax + b\phi(\sigma))$$

とも書けるから $\dot{V}$ が positive definite でないことがわかるから、このように direct control を indirect control の特別な形として、indirect control に対する結果をそのまま適用すると間違いがおこる。

system (2) に対して absolute stability が成り立つためには、

原点が唯一つの critical point でなくてはならない。すなわち

$$Ax + b\phi(\sigma) = Ax + b\phi(c'x) = 0$$

を満たすのは $x = 0$ だけでなくてはならない。そこで次のことを仮定する。

(a) $Ax + b\phi(c'x) = 0$ はすべての admissible function $\phi(\sigma)$ に対して $x = 0$ のみを解に持つ。

(b) ある $C > 0$ に対して, $-c'b=(Bb+\frac{1}{2}A'c)'c^{-1}(Bb+\frac{1}{2}A'c)$ すると $-\dot{V}$ は positive semi-definite で、x, ϕ の $n + 1$ 次元空間の一次元部分空間においてのみ $\dot{V} = 0$ である。なんとなれば

$$-\dot{V} = (x - c^{-1}d\phi)'C(x - c^{-1}d\phi), \quad d = Bb + \frac{1}{2}A'c$$

であるから $x - C^{-1}d\phi = 0$ に対して $\dot{V} = 0$. 一方 (19) により $Ax + b\phi = 0$ のとき $\dot{V} = 0$ であるから、$Ax + b\phi = 0$ のときそしてそのときのみ $\dot{V} = 0$ したがつて仮定 (a), (b) から $-\dot{V}$ は x に関して positive definite になる。よつて absolute stability が結論できる。条件 (a) は $c'A^{-1}b \geqq 0$ と equivalent になる。それはつぎのようにして示される。$\phi(\sigma) = h\sigma (h > 0)$ に対しても $x = 0$ のみが解であるから $(A + hbc')x = 0$ よりすべての $h > 0$ に対して、$A + hbc'$ が nonsingular でなくてはならない。逆にすべての $h > 0$ に対して $A + hbc'$ が nonsingular とする。ある x_0 に対して、$Ax_0 + b\ (c'x_0) = 0$ とする。 $0 < \frac{\phi(\sigma)}{\sigma}\ (\sigma \neq 0)$ であるから、ある $h_0 > 0$ に対して $\phi(c'x_0) = h_0 c'x_0$ すなわち $(A + h_0 bc')x_0 = 0$ よつて $x_0 = 0$ が得られる。このことは条件 (a) と $A + hbc'$ がすべての $h > 0$ に対して nonsingular であることは equivalent であ

ることを示している。一方 $(E + hbc'A^{-1})A = A + hbc'$, $\det(E + hbc'A^{-1}) = 1 + hc'A^{-1}b$

よつて

$$\det(A + hbc') = (1 + hc'A^{-1}b)\det A$$

かつ $\det A \neq 0$より $c'A^{-1}b \geqq 0$ のときそのときのみすべての $h > 0$ に対して $\det(A + hbc') \neq 0$ であることがわかる。したがつて条件 (a) と $c'A^{-1}b \geqq 0$ の equivalent であることがわかる。以上のことから、

<u>Theorem 4</u>. 条件 (b) および $c'A^{-1}b \geqq 0$ が成り立つならば、system. (17) は absolutely stable である。

また Aizerman, Gamtmacher は (18) の右辺に $\alpha\sigma\phi(\sigma)$ $(\alpha > 0)$ を加えて、ひいて

$$-\dot{V} = \{x'Cx - 2(Bb + \frac{1}{2}A'c + \frac{1}{2}\alpha c)'x\phi(\sigma) - c'b\phi^2(\sigma)\} + \alpha\sigma\phi(\sigma)$$

を考え、これが x, ϕ に関して positive definite になる必要十分条件を (15) を得たと同様にして

$$(20) \quad -c'b > (Bb + \frac{1}{2}A'c + \frac{1}{2}\alpha c)'C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}A'c + \frac{1}{2}\alpha c)$$

を得た。

つぎに system (2) すなわち

$$(21) \quad \begin{cases} \dfrac{dt}{dt} = Ax + b\phi(\sigma) \\ \sigma = c'x \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A\text{: stable,} \\ \phi(\sigma)\ \text{は (i), (ii) をみたす} \end{array}$$

を考える。ここで Liapunov function として

$$(22) \qquad V(x,\sigma) = x'Bx + \beta\int_0^\sigma \phi(\sigma)d\sigma \qquad B > 0,\ \beta \geqq 0$$

を考える。 $C > 0$ に対して B は $A'B + BA = -C$ を満たすものとする。

$\dot{V}$ を求めると

$$(23) \quad \dot{V} = -x'Cx + (2b'B + \beta c'A)x\phi(\sigma) + \beta c'b\phi^2(\sigma)$$

これが x, ϕ について positive definite にならないのは

$$\dot{V} = (2x'B + \beta\phi(\sigma)c')(Ax + b\phi(\sigma))$$

よりわかる。そこで $(\sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k})\phi(\sigma) \geqq 0$ を加減して

$$\dot{V} = -S(x,\phi(\sigma)) - (\sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k})\phi(\sigma)$$

$$S(x,\phi(\sigma)) = -\dot{V} - (\sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k})\phi(\sigma)$$

$$= x'Cx - (2b'B + \beta c'A + c')x\phi(\sigma) + \phi^2(\sigma)\{\frac{1}{k} - \beta c'b\}$$

(Rozenvasser は $k = \infty$ の場合を考えた。この場合は $\sigma\phi(\sigma)$ を加減すればよい。)。したがつて、もし $S(x,\phi)$ が positive definite ならば $v \leqq -S(x,\phi)$ で Theorem 1の条件をみたす。

$$\alpha' = b'B + \frac{1}{2}\beta c'A + \frac{1}{2}c', \qquad r = \frac{1}{k} - \beta c'b, \qquad y = \phi(\sigma)$$

とおくと

$$S(x,y) = x'Cx - 2d'xy + ry^2$$

したがつて問題は $S(x,y)$ を x,y について positive definite にすることになる。

negative definite の derivative を持つ positive definite の Liapunov function V を作る上述の方法は S-method と言われる。

$r > 0$ のときは Sylvester inequality により (15) を導いたと同様にして $\begin{vmatrix} C & -\alpha \\ -\alpha' & r \end{vmatrix} > 0$ より $r > \alpha' C^{-1}\alpha$ が得られる。よつて、

$r > 0$ のとき $S(x,\phi(\sigma))$ が positive definite になるための必要十分条件は

$$(25) \qquad \alpha' C^{-1}\alpha + \beta c' b < \frac{1}{k}$$

$r > 0$ の場合また別な方法として次の方法がある。$S(x,y)$ はまた

$$(26) \qquad S(x,y) = r(y - \frac{1}{r}\alpha' x)^2 + x' C x - \frac{1}{r}(\alpha' x)^2$$

と書ける。これよりわかるように $S(x,y)$ が positive definite になるための必要十分条件は

$$(27) \qquad x' C x - \frac{1}{r}(\alpha' x)^2 = x'(C - \frac{1}{r}\alpha\alpha')x = x' Q x$$

が positive definite になることである。$C - \frac{1}{r}\alpha\alpha' = Q$ より

$$(28) \qquad C = Q + \frac{1}{r}\alpha\alpha'$$

Theorem 2 における C を Q および $\alpha\alpha'$ とした場合に得られる行列をそれぞれ D, F とする。すなわち

$$A' D + DA = -Q, \qquad A' F + FA = -\alpha\alpha'$$

$A'B + BA = -C$ であるから (28) により $D = B - \frac{1}{r}F$ が得られる。

$$Db = Bb - \frac{1}{r}Fb, \quad Bb = \alpha - \frac{1}{2}\beta A'c - \frac{1}{2}c$$

であるから

$$(29) \qquad \alpha = \frac{1}{r}Fb + \frac{1}{2}\beta A'c + \frac{1}{2}c \ Db$$

もし、 $Q > 0$ を (29) が real solution $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を持つように選らぶことができると、 C を (28) により定義すれば $\frac{1}{r}\alpha\alpha'$ は positive semi-definite であるから $C > 0$. これに対して B を定義する。すると $\beta \geqq 0$, $r = \frac{1}{k} - \beta c'b > 0$ なる β に対する Liapunov function (22) は system (21) の absolute stability をあたえる。

$r = 0$ のとき、すなわち $\frac{1}{k} - \beta c'b = 0$ のときは

$$S(x,y) = x'Cx - 2\alpha'xy$$

は x,y について positive definite にならない。しかし $\alpha = 0$ ならば x について positive definite になりうる。このときは

$$S(x,y) = x'Cx, \quad \dot{V} = -x'Cx - (\sigma - \frac{\phi(\sigma)}{k})\phi(\sigma)$$

この場合も、まえと同様にして $u = (u_1, \ldots, u_n)$ に対し

$$C = Q + uu', \quad Q > 0$$

$$A'B + BA = -C, \quad A'D + DA = -Q, \quad A'F + FA = -uu'$$

とすれば $B = D + F$ したがつて (29) に相当するものは

$$(30) \qquad Fb + \frac{1}{2}\beta A'c + \frac{1}{2}c + Db = 0$$

となる。(29), (30) は $\alpha = \sqrt{r}\,u$ とすれば一つの式

$$\sqrt{r}\,u = Fb + \frac{1}{2}\beta A'c + \frac{1}{2}c + Db$$

で表わされる。これが Lur'e の resolving equation とよばれるものである。

以上述べたことはまとめると

<u>Theorem 5.</u> resolving equation が real solution を持つように β を選らぶことができると、system (21) に対して

$$V = x'Bx + \beta\int_0^\sigma \phi(\sigma)d\sigma, \qquad \beta \geqq 0, \qquad B > 0$$

の形の Liapunov function が存在し、したがつて system (21) は、absolutely stable である。

ここで興味ある結果は、

<u>Theorem 6.</u> (Pliss)

$$V = x'Bx + \beta\int_0^\sigma \phi(\sigma)d\sigma, \qquad B > 0, \qquad \beta \geqq 0 \quad \text{given}$$

が system (21) に対する Liapunov function であるためには、任意の linear characteristic $\phi(\sigma) = h\sigma$ $(0 \leqq h \leqq k)$ に対して V が

1° V は x について positive definite

2° $\|x\| \to \infty$ のとき $V \to \infty$

3° $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(Ax + b\phi(\sigma)) \leqq -c(\|x\|)$, c(r): positive definite

をみたすことが必要である。もしこれらの条件がすべての linear characteristic $\phi(\sigma) = h\sigma$ $(0 \leqq h \leqq k)$ に対して満たされるならば、

これらの条件はまた任意の nonlinear characteristic $\phi(\sigma)\,(0\leqq\frac{\phi(\sigma)}{\sigma}\leqq k)$ に対しても満たされる。このことは $k=\infty$ のときも成り立つ。

(23) から明かに $\dot{V}$ の definiteness は linear characteristic のみで定められねばならない。それは $\phi(\sigma)$ の任意の値は $0\leqq\frac{\phi(\sigma)}{\sigma}\leqq k$ により $\phi(\sigma)=h_0\sigma\ (0\leqq h_0\leqq k)$ であるから、この事実により上の定理が成り立つことがわかる。

つぎに Popov による frequency method について少しふれておく。system (2) すなわち

$$
(31)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + b\xi \\ \xi = \phi(\sigma) \\ \sigma = c'x \end{cases}
\qquad \begin{array}{l} A\text{: stable,} \\ \phi(\sigma)\ \text{は (i), (ii)をみたす} \end{array}
$$

を考える。E を unit matrix とし、matrix $\lambda E - A$ を A_λ で表わす。operator $\frac{d}{dt}$ を p で表わすと (31) は

$$px - Ax = b\xi, \qquad c'x - \sigma = 0$$

p を形式的に一つの number として、

$$
(32)\quad \begin{cases} (pE - A)x = b\xi \\ c'x - \sigma = 0 \end{cases}
$$

より $-\sigma$ を解く。$\begin{vmatrix} A_p & 0 \\ c' & 1 \end{vmatrix} = \det A_p$ であるから p が A の characteristic root でないときは

$$\det A_p \neq 0,$$

$$-\sigma = \frac{\begin{vmatrix} A_p & b \\ c' & 0 \end{vmatrix}}{\det A_p}\cdot\xi$$

$\det A_p$ は p の n 次多項式、$\begin{vmatrix} A_p & b \\ c' & 0 \end{vmatrix}$ は p の $m(m < n)$ 次の多項式である。

$$\frac{\begin{vmatrix} A_p & b \\ c' & 0 \end{vmatrix}}{\det A_p} = W(p) \text{ とおくと } \quad -\sigma = W(p)\xi$$

W(p) は system の linear part の transfer function とよばれる。ω を real number, $i = \sqrt{-1}$ として $W(i\omega) = \begin{vmatrix} A_{i\omega} & b \\ c' & 0 \end{vmatrix} \Big/ \det A_{i\omega}$ は system の lenear part の frequency response といわれる。

A は stable であるから $\det A_{i\omega} \neq 0$. Lemma 1 の関係式により

$$\begin{vmatrix} A_{i\omega} & b \\ c' & 0 \end{vmatrix} = (-c'A_{i\omega}^{-1} b) \det A_{i\omega}$$

であるから

$$W(i\omega) = -c'A_{i\omega}^{-1} b. \tag{33}$$

つぎに system (1) について考察する。A は stable で、$\phi(\sigma)$ は (i), (iii) をみたすとする。$\det A \neq 0$ であるから (1) は (6) の形に変換される。文字を書きかえて変換された式を

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + b\phi(\sigma) \\ \frac{d\xi}{dt} &= \phi(\sigma) \\ \sigma &= c'x - \gamma\xi \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} &A\text{: stable,} \\ &\phi(\sigma) \text{ は (i), (iii) をみたす} \end{aligned} \tag{34}$$

とする。$\gamma = 0$ のときは direct control になるから $\gamma \neq 0$ とする。(12) を導いたときと同じ理由で $\gamma > 0$ が必要条件であること

がわかる。 $\gamma > 0$ であるから (34) は変換

$$x = x, \qquad \sigma = c'x - \gamma\xi$$

により equivalent system

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + b\phi(\sigma) \\ \dfrac{d\sigma}{dt} = c'Ax - \rho\phi(\sigma) \\ \rho = \gamma - c'b \end{cases} \qquad \begin{array}{l} A:\ \text{stable}, \\ \phi(\sigma) \text{ は (i), (iii)をみたす} \end{array}$$

に transform される。このときは

$$-\sigma = \frac{\begin{vmatrix} A_p & b \\ c'A & \rho \end{vmatrix}}{p\cdot\det A_p} \qquad W(i\omega) = \frac{\begin{vmatrix} A_{i\omega} & b \\ c'A & \rho \end{vmatrix}}{i\omega\cdot\det A_{i\omega}}$$

$$\begin{vmatrix} i\omega E-A & b \\ c'A & \gamma-c'b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i\omega E-A & 0 \\ c'A & \gamma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i\omega E-A & b \\ c'A & -c'b \end{vmatrix}$$

$$= \gamma \det A_{i\omega} + \begin{vmatrix} i\omega E-A & b \\ i\omega c' & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \gamma \det A_{i\omega} + (-i\omega c'A_{i\omega}^{-1} b)\det A_{i\omega}$$

したがつて

$$(36)\qquad W(i\omega) = -c'A_{i\omega}^{-1} b + \frac{\gamma}{i\omega}$$

frequency response はまた次のようにして定義される。system の linear part すなわち $\dfrac{dx}{dt} = Ax$ の fundamental matrix e^{At} に対して

$$v(t) = c'e^{At}\ b$$

とし、 v(t) の Fourier transform

$$F(v) = N(i\omega) = -c'\int_0^\infty e^{-A_{i\omega}t}\,dt\cdot b$$

を考えると

$$N(i\omega) = -c'A_{i\omega}^{-1}[e^{-A_{i\omega}t}]_0^\infty\ b = -c'A_{i\omega}^{-1}\ b$$

よつて $W(i\omega) = N(i\omega)+\frac{\gamma}{i\omega}$ で定義される。

ここで Popov の定理を述べておく。

Theorem 7. system (31) の absolute stability に対する十分条件は、すべての $\omega \geqq 0$ に対して

(37) $$\mathrm{Re}(1 + i\omega q)W(i\omega) + \frac{1}{k} > 0$$

が成り立つ finite real number が存在することである。

$k = \infty$ の場合は、ある $q \geqq 0$ とすべての $\omega \geqq 0$ に対し

(38) $$\mathrm{Re}(1 + i\omega q)W(i\omega) > 0$$

さらに、

$$\lim_{\omega\to\infty} i\omega\, W(i\omega) \neq 0$$

ならば system (31) は absolutely stable である。

Theorem 8. system (34) の absolute stability に対する十分条件は、 $\gamma > 0$ で、ある $q \geqq 0$ およびすべての real ω に対して、

(39) $$\mathrm{Re}(1 + i\omega q)W(i\omega) \geqq 0$$

が成り立つことである。

Popov はまた system (2) において、 A が 2 つの zero characteristic root をもつ場合に彼の方法を適用した。また Popov の方法は functional-differential equation に Halanay により適用された。

いづれの場合にも Popov の method には Fourier transformation が用いられるが証明は可成り elementary である。

たとえば条件 (39) の幾何学的意味はつぎのようである。

$$c'A_i^{-1}\omega b + \frac{\gamma}{i\,\omega} = s_1(\omega) + i\omega S_2(\omega)$$

とおくと、W(p) が p の rational function であるから $s_1(\omega)$, $s_2(\omega)$ は ω の real rational function である。すると (39) は

$$s_1(\omega) - q\omega s_2(\omega) \geqq 0$$

real xy-plane 上で、直線 L : x-qy = 0 を考える。すると (39) は curve : $x=s_1(\omega)$, $y=\omega s_2(\omega)$ は直線 L の下にあることを示している。

最後に Liapunov function と Popov の条件について述べておく。まず Popov は次の定理を示した。

<u>Theorem 9</u>. もし system (34) の absolute stability が x, σ の quadratic form と $\beta\int_0^\sigma \phi(\sigma)d\sigma$ の和の形の Liapunov function v(x, σ) により定められるならば、(39) をみたすような $q \geqq 0$ が存在する。

また system (31)に対してはつぎのことが証明される。

<u>Theorem 10</u>. Popov の条件 (37) は S-method により作ることができる。

$$V = x'Bx + \beta\int_0^\sigma \phi(\sigma)d\sigma$$

の形の Liapunov function が存在するための必要十分条件である。

ここでごく最近の Kalman, Yacubovich の研究について述べておく。考える system は (35) である。Liapunov function として

(40) $V(x, \sigma) = x'Bx + \alpha(\sigma - c'x)^2 + \beta \int_0^\sigma \phi(\sigma)d\sigma$

を考えると $\dot{V}$ は

(41) $-\dot{V} = x'Cx + \beta\rho\phi^2(\sigma) + 2d_0'x\phi(\sigma) + 2\alpha\gamma\sigma\phi(\sigma)$

$$d_0 = -Bb - (\frac{1}{2}\beta A'c + \alpha\gamma c)$$

Popov の inequality (39) は Kalman によりつぎのように modify された。すなわち

(42) $P(\alpha, \beta, \omega) = \beta\gamma + Re\{(2\alpha\gamma + i\omega\beta)(-c'A_{i\omega}^{-1}b)\} \geqq 0$

for all real ω and some pair α, β such that

$$\alpha \geqq 0, \beta \geqq 0, \alpha + \beta > 0$$

明かに $\alpha \neq 0$ に対しては (39) が成りたつ限り equivalent になる。

A を stable matrix, $D > 0$ を symmetric matrix, $b \neq 0$, k を vector, $\tau \geqq 0$, $\varepsilon > 0$ を scalar とすれば、system

(43) $A'B + BA = -qq' - \varepsilon D, \quad -Bb - k = \sqrt{\tau}\, q$

の solution $B > 0$, q(vector) が存在するための必要十分条件は ε が十分小さくて

(44) $\tau + 2Re(-k'A_{i\omega}^{-1}b) > 0$

がすべての real ω に対して満たされることである。

$k = -Bb - d_0 = \frac{1}{2}\beta A'c + \alpha\gamma c$ とし (44) の左辺で、$\tau = \beta\rho = \beta(\gamma - c'b)$ とおくと

$$(45) \qquad +2\mathrm{Re}\{-(\frac{1}{2}\beta c'A+\alpha\gamma c')A_{i\omega}^{-1}b\} = \tau+2\mathrm{Re}(-k'A_{i\omega}^{-1}b)$$

$$(\frac{1}{2}\beta c'A+\alpha\gamma c')A_{i\omega}^{-1}b = \frac{1}{2}\beta c'(i\omega E-A_{i\omega})A_{i\omega}^{-1}b+\alpha\gamma c'A_{i\omega}^{-1}b, \qquad \rho=\gamma -c'b$$

であるから

$$(46) \qquad \tau + 2\mathrm{Re}(-k'A_{i\omega}^{-1}b) = P(\alpha, \beta, \omega)$$

が得られる。

するとつぎの定理が成り立つ。

Theorem 11. (40), (41) の V および $-\dot{V}$ がともにすべての x, σ と admissible ϕ に対して positive definite であるための必要十分条件は (44) および

$$(47) \quad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \alpha \geqq 0, \ \beta \geqq 0, \ \alpha+\beta > 0 \\ \text{(b)} & \tau > 0 \text{ or } \tau = 0, \ d_0 = 0, \ \alpha > 0 \end{array}$$

が成り立つことである。これらの性質が成り立つときは system (34) は absolutely stable である。

この問題を考えるときは、一般性を失うことなしに、pair (A,b) に対する complete controllability と pair (c',A) に対する complete observability を仮定してよい。complete controllability に対する必要十分条件は、すべての t に対して $u'e^{At}b = 0$ になる vector u は $u = 0$ に限ることである。

complete controllability の必要十分条件よりわかるように、complete controllability と transfor function W(p) と関係づけることができる。complete observability に対しても同様である。