数理解析研究所講究録
第16巻 1966年 91-108

函数微分方程式の安定性について

東北大学理学部　加　藤　順　二

1. 序

最近，遅れ時間を持つた微分方程式，すなわち函数微分方程式の研究が重要な研究課題の一つとなつて来て，多くの人々によつてその解の漸近的性質特に安定性や周期解，概周期解の存在等定性的な研究が数多くなされ，種々の結果が得られている．

今， $h \geqq 0$ をある定数として，区間 $[-h,0]$ を n 次元 Euclid 空間 E^n に写す連続写像の全体を $C(E^n)$ あるいは C' で表わすならば，C' は norm

(1) $\quad \|\phi\| = \sup\{|\phi(\vartheta)|;\ \vartheta \in [-h,0]\}$

をもつた Banach 空間となる．ここで $|x|$ は E^n に於ける norm を表わしている．このとき，函数微分方程式は次のように表わされる．

(2) $\quad \dot{x}(t) = f(t,x_t),$

ここで

i) $\dot{x}(t)$ は函数 $x(s)$ の $s=t$ に於ける右側微係数

ii) x_t は区間 $[a,b)$ $(b-a>h)$ で定義された連続函数 $x(s)$ の $s=t \in [a+h,b)$ に於ける区間 $[t-h,t]$ に対応する segment すなわち

$$x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta), \quad \vartheta \in [-h,0]$$

なる函数を表わす．明らかに $x_t \in C$ である．

iii) $f(t,\phi)$ は $[0,\infty) \times C$ で連続な函数と仮定する．

よく知られているように，函数微分方程式は差分微分方程式

(3) $\quad \dot{x}(t)=F(t,x(t),x(t-h_1),\ldots,x(t-h_m)),$

$$h_m > h_{m-1} > \ldots > h_1 > 0$$

の概念を拡張したものであり，(3) は (2) の特別な場合となつている．すなわち，$h=h_m$ として C から E^n への連続な線型写像

$$H_j\phi = \phi(-h_j), \quad (j=0,1,\ldots,m) \quad h_0=0$$

を考えて，

$$F(t,H_0\phi,H_1\phi,\ldots,H_m\phi) = f(t,\phi)$$

とおけば (3) は直ちに (2) に帰着する．今 $\eta_j(\vartheta)$ を

$$\eta_j(\vartheta) = \begin{cases} I & -h_j \leqq \vartheta \leqq 0 \\ 0 & -h \leqq \vartheta < -h_j \end{cases} \qquad (j=0,1,\ldots,m-1),$$

$$\eta_m(\vartheta) = \begin{cases} I & -h_m < \vartheta < 0 \\ 0 & \vartheta = -h_m = -h \end{cases}$$

(I は単位行列，0 は零行列）なる (n,n)- 行列とすれば，これは有界変動で

$$H_j\phi = \int_{-h}^{0} [d\eta_j(\vartheta)]\phi(\vartheta) \qquad (j=0,1,\ldots,m)$$

で表わされる．ここで積分は Stieltjes の意味である．したがつて，線型の差分微分方程式

$$(4) \qquad \dot{x}(t)=A_0(t)x(t)+A_1(t)x(t-h_1)+\ldots+A_m(t)x(t-h_m)$$

は

$$\eta(t,\vartheta)=A_0(t)\,\eta_0(\vartheta)+A_1(t)\,\eta_1(\vartheta)+\ldots+A_m(t)\,\eta_m(\vartheta)$$

すなわち

$$\eta(t,\ ) = \begin{cases} A_0(t)+A_1(t)+\ldots+A_m(t) & \vartheta=0 \\ A_1(t)+\ldots+A_m(t) & -h_1 \leqq \vartheta < 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ A_m(t) & -h_m < \vartheta < -h_{m-1} \\ 0 & \vartheta=-h_m=-h \end{cases}$$

とおけば (4) は簡単に

$$(5)\qquad \dot{x}(t) = \int_{-h}^{0} [d_{\vartheta}\eta(t,\vartheta)]x(t+\vartheta)$$

で表わされる．一般に，(2) の右辺の $f(t,\phi)$ が ϕ に関して線型の場合には，(2) は t に関して連続，ϑ に関して有界変動なある (n,n)- 行列 $\eta(t,\vartheta)$ があつて (5) の形で表わされることが示されている．特に $f(t,\phi)$ が t を含まないときは $\eta(t,\vartheta)$ も t に無関係なものが存在する (Riesz-Nagy-Halanay)．

函数微分方程式の解は差分微分方程式の場合と全く同様に定義される．すなわち，$x(t;\phi,t_0)$ が $t=t_0\in[0,\infty)$ のとき $\phi\in C$ を通る (2) の解であるとは，ある $\delta>0$ が存在して次の条件 i)，ii)，iii) が成り立つことである．

i) $x(t;\phi,t_0)$ は $[t_0,t_0+\delta)$ で連続である，

ii) $x_{t_0}(\phi,t_0) = \phi$,

iii) $x(t;\phi,t_0)$ は $[t_0,t_0+\delta)$ で t に関する右側微係数をもち，そこで (2) を満たしている．

解の存在定理については (2) に対する仮定 iii) のもとで解が存在することが示されている（仮定 iii) で C を区分連続な函数の全体でおきかえても成り立つとき例えば $f(t,\phi)$ が ϕ に関して連続かつ線型のときには区分連続な初期函数 ϕ を通る解が存在することも示されている）．一意性については例えば Lipschitz の条件

$$(6)\qquad |f(t,\phi)-f(t,\psi)| \leqq L\|\phi-\psi\|$$

が成り立てば充分である．只，ここで注意しておかなくてはならないのは函数微分方程式の場合には左に出る解については全然考えていないことである．

また次のことを注意しておけば解の評価などについて便利であろう．すなわち， $x(t;\phi,t_0)$ を $t=t_0$ のとき ϕ を通る (2) の解とすれば

$$x(t;\phi,t_0) = \phi(0)+\int_{t_0}^{t} f(s,x_s(\phi,t_0))ds \qquad t\geqq t_0$$

が $x(t;\phi,t_0)$ が存在する限り成り立つている．

参考文献としては比較的にまとまつているものとして，次のものを上げる．

Bellman, R. and K.Cooke, "Differential-Difference Equations" Academic Press, New York, 1963.

El'sgol'ts, L.E., "Introduction to the theory of differential equations with deviating arguments". Holden-Day Inc., 1966.

Halanay,A., "Differential Equations: Stability, Oscillations, Time Lags" Academic Press, New york, 1965.

Hale, J. K., "Theory of Stability of Functional-Differential Equations" (Lecture Note, unpublished).

Krasovskiǐ, N.N., "Stability of Motion" Stanford Univ. Press, Stanford, California, 1963.

Yoshizawa, T., "Stability Theory by Liapunov's Second Method", Publications of Math. Soc. Japan (to appear).

2. 安定性

函数微分方程式の解の安定性，有界性に関する定義は，一般に，常微分方程式のそれに於いて Euclidean norm を (1) で定義された norm で書きかえたもので定義される．たとえば， $x = 0$ が (3) の解であるとき（今後は常にこれを仮定する）．これが $t = t_0$ に於いて安定であ

るとは，

任意に与えられた $\varepsilon > 0$ に対して

$$\|\phi\| < \delta \Longrightarrow \|x_t(\phi, t_0)\| < \varepsilon, \quad t \geqq t_0$$

が成り立つような $\delta > 0$ が存在する．

ことである（上で，$\|x_t(\phi,t_0)\| < \varepsilon$ を $|x(t;\phi,t_0)| < \varepsilon$ でおきかえてよいことは norm の定義 (1) から明らかであろう）．常微分方程式に於いて $x=0$ が x- 平面の原点を通る只一つの解であるとき，一点 $t=t_0$ で安定であることと任意の点 $t=t_1$ で安定であること（ここで δ は ε のみならず t_1 に依存してもよい —— このとき単に解 $x=0$ は安定であるという，δ が t_1 に無関係にえらべるときは解 $x=0$ は一様安定であるという）とは同値であるが，函数微分方程式の場合には一般には正しくない．

例 1 (Zverkin).

$$\dot{x}(t) = b(t)x(t-\tfrac{3}{2}\pi), \tag{7}$$

$$b(t) = \begin{cases} f(t) & t \leqq 0 \quad (f(0)=0) \\ 0 & 0 < t \leqq \frac{3}{2}\pi \\ -\cos t & \frac{3}{2}\pi < t \leqq 3\pi \\ 1 & 3\pi < t \end{cases}$$

このとき任意の $\phi \in C$ に対して $t = 0$ のとき ϕ を通る (7) の解は

$$x(t;\phi,0) = \begin{cases} \phi(0) & 0 \leqq t \leqq \frac{3}{2}\pi \\ -\phi(0)\sin t & \frac{3}{2}\pi < t \end{cases}$$

で表わされる，故に解 $x=0$ は $t=0$ に於いて安定である．しかし $t \geqq 3\pi$ のとき (7) は

$$x(t) = x(t-\frac{3}{2}\pi)$$

となるから

$$\lambda = e^{-\frac{3}{2}\pi\lambda} \qquad (8)$$

をみたす λ に対して $x=e^{\lambda t}a$ は任意の定数 a に対して (7) の解となる．明らかに (8) は正実根 λ_0 をもつているから，$\phi_0(\vartheta)=e^{\lambda_0\vartheta}a \in C$ とおくとこれは a を小さくとればいくらでも小さくなるが $t=t_1>3\pi$ のとき ϕ_0 を通る (7) の解

$$x(t;\phi_0,t_1)=e^{\lambda_0 t}a \qquad (a\neq 0)$$

は $t\to\infty$ ~~と共に~~発散する．故に解 $x=0$ は $t=t_1$ に於いて安定ではない．

例 2 (Krasovskiǐ)

$$\dot{x}(t)=x(t)-\mu(t)x(t-h(t)),$$
$$\mu(t)=2e^{-h(t)},$$
$$h(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t & 0\leqq t\leqq 2\\ 1 & 2<t\end{cases}$$

を考えると任意の $\phi\in C$ に対して

$$x(t;\phi,0) = \phi(0)e^{-t}, \quad t \geqq 0$$

であるから，解 $x=0$ は $t=0$ で漸近安定，すなわち，安定でかつ $t\longrightarrow\infty$ のとき $x(t;\phi,0)\longrightarrow 0$ であるが $t \geqq 3$ のとき上式は

$$\dot{x}(t) = x(t) - 2e^{-1}x(t-1)$$

となり，解 $x=0$ は $t=t_1\geqq 3$ に於いて安定ではない．

函数微分方程式の場合にも解の漸近的性質を知る上で，Liapunov の第

二の方法は有力な方法の一つとなつている．この場合は Liapunov 函数に対応して，Liapunov 汎函数が用いられる．$[0,\infty)\times C_H$（$H>0$ はある定数）で定義された汎函数 $V(t,\phi)$ が次の条件 (i), (ii), (iii) をみたすとき $V(t,\phi)$ は函数方程式 (2) に対する Liapunov 汎函数と呼ばれる。ここで，C_H は C の要素 ϕ で $\|\phi\|<H$ をみたすもの全体をあらわしている．

(i) $V(t,\phi)$ は連続，$V(t,0)=0$,

(ii) 正定値連続函数 $a(r)$（すなわち $a(r)>0$ $(r\neq 0)$, $a(0)=0$）があつて

$$V(t,\phi)\geqq a(|\phi(0)|)$$

が成り立つ，

(iii) $$D^{+}_{(2)}V(t,\phi)\equiv\overline{\lim_{\delta\to+0}}\frac{1}{\delta}\{V(t+\delta,x_{t+\delta}(\phi,t))-V(t,\phi)\}\leqq 0,$$

ここで $x(s;\phi,t)$ は $s=t$ のとき ϕ を通る (2) の解である．

このとき，次の定理が得られる。

定理 1. 函数微分方程式 (2) に対して Liapunov 汎函数 $V(t,\phi)$ が存在すれば解 $x=0$ は安定である．

更に，$V(t,\phi)$ が条件

(iv) 正定値連続函数 $b(r)$ があつて

$$V(t,\phi)\leqq b(\|\phi\|)$$

が成り立つ．

をみたせば，解 $x=0$ は一様安定である．

定理 2. Liapunov 汎函数が条件 (iv) 更に条件

(v) 正定値連続函数 $c(r)$ があつて

$$D^{+}_{(2)}V(t,\phi) \leqq -c(\|\phi\|)$$

が成り立つ（このとき $D^{+}_{(2)}V(t,\phi)$ は負定値であると言う）.

をみたせば，(2) の解 $x=0$ は一様漸近安定である.

証明は常微分方程式に対する場合と全く同様に行なうことが出来る. 函数微分方程式 (2) に対して Liapunov 汎函数 $V(t,\phi)$ が存在して，これが (6) の形の Lipschitz 条件をみたすとき (2) の摂動系

(9) $$\dot{x}(t) = f(t,x_t)+X(t,x_t)$$

に対して

$$D^{+}_{(9)}V(t,\phi) \leqq D^{+}_{(2)}V(t,\phi)+L|X(t,\phi)|$$

が成り立つことを用いて，摂動項 $X(t,\phi)$ に対するある仮定のもとで摂動系の解の行動を調べることが出来ることも常微分方程式の場合と同様である.

上の定理の逆に関して，定理2.については $f(t,\phi)$ が Lipschitz の条件をみたすとき成り立つことがすでに知られているが，Lipschitz 汎函数を明らかな形で，たとえば，常微分方程式に於ける二次型式に対応する形で求めることは定数係数の線型函数微分方程式の場合に於いても一般的には困難である. しかし Krasovskiǐ によつて次の様な結果がえられている. 差分微分方程式

(10) $$\dot{x}(t) = -ax(t) + bx(t-h), \quad a>0,\ h>0$$

に対して

(11) $$V(t,\phi) = \phi(0)^2+\mu\int_{-h}^{0}\phi(\vartheta)^2 d\vartheta \qquad \mu>0$$

とおくと $V(t,\phi)$ は条件 (i), (ii), (iv) をみたしている. 更に，

$$D^{+}_{(10)}V(t,\phi)=-2a\phi(0)^2+2b\phi(0)\phi(-h)+\mu\{\phi(0)^2-\phi(-h)^2\}$$

であるから，この右辺を　$\phi(0)$，$\phi(-h)$　に関する二次型式とみれば　b　が

$$b^2 - (2a-\mu)\mu < 0$$

をみたすとき　$D^+_{(10)}V(t,\phi)$　は負定値となる．$\mu > 0$　は適当に取つてよいから，この条件は

$$(12) \qquad b^2 < a^2 \quad \text{すなわち} \quad b < a$$

でおきかえられる．すなわち　b　が (12)　をみたせば定理 2.によつて解　$x=0$　は一様漸近安定である．

同様の方法で，差分微分方程式

$$\dot{x}(t) = -ax(t)+b(t)x(t-h) \qquad a>0,\ h>0,$$

$$\dot{x}(t) = -ax(t)+b(x)x(t-h)+X(t,x(t),x(t-h)).$$

（ここで　$X(t,x,y)$　は　t　に関して一様に　x, y　について高次である）

の解　$x=0$　は　$b(t)$　が条件

$$\sup\{|b(t)|\ ;\ t\in[0,\infty)\} < a$$

をみたすとき，一様漸近安定であることを知ることが出来る．一般の線型差分微分方程式系 (4)　に対しても，$A_0=A_0(t)$　が　t　に無関係でその固有根はすべて負の実数部分をもつとき，B　を

$$^T\!A_0 B + BA_0 = -I \qquad (\ I\ \text{は単位行列}\ )$$

をみたす正定値対称行列，M_j　$(j=1,...,m)$　を任意な正定値対称行列として

$$V(t,\phi) = {}^T\phi(0)B\phi(0)+\sum_{j=1}^{m}\int_{-h_j}^{0}{}^T\phi(\vartheta)M_j\phi(\vartheta)d\vartheta$$

とおくと

$$D^+_{(4)}V(t,\phi) = -{}^T\phi(0)(I-M_1-...-M_m)+2\sum_{j=1}^{m}{}^T\phi(0)BA_j\phi(-h_j)$$

$$-\sum_{j=1}^{m}{}^T\phi(-h_j)M_j\phi'(-h_j)$$

が得られる．したがつて，この右辺が $\phi(0)$, $\phi(-h_1),\dots,\phi(-h_m)$ に関して負定値二次型式となるための $A_1,\dots,A_m$ に対する条件，すなわち (4) の解 $x=0$ が一様漸近安定になるための充分条件を得ることが出来る．

Liapunov 汎函数ではなく Liapunov 函数を用いて函数微分方程式の解の安定性を示す定理を述べよう (Krasovskiǐ-Razumihiv).

定理 3. 函数微分方程式 (2) に対して $0\leqq t<\infty$, $|x|<H$ で定義され次の条件 (i), (ii) をみたす連続函数 $W(t,x)$ が存在すれば (2) の解 $x=0$ は一様安定である．

(i) 正定値，非減少連続函数 $a(r)$, $b(r)$ に対して

$$a(|x|) \leqq V(t,x) \leqq b(|x|),$$

(ii) もし，$\phi\in C_H$ が $W(t+\vartheta,\phi(\vartheta)) < f(W(t,\phi(0))$ $(\vartheta\in[-h,0])$ をみたすならば，$s=t$ のとき ϕ を通る (2) の解 $x(s;\phi,t)$ に対して

$$D^+w(t) \leqq 0 \tag{13}$$

が成り立つ．ここで $f(r)$ は $f(r)>r$ $(r>0)$ なる非減少連続函数，$w(s) = W(s,x(s;\phi,t))$ で $D^+w(t)$ は函数 $w(s)$ の $s=t$ における上極限右側微係数 (upper right-hand derivative) を示す．

証明は $V(t,\phi) = \sup\{W(t+\vartheta,\phi(\vartheta));\ \vartheta\in[-h,0]\}$ が定理 1.の条件をみたすことを示すことによつて行なわれる．

定理 4. 定理 3.に於いて，$c(r)$ をある正定値連続函数として (13) が

$$D^+w(t) \leqq -c(|\phi(0)|)$$

でおきかえられるならば (2) の解 $x=0$ は一様漸近安定であ

る.

3. 定数係数線型微分方程式

この節では, (2) 式の右辺 $f(t,\phi)$ が定数係数線型の連続函数 $f(\phi)$ である場合を考える. すなわち (5) に対応して

$$(14) \qquad \dot{x}(t) = f(x_t) = \int_{-h}^{0} [d\eta(\vartheta)]x(t+\vartheta)$$

を考える. この場合は, 定数係数線型常微分方程式の固有根に対応して, λ に関する方程式(これを (14) の固有方程式と呼ぶ)

$$\det\left(\int_{-h}^{0} [d\eta(\vartheta)]e^{\lambda\vartheta} - \lambda I\right) = 0$$

の根(これを (14) の固有根と言う)の分布が非常に重要な役割りを果している. すなわち, 次の定理が得られる.

定理 5. (14) のすべての固有根の実数部分が負であるときは

(1°) $[-h,0]$ で定義されたすべての区分連続な函数 ϕ に対して

$$\| x_t(\phi,t_0) \| \leqq Ke^{-\alpha(t-t_0)} \qquad t \geqq t_0$$

が成り立つ. ここで $x(t;\phi,t_0)$ は (14) の解であり, K, α は正の定数である.

(2°) 定理 2.の条件をすべてみたす (14) に対する Liapunov 汎函数 $V(\phi)$ が存在する. したがつて解 $x=0$ は一様漸近安定である.

更に定理 5.で述べられた Liapunov 汎函数は Lipschitz の条件をみたすことが知られているので, 例えば次の系がえられる.

系　定理5.の仮定のもとで　$X(t,\phi)$ が　t に関して一様に ϕ に関して高次であるならば　(14) の摂動系

(15)　　$$\dot{x}(t) = f(x_t) + X(t,x_t)$$

の解　$x=0$　は一様漸近安定である.

(14)が差分微分方程式

(16)　　$$\dot{x}(t) = A_0x(t)+A_1x(t-h_1)+\dots+A_mx(t-h_m)$$

の場合には，この固有方程式は

$$\det(A_0+A_1e^{-h_1\lambda}+\dots+A_me^{-h_m\lambda}-\lambda I) = 0$$

となつて，これは超越方程式となり，この根は無数にある (Pontryagin) が任意の実数 γ に対して　$\mathrm{Re}\,\lambda \geqq \gamma$ となる根 λ は高々有限個である.

例えば方程式　(10) の固有方程式は

$$-a + be^{-\lambda h} - \lambda = 0$$

となり，これをみたす $\lambda = \alpha+i\beta$　(α,β　は実数，　i　は虚数単位) に対しては

$$|b|e^{-\alpha h} = \sqrt{(\alpha+a)^2+\beta^2}$$

が成り立つ. 故に　$\alpha\geqq 0$　のときは

$$|b| \geqq |b|e^{-\alpha h} = \sqrt{(\alpha+a)^2+\beta^2} \geqq \alpha+a \geqq a$$

となり，条件　(12) のもとでは正または零の実数部分をもつた (10)　の固有根は存在しないことが示される. しかし，この条件 (12)　は (10) の固有根の実数部分がすべて負であるための必要条件ではない. すなわち (11)　の形の　Liapunov 汎函数が存在することは　(10) の解　$x=0$ が一様漸近安定であるための必要条件ではない.

差分微分方程式　(16) に対する場合と同様に，(14)　の固有根についても任意の実数　に対して　$\mathrm{Re}\,\lambda \geqq \gamma$ となる固有根は高々有限個である.

このことから，任意に与えられた実数 γ に対して Hale は適当な変換により (14) は

$$(17)\qquad \begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) \\ \dot{z}(t) = f(z_t) \end{cases}$$

に変換されることを示した*) ここで A は $\mathrm{Re}\,\lambda \geqq \gamma$ となる (13) の固有根 λ を重複度も含めて固有根とする定数行列であり，z_t は C の部分空間 $\tilde{C}$ の要素である．ここで $f(\phi)$ の $\tilde{C}$ に於ける縮小写像の固有根はすべて実数部分が γ より小である．定理3.において，C を $\tilde{C}$ におきかえても全く同様の結果がえられる（このときは定理3.で述べた解 $x(s;\phi,t)$ としては $\tilde{C}$ にとどまるもののみを考えることとする）．このことと Hale による変換が安定性を保存していることとから，(14) が実部が負でない固有根を持つ場合に対しても (14) あるいは (14) の摂動系の解の行動を調べることを容易ならしめている．ただこの場合は (14) の摂動系 (15) に対して Hale による変換をほどこせば (17) の摂動系として函数微分方程式ではなく函数積分方程式

$$(18)\qquad \begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Y(t,y(t),z_t) \\ z_t = x_{t-z}(\psi) + \displaystyle\int_s^t X_{t-\tau} Z(\tau,y(\tau),z_\tau)\,d\tau \qquad t \geqq s, \end{cases}$$

($(s,\psi) \in [0,\infty) \times \tilde{C}$ は parameter) がえられる．ここで $x(t;\psi)$ は $t=0$ のとき $\psi\varepsilon$ を通る (14) の解，$X(t)$ は $t=0$ に於ける初期函数 $X(\vartheta)$ ($\vartheta \in [-h,0]$) が高々 $\vartheta=0$ で不連続な，変換によつて定まる函数で与えられる（特に $\mathrm{Re}\,\lambda \geqq \gamma$ となる λ がないときは $X(0) = I$,

---

*) "Linear functional-differential equations with constant coefficients" (Contr. to O.E., 2 (1964), 291-317).

$X(\vartheta)=0$ $(\vartheta\in[-h,0])$ となる） $(\dot{14})$ の行列解を表わしている．

たとえば，次の定理が得られる．

定理 6. (14) の固有根の実数部分はすべて負または 0 であり，実部が 0 である固有根の固有空間の次元はすべて一次元であると仮定する．このとき (14) の解 $x=0$ は安定，同時にすべての解は有界（この二つは線型の場合には同値である）である．更に

$$\left|X(t,\phi)\right| \leqq g(t)\|\phi\|, \qquad \int_0^\infty g(t)dt < \infty$$

をみたす連続函数 $g(t)$ があれば摂動系 (15) の解もすべて有界である．

4. Control を含む函数微分方程式

この節では control を含む函数微分方程式

$$(19)\qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int_{-h}^{0} [d\eta(\vartheta)]x(t+\vartheta)+bf(\sigma(t)) \\ \sigma(t) &= {}^{T}cx(t) \end{aligned}$$

について考える (Halanay) ，ここで $\eta(\vartheta)$ は (14) で与えられた有界変動な函数 b, c は定数 vectors, $f(\sigma)$ は条件

$$(20)\qquad k_1\sigma^2 \leqq \sigma f(\sigma) \leqq k_2\sigma^2 \qquad (0<k_1<k_2<k)$$

をみたす連続函数とする．

前節の最后で述べたことから， (18) 式に於いて γ を充分大きくとれば $\tilde{C}=C$ すなわち $z_t=x_t$ となり， $t=t_0$ で ϕ を通る (19) の解は

$$x_t(\phi,t) = x_{t-t_0}(\phi)+\int_{t_0}^{t} X_{t-s}bf(\sigma(s))ds \qquad t\geqq t_0$$

したがつて

$$(21)\qquad x(t;\phi,t_0) = x(t-t_0;\phi)+\int_{t_0}^{t} X(t-s)bf(\sigma(s))ds \qquad t \geqq t_0$$

がえられる．ここで　$\sigma(t) = {}^{T}cx(t;\phi,t_0)$　である．故に

$$\sigma(t) = {}^{T}cx(t-t_0;\phi)+\int_{0}^{t-t_0} {}^{T}cx(t-t_0-s)bf(\sigma(s+t_0))ds$$

すなわち　　$\rho(t) = \sigma(t+t_0)$とおくと

$$(22)\qquad \rho(t) = {}^{T}cx(t;\phi)+\int_{0}^{t} {}^{T}cX(t-s)bf(\rho(s))ds.$$

まず次の補題を述べる．

補題*)　　積分方程式

$$\rho(t) = u(t) + \int_{0}^{t} v(t-s)f(\rho(s))ds$$

に於いて，　$f(\sigma)$　は条件　(20)　をみたし，$u(t)$，$v(t)$　は殆んどいたるところで有界な微係数をもつ連続函数であつて更に，

$u(t)$，$u'(t)$，$v(t)$，$v'(t) \in L^1, v \in L^2$　と仮定する．このとき

$$(23)\qquad \mathrm{Re}\ [(1+i\omega q)v(i\omega)] - \frac{1}{k} \leqq 0 \qquad (-\infty<\omega<\infty)$$

をみたす実数　$q>0$　が存在するならば　$\rho(t)\longrightarrow 0$，$(t\longrightarrow\infty)$　である．

更に，$|u(t)|$，$|u'(t)| \leqq Ke^{-\alpha t}$　　なる正の定数　K，α　があれば

$R(0) = 0$　なるある連続函数　$R(K)$　に対して，

$$|\rho(t)| \leqq R(K), \quad t \geqq 0$$

---

*) Cf. see Doležal, V., "An extension of Popov's method for vector-valued nonlinearities" (choxoclovakiĭ Mat. J., 15 (1965), 436-453).

が成り立つ．ここで $\tilde{v}$ は v の Fourier 変換すなわち

$$\tilde{v}(i\omega) = \int_0^\infty e^{-i\omega t} v(t)dt,$$

この補題を用いて次の定理が得られる．

定理7.　もし (14) の固有根がすべて負の実数部分をもち，かつ

$$\mathrm{Re}\ [(1+i\omega q)^T c\tilde{X}(i\omega)b] - \frac{1}{k} \leqq 0 \qquad (-\infty<\omega<\infty)$$

をみたす実数 $q > 0$ が存在するならば (20) をみたす $f(\sigma)$ に対して (19) の零解は絶対安定である．ここで $X(t)$ は (18) で与えられたもの．

証明．　まず定理5.(1°) より (22) 式における $x(t;\phi)$, $X(t)$ は $|x(t;\phi)| \leqq K_1 e^{-\alpha t}$, $|X(t)| \leqq K_2 e^{-\alpha t}$ をある正の定数 $K_1 \geqq \|\phi\|$, K_2, α に対してみたしている．したがつて

$$u(t) = {}^T c x(t;\phi), \quad v(t) = {}^T c x(t) b$$

とおくと $\tilde{v}(i\omega) = {}^T c\tilde{X}(i\omega)b$ であるから明らかに，$u(t)$, $v(t)$ は補題の仮定をすべてみたしている．故に $\rho(t)\longrightarrow 0$ $(t\longrightarrow\infty)$ を得る．したがつて (21) により $|x(t;\phi,t_0)|\longrightarrow 0$ $(t\rightarrow\infty)$ を得る．更に

$$\left|\int_{-h}^0 [d\eta(\vartheta)]\phi(\vartheta)\right| \leqq K_3\|\phi\|$$

なる定数 $K_3 > 1$ があることから

$$|x(t;\phi,t_0)| \leqq K_1 K_3 e^{-\alpha t}$$

従つて補題によつて $|\rho(t)| \leqq R(K_1,K_3)$, $t \geqq 0$ を得る．また $K_1\longrightarrow 0$ $(\|\phi\|\rightarrow 0)$ であるから (21) によつて $M(0)=0$ なる連続函数 $M(K)$ があつて

$$\left| x(t;\phi,t_0) \right| \leqq M(\|\phi\|)$$

が成り立つ．すなわち (19) の零界は絶対安定である．

$X(i\omega)$ を求めてみると

$$\dot{X}(t) = \int_{-h}^{0} [d\eta(\vartheta)]X(t+\vartheta)$$

であるから

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t}X(t)dt = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \int_{-h}^{0} [d\eta(\vartheta)]X(t+\vartheta)dt$$

$$e^{-i\omega t}X(t)\Big|_0^\infty + i\omega\int_0^\infty e^{-i\omega t}X(t)dt = \int_{-h}^{0} e^{i\omega\vartheta}[d\eta(\vartheta)]\cdot\int_0^\infty e^{-i\omega t}X(t)dt.$$

故に，

$$-I + i\omega\tilde{X}(i\omega) = \int_{-h}^{0} e^{i\omega\vartheta}[d\eta(\vartheta)]\ \tilde{X}(i\omega)$$

すなわち

$$\tilde{X}(i\omega) = -\left(\int_{-h}^{0} e^{i\omega\vartheta}[d\eta(\vartheta)] - i\omega I\right)^{-1}$$

を得る．すなわち定理7.は次のように書き換えられる．

定理7．　もし (14) の固有根がすべて負の実数部分をもち，かつ

$$(24) \qquad \mathrm{Re}\left[(1+i\omega q)^T c\left(\int_{-h}^{0} e^{i\omega\vartheta}[d\eta(\vartheta)] - i\omega I\right)^{-1} b\right] + \frac{1}{k} \geqq 0 \qquad (-\infty<\omega<\infty)$$

をみたす実数 $q > 0$ が存在するならば (20) をみたす $f(\sigma)$ に対して (19) は絶対安定である．

定数係数線型常微分方程式 $\dot{x} = Ax$ 及び函数微分方程式 (14) に対して，

$$A - \lambda I, \qquad \int_{-h}^{0} e^{\lambda\vartheta}[d\eta(\vartheta)] - \lambda I$$

を仮りにそれぞれそれらの固有行列と言うことにすれば，条件 (24) はよく知られている常微分方程式に対する Popov の(第一)定理で常微分方程式の固有行列を函数微分方程式の対応する固有行列でおきかえたものになつている．

Halanay は更に， $\sigma(t) = {}^{T}cx(t-\tau)$ $(\tau > 0)$ のときも条件 (24) に対応する条件を求めている．すなわち

定理 8. もし (14) の固有根がすべて負の実数部分をもつて，かつ

$$\mathrm{Re}\ [(1+i\omega q)^{T}ce^{-i\omega\tau}\tilde{X}(i\omega)b]-\frac{1}{k} \leqq 0 \quad (-\infty<\omega<\infty)$$

をみたす実数 $q > 0$ が存在するならば (20) をみたす $f(\sigma)$ に対して $\sigma(t) = {}^{T}cx(t-\tau)$ で与えられている (19) の零解は，絶対安定である．