

## 線の方法について

京大 理工 中島勝也

### §1. H. A. Schwarz の交互法

偏微分方程式の境界値問題を数値的に解く場合に、方程式そのものよりも境界条件の取り扱い方が難かしいことが多い。また Poisson 方程式のように特殊な領域、たとえば2次元平面では円とか長方形の内部に対しては解の公式が与えられることがある。そこで、このような領域の融合領域に対して解の存在が証明されたり、もっと具体的に計算方法が示されるならば、理論的にも実際的にも大いに有用である。調和函数の Dirichlet 問題に対して Schwarz [1870] はこの種の問題に一つの解決法を与えた。つきにその根拠となる定理を述べる。

定理1. 共通点をもつ2つの Jordan 領域  $D_1$  および  $D_2$  のおのののに対して調和函数の Dirichlet 問題が解けるものと仮定すれば、その和領域に対してもまた同じ Dirichlet 問題が解ける。

この定理においては、領域  $D_1$  および  $D_2$  が単一連結である必要はない。この証明については、たとえば小松勇作 [1944] を見られたい。つきに Kantorovič & Krylov [1952] によるこの方法の拡張について概略を述べよう。

$xy$  平面上の有長単一周曲線  $L$  で囲まれた領域  $D$  と、一般形の偏微分方程式

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0 \quad \dots \quad (1.1)$$

を考える。

$D$  で (1.1) を満足し、 $L$  上で与えられ下区分的に連続な函数  $f(p)$  と、 $f$  の連続集で一致する  $D$  内で有界な函数  $n(x, y)$  を求める、という (1.1) の Dirichlet 問題を考える。

領域  $D$  をいくつかの領域  $D_i$  ( $i=1, 2, \dots, k$ ) の合併集合と考へ、 $D_i$  の境界を  $L_i$  とする。これらの領域  $D_i$  に対しては、(1.1) の Dirichlet 問題が解けるものとする。Schwarz の交互法を適用するため、 $D_i, D_i \cap D_j, D_i \cup D_j$  など  $D$  の部分領域にあける (1.1) の解について或条件を課するのであるが、一般に  $xy$  平面上の任意の領域としてその条件を述べることにする。

Schwarz の交互法が適用されるために (1.1) の解に次の仮定を設ける。

I. (解の一貫性)  $D$  を  $xy$  平面上の任意の領域とする。 $D$  内で (1.1) を満足する 2 つの有界な解  $u$  と  $u^*$  とが、 $D$  の境界  $L$  上殆んど到る所 (有限個の除外集のほかでは) 同じ境界値をもつとき  $D$  内のすべての点で一致する。

$$\text{すなはち、} \quad u(Q) = u^*(Q) \quad Q \in L$$

$$\text{ならば、} \quad u(P) = u^*(P) \quad P \in D \quad \text{となる。}$$

II. (解の大小関係)  $D$  内で (1.1) を満足する 2 つの有界な解  $u(P)$  と  $u^*(P)$  とが  $L$  上ほとんどすべての点で  $u^*(Q) \geq u(Q)$

$$\text{と成るとき、} \quad D \text{ 内でつねに} \quad u^*(P) \geq u(P) \quad \text{となる。}$$

III.  $D$  内で単調で (1.1) を満足する一様有界な函数列  $\{u_n(p)\}_{n=1, 2, \dots}$  の極限もまた (1.1) を満足する。

IV. (最大値, 最小値原理)  $u(p)$  を  $D$  内で有界で (1.1) を成らす

函数とする。  $u(P)$  が  $D$  の境界  $L$  上ほとんどすべての点で境界値をもつとき、  $u(P)$  は  $D$  内で正の最大値かまたは負の最小値をとらない。

V. (境界における連続性)  $D$  の境界  $L$  の部分弧を  $\alpha$  とする。  $R$  を  $\alpha$  の端でない点とし、  $\alpha$  上で連続な函数  $f(Q)$  が与えられているものとする。 そのとき (1.1) の有界な解  $u(P)$  が弧  $\alpha$  上の  $R$  以外の点  $Q$  で境界値  $f(Q)$  をとりとき、  $P$  が  $D$  内から点  $R$  に近づくときの  $u(P)$  の極限值は  $f(R)$  に等しい。

以上 5 の仮定は Laplace 方程式の解である調和函数によって満たされる。 一般に楕円型方程式

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g, \quad b^2 - ac < 0 \dots (1.2)$$

についても同様の結果が成り立つ。 ここで (1.2) の係数および右辺の函数は十分高い階数まで連続微分可能であるとする。 それらの結果を証明なしに掲げよう。

定理 2.  $D$  内でつねに  $f \leq 0$  ならば (1.2) の Dirichlet 問題は任意の連続な境界条件に対して一意的な解をもつ。 つぎに同次形の場合を考える。 (1.2) において  $g = 0$  の場合である。

定理 3. 同次方程式の場合条件 II は条件 IV から導かれる。

定理 4. 同次楕円型方程式 (1.2), ( $g=0$ ) の  $D = D + L$  で連続な解の列が境界上で一様に収束するならば、実は  $D$  全体で一様に収束する。 しかも極限函数はもとの方程式を満足する。

定理 5. 同次楕円型方程式 (1.2), ( $g=0$ ) の解の列  $\{u_n(P)\}_{n=1,2,\dots}$  が  $D$  内のすくなくとも一点で下に有界で、さらに  $D$  内で単調減少列となるものとすれば、  $u_n(P)$  は  $D$  で広義の一様に収束する。

定理 6. (1.2) において  $f \equiv 0, g \equiv 0$  のときは, この方程式のすべての解は,  $D$  の境界  $L$  上でその上限と下限をとる。

$f \leq 0, g \equiv 0$  のときには, 閉領域  $\bar{D}$  で連続な (1.2),  $g \equiv 0$  のすべての解は  $D$  の内部で正の最大値も負の最小値もとることはできない。

これらの定理および, その拡張についてはイ. ヴ. パトロフスキー [1958] を参照されたい。

仮定  $V$  は境界  $L_1$  と  $L_2$  との交点, とくに  $\bar{\alpha}$  と  $\bar{\beta}$  との端点における解の連続性を導くために設けられたものである。

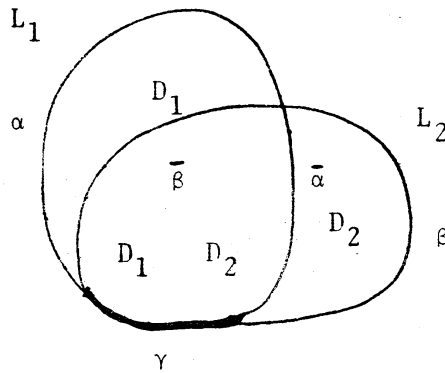


Fig. 1.

さて Fig. 1 のように相重なる 2 領域  $D_1$  と  $D_2$  とがあつて, それらの境界をそれぞれ  $L_1, L_2$  とする。たがいに他の領域に含まれる境界弧をそれぞれ  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  とし,  $L_1 = \bar{\alpha} + \alpha, L_2 = \beta + \bar{\beta}$  また  $L = \alpha + \beta, \gamma = L_1 \cap L_2$  としよう。

$L$  上で与えられた区分的に連続な函数  $f(P)$  に対する (1.1) (または (1.2)) に対する  $D = D_1 \cup D_2$  内での Dirichlet 問題の解を求めよう。

$\bar{\alpha}$  上で区分的に連続な函数  $\phi(P)$  を与えてそれを  $v_0(P)$  とし, 次に境界条件

$$u_n(P) = \begin{cases} f(P) & \dots & P \in \alpha \\ v_{n-1}(P) & \dots & P \in \bar{\alpha} \end{cases} \dots \quad (1.3)$$

$$v_n(P) = \begin{cases} f(P) & \dots & P \in \beta \\ u_n(P) & \dots & P \in \bar{\beta} \end{cases} \dots \quad (1.4)$$

により  $D_1$  および  $D_2$  内で (1.1) (または (1.2)) に対する Dirichlet 問題の解を求め、それらをそれぞれ  $u_n(P), (P \in D_1), v_n(P), (P \in D_2), (n=1, 2, \dots)$  とする。

$\phi(P)$  は条件 IV を考慮すれば  $f(P)$  が  $L$  上でとる最大値と最小値の間の値をとらせるとよいが、理論的には有界かつ区分的に連続であればよい。さて  $u_n, v_n$  の収束を証明するために、優函数列と劣函数列を次のように作る。

$$m = \max[\sup|\phi(P)|, \sup f(P)] \quad \dots \quad (1.5)$$

とおく。ここに  $(P)$  は  $\phi$  については  $\bar{\alpha}$  上と、 $f$  については  $L$  上を動くものとする。

$$v_0^+(P) = m, \quad v_0^-(P) = -m \text{ として}$$

$$u_n^+(P) = \begin{cases} f(P) & \dots & (P) \in \alpha \\ v_{n-1}^+(P) & \dots & (P) \in \bar{\alpha} \end{cases} \dots \quad (1.6)$$

$$v_n^+(P) = \begin{cases} f(P) & \dots & (P) \in \beta \\ u_n^+(P) & \dots & (P) \in \bar{\beta} \end{cases} \dots \quad (1.7)$$

により  $D_1, D_2$  内で (1.1) (または (1.2)) の Dirichlet 問題と見做され、それぞれ  $u_n^+(P), v_n^+(P) (n=1, 2, \dots)$  とする。

$u_n^-(x, y), v_n^-(x, y) (n=1, 2, \dots)$  も同様に境界条件

$$u_n^-(P) = \begin{cases} f(P) & \dots & (P) \in \alpha \\ u_{n-1}^-(P) & \dots & (P) \in \bar{\alpha} \end{cases} \dots \quad (1.8)$$

$$v_n^-(P) = \begin{cases} f(P) & \dots (P) \in \beta \\ u_n^-(P) & \dots (P) \in \bar{\beta} \end{cases} \dots \quad (1.9)$$

から求めた  $D_1, D_2$  内の解とする。すると条件 I, II, IV より

$$u_n^+(P) \geq u_n(P) \geq u_n^-(P), \quad (P) \in D_1 \quad \dots \quad (1.10)$$

$$v_n^+(P) \geq v_n(P) \geq v_n^-(P), \quad (P) \in D_2 \quad \dots \quad (1.11)$$

函数列  $u_n^+(P), v_n^+(P)$  は II より  $D_1, D_2$  内でそれぞれ有界かつ単調減少だから III により極限函数が存在する。それらをそれぞれ  $u^+(P), v^+(P)$  とする。函数列  $u_n^-(P), v_n^-(P)$  は II より  $D_1$  および  $D_2$  内で有界かつ単調増加だから III により極限函数が存在する。それらをそれぞれ  $u^-(P), v^-(P)$  とする。 $D_1 \cap D_2$  の境界上で  $u^+ = v^+, u^- = v^-$  となるから  $D_1 \cap D_2$  内で  $u^+ = v^+, u^- = v^-$  となる。

さて  $v^+$  は  $u^+$  の  $D_2$  内への接続であるから改めて両者を  $D = D_1 \cup D_2$  内での一つの函数と考へて  $u^+$  で表わすことにする。同様に  $u^-$  も  $D$  内の函数と考へると、 $D$  の境界  $L$  上で  $u^+ = u^-$  が成立するから、I によつて  $D$  内でも  $u^+ = u^-$  となる。したがつて  $u_n, v_n$  の極限函数も存在してこの函数と一致する。この函数を  $u$  とかくとき、 $u$  が境界条件をみたすことは、その作り方、及び条件 V からやうびかれる。

さて、領域  $D_1$  および  $D_2$  における (1.1) (または (1.2)) の Dirichlet 問題の解は、互に他の領域に含まれる境界弧  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  上で求めればよい。したがつて Schwarz の方法を適用する場合領域内での任意の点における解の値が境界値から計算できるような公式があることが望まれる。円における Poisson 積分、長方形における Fourier 展開公式、Green 函数の応用など、その例である。つぎに積分方程式の応用について述べよう。

## § 2. 積分方程式への変形

Nevanlinna [1939] は Schwarz の交互法が適用されるための必要十分条件として、ある半 2 種 Fredholm 方程式が解をもつことであることを、調和函数の Dirichlet 問題の場合に証明した。その証明は Green 函数を用いるが、つきのように述べることもできる。問題は、

境界曲線  $L$  が弧長  $s$  をパラメータとして、滑らかな函数

$$x = x(s), y = y(s) \quad (0 \leq s \leq s_0)$$

で表わされている。また境界条件も  $s$  の函数として  $L$  上で連続な函数  $f(s)$  により

$$n = f(s)$$

を与えられている。このとき  $L$  の内部で調和でこの境界条件をみたす函数  $u$  を求める。

定理 7. 上の問題は積分方程式

$$u(\sigma) + \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0} u(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y(s)-y(\sigma)}{x(s)-x(\sigma)} ds = \frac{1}{\pi} f(\sigma) \dots (2.1)$$

の解  $u(s)$  によって

$$u(x, y) = \int_0^{s_0} u(s) \frac{d}{ds} \omega(s, x, y) ds \dots (2.2)$$

と表わされる。

ここで  $d\omega(s, x, y)$  は点  $(x, y)$  から見た  $ds$  の視角である。

とくに円内調和函数は Poisson 積分

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(x_0 + R \cos \phi, y_0 + R \sin \phi) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi \dots (2.3)$$

$$x = x_0 + r \cos \theta, \quad y = y_0 + r \sin \theta$$

で求められる。

一般に Green 函数が存在する領域に対しては、

$$u(x, y) = - \int_L u(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} ds \quad \dots \quad (2.4)$$

と表わすことが出来る。

さて、前節における  $u_n, v_n$  の実際的な作り方は、一般にはこの公式を使用するのがよいであろう。再び Fig. 1 の場合について考える。  $G_1$  および  $G_2$  をそれぞれ領域  $D_1$  および  $D_2$  における Green 函数とする。そして

$$F_1(x, y) = - \int_{\alpha} f(\xi, \eta) \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} ds \quad \dots \quad (2.5)$$

$$F_2(x, y) = - \int_{\beta} f(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} ds \quad \dots \quad (2.6)$$

と置く、すなわち  $u(x, y)$  の  $\bar{\alpha}$  および  $\bar{\beta}$  上の未知の値は、連立積分方程式

$$u(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\bar{\beta}} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_2(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} ds, \quad (x, y) \in \bar{\alpha} \dots (2.7)$$

$$u(x, y) = F_1(x, y) - \int_{\bar{\alpha}} u(\xi, \eta) \frac{\partial G_1(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} ds, \quad (x, y) \in \bar{\beta} \dots (2.8)$$

を満足する。(2.8)を(2.7)に代入すると

$$u(x, y) = F_2(x, y) - \int_{\bar{\alpha}} u(\xi, \eta) k(x, y; \xi, \eta) ds, \quad (x, y) \in \bar{\alpha} \dots (2.9)$$

から



$$F(x,y) = F_2(x,y) - \int_{\bar{\beta}} F_1(\xi,n) \frac{\partial G_2(x,y;\xi,n)}{\partial n} ds \quad \dots \quad (2.10)$$

$$k(x,y;\xi,n) = \int_{\bar{\beta}} \frac{\partial G_2(x,y;\xi_1,n_1)}{\partial n} \cdot \frac{\partial G_1(\xi_1,n_1;\xi,n)}{\partial n} ds_1 \dots (2.11)$$

によって、 $\bar{\alpha}$  上の真における  $u$  の値が求まり、次に (2.8) により  $\bar{\beta}$  上の真における  $u$  の値が求まる。その後  $D$  内の任意の真  $(x,y)$  における  $u$  の値は、(2.7)、(2.8) において  $(x,y)$  を  $D$  内の任意の真として求められる。

上記の計算方式においては、Green 函数の法線微分を求めよることが必要であり、その計算は一般には、もとの問題より難かしい。しかし (2.1) - (2.4) は解の値が境界値の荷重平均であることを示しており、また (2.9) - (2.11) は領域  $D$  内の重要な分割線について、その上の解の値を求めよることを示している。これがわれわれが線の方法として重要視しているものである。

### § 3. C. Neumann の方法

さきに Neumann の方法が領域の和集合に対して Dirichlet 問題の解を与えられたのに対して、ここに述べる Neumann の方法は、領域の共通集合に対して線形同次方程式 (1.2),  $g=0$  の解を構成する方法を与える。

領域はふたたび Fig. 1 で与えられるものを使う。 $D' = D_1 \cap D_2$  の境界  $L' = \bar{\alpha} + \bar{\beta} + \gamma$  上で区分的に連続な函数  $f(P)$  が与えられたとき、 $D'$  内で

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = 0$$

を満足し、 $L'$  上で  $f(P)$  と一致する解  $u(x,y)$  を  $D_1$  および  $D_2$  に対する Dirichlet 問題の解から作る方法が、ここで論じられる。

解  $u(x,y)$  を  $D_1$  および  $D_2$  で定められる二つの函数  $v(x,y)$  と  $w(x,y)$

の和として表わすようにしよう。 Neumann の方法が成立するためには, Schwarz の方法の場合における仮定 I-V (ただし IIIはこの場合IVから打ちひかれるので不要)の外に後に述べる仮定 VIが満足されなければならぬ。共通領域の境界成分  $\gamma$  は,  $\alpha$  と  $\beta$  との共通部分弧 (または真)よりなる。

さて境界条件

$$v_1(P) = \begin{cases} f(P) & \dots & P \in \gamma \\ \phi(P) & \dots & P \in \alpha - \gamma & \dots \\ \psi(P) & \dots & P \in \alpha \end{cases} \quad (3.1)$$

を与えて  $D_1$  内で (1.2) の Dirichlet 問題の解をもとめ, それを  $v_1(P)$ ,  $P \in D_1$  としよう。ここで  $\phi(P)$ ,  $\psi(P)$  は区分的に連続な函数であるという制限のもとに任意に与えられた函数である。

この函数  $v_1(P)$  の  $\bar{\beta}$  上の値を用いて, 境界条件

$$w_1(P) = \begin{cases} 0 & \dots & P \in \beta \\ f(P) - v_1(P) & \dots & P \in \bar{\beta} & \dots \end{cases} \quad (3.2)$$

を与えて,  $D_2$  内で (1.2) の Dirichlet 問題の解を求めて, それを  $w_1(P)$ ,  $P \in D_2$  とかくことにする。この作り方からして函数  $v_1(P) + w_1(P)$  は  $L'$  上で  $f(P)$  と等しい値をとる。これより  $n = 2, 3, \dots$  に対して函数列  $v_n(P)$ ,  $w_n(P)$  をそれぞれ境界条件

$$v_n(P) = \begin{cases} v_{n-1}(P) & \dots & P \in \alpha \\ f(P) - w_{n-1}(P) & \dots & P \in \bar{\alpha} & \dots \end{cases} \quad (3.3)$$

および

$$w_n(P) = \begin{cases} 0 & \dots & P \in \beta \\ f(P) - v_n(P) & \dots & P \in \bar{\beta} \end{cases} \dots \quad (3.4)$$

により領域  $D_1$  および  $D_2$  内で (1.2),  $y=0$  の Dirichlet 問題の解を求め、それらをまた  $v_n(x,y), (x,y) \in D_1$  および  $w_n(x,y), (x,y) \in D_2$  とかくことにする。これらの函数列が、それぞれの領域内で収束することとたしかめるために、優函数列, 劣函数列を交互に作る。その作り方が Schwarz の場合と少し異なる。

$\bar{\alpha}$  上で与えた  $\psi(P)$  の絶対値の上界を  $M$  としよう。

$$M \geq |\psi(P)| \quad \dots \quad (3.5)$$

そのとき境界条件

$$v_1^+(P) = \begin{cases} f(P) & \dots & P \in \gamma \\ \phi(P) & \dots & P \in \alpha - \gamma \\ M & \dots & P \in \bar{\alpha} \end{cases} \dots \quad (3.6)$$

$$w_1^-(P) = \begin{cases} 0 & \dots & P \in \beta \\ f(P) - v_1^+(P) & \dots & P \in \bar{\beta} \end{cases} \dots \quad (3.7)$$

$$v_n^+(P) = \begin{cases} v_{n-1}^+(P) & \dots & P \in \alpha \\ f(P) - w_{n-1}^-(P) & \dots & P \in \bar{\alpha} \end{cases} \dots \quad (3.8)$$

$$w_n^-(P) = \begin{cases} 0 & \dots & P \in \beta \\ f(P) - v_n^+(P) & \dots & P \in \bar{\beta} \end{cases} \dots \quad (3.9)$$

により  $D_1$  および  $D_2$  内における (1.2) の Dirichlet 問題の解の列

$v_n^+(P), w_n^-(P), (n = 1, 2, \dots)$  を得る。仮定 IV によって

$$v_n^+(P) \geq v_n(P), \quad P \in D_1 \quad \dots \quad (3.10)$$

$$w_n(P) \geq w_n^-(P), \quad P \in D_2 \quad \dots \quad (3.11)$$

であり、 $v_n$  の優函数列  $v_n^+$  および  $w_n$  の劣函数列  $w_n^-$  がそれぞれの領域で得られた。(3.6) における  $M$  の代りに  $-M$  とおき、(3.6)~(3.9) の肩つき符号  $+, -$  を入れかえると、逆に  $v_n$  の劣函数列  $v_n^-$ ,  $w_n$  の優函数列  $w_n^+$  がそれぞれの領域内で得られる。

$$v_n(P) \geq v_n^-(P), \quad P \in D_1 \quad \dots \quad (3.12)$$

$$w_n^+(P) \geq w_n(P), \quad P \in D_2 \quad \dots \quad (3.13)$$

これらの函数列が収束することは上記の仮定 I-V から導かれる。したがって次の仮定をおく。

VI 上記の函数列のうち、優函数列  $v_n^+(P), w_n^+(P)$  は単調減少、劣函数列  $v_n^-(P), w_n^-(P)$  は単調増加である。この仮定 VI により極限函数がそれぞれ存在するから、それらを  $v^+(P), w^+(P), v^-(P), w^-(P)$  とおくと、 $u(P) = v^+(P) + w^-(P)$  は  $D' = D_1 \cap D_2$  で定義されて (1.2),  $g \equiv 0$  を満足し、境界  $L'$  上で与えられた函数  $f(P)$  と一致することが証明できる。

$v^-(P) + w^+(P)$  もまたこの  $u(P)$  と同じく解になるが、解の一貫性よりこれは  $u(P)$  と等しくなる。そしてまた解の一貫性より

$$v^+(P) = v^-(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n(P), \quad P \in D_1 \quad \dots \quad (3.14)$$

$$w^+(P) = w^-(P) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(P), \quad P \in D_2 \quad \dots \quad (3.15)$$

となるのである。

Neumann の方法で注目されることは、Dirichlet 問題が長方形に対して解ければ、その共通集合として三角形についても解け Schwarz の方法と組み合わせれば任意の多角形について Dirichlet 問題の解を与える方法が示されることにある。

#### §4. 2点境界値問題からの準備

##### 2 階線形常微分方程式の2点境界値問題

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad \dots \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2 \end{cases} \quad \dots \quad (4.2)$$

から導かれる2階線形差分方程式

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n + c_n y_{n+1} = d_n, \quad (n = 1, 2, \dots, m) \dots (4.3)$$

$a_1 = 0, c_m = 0$  を解く問題は一般に3重対角行列の逆行列を求めることになる。これは前進後退消去法で、つぎのように解かれる。まずは、前進部分。

$$\begin{cases} w_1 = c_1/b_1 \\ w_n = c_n/(b_n - a_n w_{n-1}), \quad 2 \leq n \leq m \end{cases} \quad \dots \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} g_1 = d_1/b_1 \\ g_n = (d_n - a_n g_{n-1})/(b_n - a_n w_{n-1}), \quad 2 \leq n \leq m \end{cases} \dots (4.5)$$

および後退代入部分

$$\begin{cases} y_m = g_m, \\ y_n = g_n - w_n y_{n+1}, \quad 1 \leq n \leq m-1. \end{cases} \quad \dots \quad (4.6)$$

によって解かれる。この方法は非常に計算が簡単であるという利点がある  
 反面丸め誤差の累積による不安定性が起り得るが、Wilkinson [1961]  
 は対角優位 (diagonally dominant) すなわち、

$$|b_n| \geq |a_n| + |c_n|, \quad (n = 1, 2, \dots, m) \quad \dots \quad (4.7)$$

なりとき丸め誤差の成長の点では非常に安定であることを示した。

(4.3) において  $a_n = 1, (n = 1, 2, \dots, m)$  の場合には、それに対応  
 する行列は、

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & & & d_1 \\ 1 & b_2 & c_2 & & & & d_2 \\ & 1 & b_3 & c_3 & & & d_3 \\ & & & & & & \vdots \\ & & & & & & d_{m-1} \\ & & & & 1 & b_{m-1} & c_{m-1} & d_{m-1} \\ & & & & & 1 & b_m & d_m \end{pmatrix} \quad \dots \quad (4.8)$$

となる。この行列に行演算を施して正規形にするのは、1 がそのまま  
 残る形の正規形がよい。この行列の第1行の  $b_1, c_1$  を第2, 第3行を使  
 って消去すると、0でない要素が右に移動して、ついに  $(1, m)$  要素まで  
 到って止まる。それは  $y^m$  を与える式に対応することになる。計算手  
 順は次のようにすればよい。

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= b_1, & q_1 &= c_1, \\ p_{n+1} &= q_n - p_n b_{n+1}, & n &= 1, 2, \dots, m-1 \\ q_{n+1} &= -p_n c_{n+1}, & n &= 1, 2, \dots, m-2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (4.9)$$

によって  $p_m$  を求めると、解ベクトルの最終要素  $y_m$  は次の式で与えら  
 れる。

$$y_m = \frac{1}{p_m} (d_1 - \sum_{i=1}^{m-1} d_{i+1} p_i) \quad \dots \quad (4.10)$$

$y_m$  が求まったからは, 逐次代入して  $y_{m-1}, y_{m-2}, \dots, y_2, y_1$  の順に定まる。ちなほち,

$$\left. \begin{aligned} y_{m-1} &= d_m - b_m y_m \\ y_n &= d_n - b_n y_{n+1} - c_n y_{n+2}, \quad n = m-2, m-3, \dots, 2, 1 \end{aligned} \right\} (4.11)$$

また明らかかなように (4.3) において  $c_n = 1, (n=1, 2, \dots, m-1)$  の場合にも同じような手法が適用できる。この場合は  $y_1$  が先に求まり, 逐次代入法により  $y_2, y_3, \dots, y_m$  が求まる。

とくに定数係数の2階線形差分方程式

$$\left. \begin{aligned} -y_{n-1} + \alpha y_n - y_{n+1} &= \beta_n, \quad (n = 1, 2, \dots, m) \\ y_0 &= a, \quad y_{m+1} = b \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.12)$$

は Chebyshev の多項式を用いて, 一度に解の公式が得られる。(4.9) を考慮して, 多項式の漸化式

$$\left. \begin{aligned} p_0(x) &= 1, \quad p_1(x) = x, \\ p_{n+1}(x) &= xp_n(x) - p_{n-1}(x) \end{aligned} \right\} \dots \quad (4.13)$$

で定義されているものとする。 $p_n(x)$  は  $n$  次多項式で,  $n$  次正交行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & -1 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad (4.14)$$

の固有変数と同じになる。またかんたんな計算により  $|x| \leq 2$  のとき

$$p_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad x = 2\cos \theta \quad \dots \quad (4.15)$$

$x \geq 2$  のとき

$$p_n(x) = \frac{\sinh(n+1)\theta}{\sinh \theta}, \quad x = 2\cosh \theta \quad \dots \quad (4.16)$$

と書くことができる。これにより  $\ell, m, n$  を整数とすると関係式

$$p_\ell(x)p_{m-n}(x) - p_m(x)p_{\ell-n}(x) = p_{m-\ell-1}(x)p_{n-1}(x) \dots \quad (4.17)$$

をみだす。とくに  $m+1$  が  $\ell+1$  の倍数であるとき  $p_\ell(x)$  は  $p_m(x)$  を割り切ることも知られる。

この多項式を用いて (4.12) を解くには次のようにする。

(4.12) の両辺に  $p_{m-n}(\alpha)$  を掛けて  $n$  について 1 から  $m$  まで加えると

(4.13) により次の式を得る。

$$p_m(\alpha)y_1 = y_{m+1} + p_{m-1}(\alpha)y_0 + \sum_{k=1}^m p_{m-k}(\alpha)\beta_k \quad \dots \quad (4.18)$$

これは  $y_1$  以外に未知数をもたないから、 $y_1$  が求まる。したがって漸化式 (4.12) に逐次代入して  $y_2, y_3, \dots, y_m$  が求まるが、丸め誤差が成長することもあること、および  $y_k$  をすべての  $k=1, 2, \dots, m$  について求める必要のないこともあることの観点から、途中の任意の  $k$  に対する  $y_k$  の値を求める公式を作る。(4.18) で  $m$  の代りに  $\ell$  とおけば次の式を得る。

$$p_\ell(\alpha)y_1 = y_{\ell+1} + p_{\ell-1}(\alpha)y_0 + \sum_{k=1}^{\ell} p_{\ell-k}(\alpha)\beta_k \quad \dots \quad (4.19)$$

これと (4.18) とから  $y_1$  を消去し、(4.17) を用いて変形すると、



$$\begin{aligned}
 p_m(\alpha)y_{\ell+1} &= p_\ell(\alpha)[y_{m+1} + \sum_{k=\ell+1}^m p_{m-k}(\alpha)\beta_k] \\
 &+ p_{m-\ell-1}(\alpha)[y_0 + \sum_{k=1}^{\ell} p_{k-1}(\alpha)\beta_k] \dots \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

と得る。これは任意の  $\ell$  ( $1 \leq \ell \leq m$ ) に対する (4.12) の解を与える公式である。とくに  $m+1 = 2(\ell+1)$  の場合には  $p_\ell(x)$  は  $p_m(x)$  を割り切るから

$$q(x) = p_m(x)/p_\ell(x) = p_m(x)/p_{m-\ell-1}(x) \quad \dots \quad (4.21)$$

とおけば (4.20) は

$$\begin{aligned}
 y_{\ell+1} &= \{y_0 + y_{m+1} + p_\ell(\alpha)\beta_{\ell+1} \\
 &+ \sum_{k=1}^{\ell} p_{k-1}(\alpha)(\beta_k + \beta_{m-k+1})\} / q(\alpha) \quad \dots \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

となる。とくに同次方程式の場合  $\beta_n = 0$  ( $n=1, 2, \dots, m$ ) であるから

$$y_{\ell+1} = \{y_0 + y_{m+1}\} / q(\alpha), \quad m+1 = 2(\ell+1) \quad \dots \quad (4.23)$$

となる。これらの公式は分割数  $m+1$  が 2 の累乗になっているとき効果がある。多項式  $p_n(x)$  の値は  $x > 2$  で急増加するから、 $m$  を 20-30 位に止めないと計算機の表現する数の範囲をこえることがある。

## §5. 偏差分方程式

偏微分方程式をその近似差分方程式でおきかえて近似解を求めることは線形方程式の場合に広く行なわれるようになった。D を xy 平面上的任意の領域とし、その境界を L とする。

$a, b, c, d, e, f$  および  $g$  を  $\bar{D} = D + L$  内で十分滑らかな  $xy$  の函数とする。  $D$  内で偏微分方程式

$$L(u) = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g \quad \dots \quad (5.1)$$

を満足し、  $L$  上で与えられた函数  $\phi$  と一致する、  $D$  内で有界な函数  $u$  を求めるという問題を離散的に考えて、  $D$  内に正方格子を作り、その格子点  $P$  における解  $u$  の値を  $U(P)$  とかくと、連立1次方程式

$$L_h(U(P)) = \sum_Q A(P, Q) U(Q) = g(P) \quad \dots \quad (5.2)$$

が得られる。  $L(u) - L_h(U) = O(h^2)$  となるように  $A(P, Q)$  を定めるのが多い。このとき  $L_h(U)$  の  $L(u)$  への近似度は2であるという。

いま領域  $D$  が、とくに長方形であるとし、その4頂点を  $(0, 0)$ 、 $((m+1)h, 0)$ 、 $(0, (n+1)h)$ 、 $((m+1)h, (n+1)h)$  上にあるものとしよう。ここに  $h$  はきざりの間隔で、  $m, n$  は自然数で、  $m+1, n+1$  が  $x, y$  方向の分割数となる。

一般に  $f(ih, jh)$  を  $f_{i,j}$  と書くが、とくに解  $u$  については  $U_{i,j} = u(ih, jh)$  と大文字を使う。解  $U_{i,j}$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ) を  $n$  個ずつ組み合わせさせてベクトル  $u^i = (U_{i,j})_{j=1, 2, \dots, n}$  と書く。  $u^0, u^{m+1}$  も同様に定めるが、これは定数ベクトルである。  $u^i$  は解の同一線上  $i = \text{const}$  にあるものをまとめたベクトルである。(5.2) を行列  $\times$  ベクトル方程式として、

$$A_i u^{i-1} + B_i u^i + C_i u^{i+1} = g^i \quad \dots \quad (5.3)$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

と表わすことができる。  $A_i, B_i, C_i$  は3つう3重対角行列となる。

$A_i = (a_{jk}^{(i)})$ ,  $B_i = (b_{jk}^{(i)})$ ,  $C_i = (c_{jk}^{(i)})$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} a_{j,j}^{(i)} &= a_{i,j} - d_{i,j} h/2, \\ a_{j,j+1}^{(i)} &= -b_{i,j}/2, \\ a_{j+1,j}^{(i)} &= b_{i,j}/2, \\ a_{j,k}^{(i)} &= 0 \quad \dots \quad (j > k+1, \quad k > j+1) \end{aligned} \right\} \dots \quad (5.4)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{j,j}^{(i)} &= -2a_{i,j} - 2c_{i,j} + f_{i,j} h^2, \\ b_{j,j+1}^{(i)} &= c_{i,j} + e_{i,j} h/2, \\ b_{j+1,j}^{(i)} &= c_{i,j} - e_{i,j} h/2, \\ b_{j,k}^{(i)} &= 0 \quad \dots \quad (j > k+1, \quad k > j+1) \end{aligned} \right\} \dots \quad (5.5)$$

$$\left. \begin{aligned} c_{j,j}^{(i)} &= a_{i,j} + d_{i,j} h/2 \\ c_{j,j+1}^{(i)} &= b_{i,j}/2 \\ c_{j+1,j}^{(i)} &= -b_{i,j}/2 \\ c_{j,k}^{(i)} &= 0 \quad \dots \quad (j > k+1, \quad k > j+1) \end{aligned} \right\} \dots \quad (5.6)$$

また右辺はとくに  $h^2$  を掛けたもので,  $g^i$  の成分  $g_{i,j} (j=1,2,\dots,n)$  は

$$g_{i,j} = h^2 g(ih, jh) \quad \dots \quad (j=2,3,\dots,n-1) \quad \dots \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} g_{i,1} &= h^2 g(ih, h) + (b_{i-1,1}/2)U_{i-1,0} - (b_{i+1,1}/2)U_{i+1,0} \\ &\quad - (c_{i,1} - e_{i,1} h/2)U_{i,0} \quad \dots \quad (5.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{i,n} = & h^2 g(ih, nh) - (b_{i-1,n}/2)U_{i-1,n+1} \\
& + (b_{i+1,n}/2)U_{i+1,n+1} - (c_{i,n} + e_{i,n}h/2)U_{i,n+1} \\
& \dots \quad (5.9)
\end{aligned}$$

で与えられる。とくに(5.1)が  $u_{xy}$  の項をもたないときには、行列  $A_i$ ,  $C_i$  は対角行列で、容易にその逆行列が求まる。したがって  $A_i$  または  $C_i$  がすべての  $i$  に対して単位行列であるとしてもよい。

一般に連立方程式(5.3)を直接消去法で解くのは、前節の三重対角行列の逆転と似た方法が考えられる。(4.4)-(4.6)に対応する前進後退消去法では、まず前進部分

$$\left. \begin{aligned}
W_1 &= B_1^{-1}C_1, \\
W_i &= (B_i - A_i W_{i-1})^{-1} \cdot C_i, \quad i = 2, 3, \dots, m
\end{aligned} \right\} \dots \quad (5.10)$$

$$\left. \begin{aligned}
k^1 &= B_1^{-1}(g^1 - A_1 u^0), \\
k^2 &= (B_2 - A_2 W_1)^{-1}(g^2 - A_2(g^1 - A_1 u^0)), \\
k^i &= (B_i - A_i W_{i-1})^{-1}(g^i - A_i g^{i-1}), \quad i = 3, 4, \dots, m-1 \\
k^m &= (B_m - A_m W_{m-1})^{-1}(g^m - A_m g^{m-1} - C_m u^{m+1})
\end{aligned} \right\} \dots \quad (5.11)$$

と後退部分

$$\left. \begin{aligned}
u^m &= k^m \\
u^i &= k^i - W_i u^{i+1}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 2, 1
\end{aligned} \right\} \dots \quad (5.12)$$

により解  $u^i$  が逆順に求まる。

しかし後退部分で  $W_i$  を使用することは記憶装置を大量に使用すること

から得策ではない。Varga [1962] をまっまでもなく実現の見込みが薄い。そこで救済策として、 $u^m$  が求まった後は漸化式 (5.3) 自身を使用することを勧告する。 $A_i$  が対角行列のときは、なお効果がある。それにしても (5.10) で逆行列を求めることが、しばしば出てくることからこの方法は次の方法に席を譲るのがよいと思われる。すなわち (4.9)-(4.11) に対応する方法で、 $A_i$  (または  $C_i$ ) がすべてすぐに逆行列が求まる場合を考える。この場合初めから  $A_i$  をすべて単位行列とすることができ、したがって連立方程式を次のように書く。

$$u^{i-1} + B_i u^i + C_i u^{i+1} = g^i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \dots \quad (5.13)$$

そのとき

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= B_1, & E_1 &= C_1 \\ D_{i+1} &= E_i - D_i B_{i+1} & i &= 1, 2, \dots, m-1 \\ E_{i+1} &= -D_i C_{i+1} & i &= 1, 2, \dots, m-2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (5.14)$$

により、 $D_m$  を求めると、 $u^m$  は次の式から求まる。

$$D_m u^m = g^1 - u_0 + D_{m-1} C_m u^{m+1} - \sum_{i=1}^{m-1} D_i g^{i+1} \quad \dots \quad (5.15)$$

あとは  $u^{m+1}$ ,  $u^m$  から (5.13) に代入して逆順に解が求まる。注目すべきことは、この方法では、ただ一度しか行列を逆転していないことである。

公式 (5.14)-(5.15) による計算方法は線消去法のアイデアにもとづき、それを逆順に応用している。最後の  $u^2$ ,  $u^1$ ,  $u^0$  を (5.13) に代入すれば解の精度のチェックに役立つことを強調しておく。

(5.3) において、とくにすべての  $i$  に対して  $A_i = C_i$  で、すべて正則で

逆行列が容易に求まるときには、(5.3) の両辺にその逆行列を掛けておくことにより次の連立方程式を考へればよい。

$$u^{i-1} + B_i u^i + u^{i+1} = g^i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad \dots \quad (5.16)$$

この場合 (5.14) は次のようにかんたんになる。

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= I, & D_1 &= B_1 \\ D_{i+1} &= -D_i B_{i+1} - D_{i-1}, & i &= 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5.17)$$

解ベクトルの最後のもの  $u^m$  は

$$D_m u^m = g^1 - u^0 + D_{m-1} u^{m+1} - \sum_{i=1}^{m-1} D_i g^{i+1} \quad \dots \quad (5.18)$$

で与えられる。

のちに数値例で与えられるものは Laplace 方程式の Dirichlet 問題で、この場合にはすべての  $B_i$  が  $i$  に関係ない定数行列となる。これは前節 (4.12)-(4.23) に述べた公式と類似の公式によって解くことができる。これについては節を改めて書く。

## §6. 長方形における Dirichlet 問題の直接解

Helmholtz の偏微分方程式

$$\Delta u(x, y) - \kappa u(x, y) = g(x, y) \quad \dots \quad (6.1)$$

の Dirichlet 問題を長方形で考へる。ここで  $\kappa$  は定数とする。前節で述べた差分方程式は、Laplacian の 5 点近似公式を用いれば

$$u^{i-1} + (J - (4 + \kappa h^2)I)u^i + u^{i+1} = g^i \quad \dots \quad (6.2)$$

となる。ここで  $J$  は (4.14) で定義された行列,  $I$  は  $J$  と同次の単位行列である。

調和函数 ( $\kappa=0, g \equiv 0$ ) に対しては 真公式を用いるのがよく, その時には

$$(4I+J)u^{i-1} + 4(J-5I)u^i + (4I+J)u^{i+1} = g^i \quad \dots \quad (6.3)$$

となる。この場合 (6.1) の  $\Delta u$  への近似度は 6 である。この近似度は換りの問題などで表われる  $\Delta u = \text{const.}$  なる方程式に対しても保たれる。また (6.1) 自身に対しても右辺のベクトル  $g^i$  をうまく作れば近似度 6 の差分方程式を作ることができる。

たとえば, Poisson 方程式

$$\Delta u(x,y) = g(x,y) \quad \dots \quad (6.4)$$

について考えれば

$$\diamond_h U_{i,j} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1} - 4U_{i,j} \quad \dots \quad (6.5)$$

および

$$\square_h U_{i,j} = U_{i+1,j+1} + U_{i+1,j-1} + U_{i-1,j+1} + U_{i-1,j-1} - 4U_{i,j} \quad \dots \quad (6.6)$$

で  $\diamond_h, \square_h$  なる差分演算子を定義するとき

$$L_h(U) = \frac{1}{6h^2}(4\diamond_h U + \square_h U) - \frac{2}{4!}h^2\Delta g - \frac{2}{6!}h^4\left(\Delta^2 g + 2\frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2}\right) \quad \dots \quad (6.7)$$

で  $L_h(U)$  を定義すれば  $L_h(U) - \Delta u = O(h^6)$  となる。 $\Delta g$  の計算が面倒であったり,  $g$  が離散的に与えられるときには,  $\Delta g$  の代りに  $\frac{1}{h^2}\diamond_h g$  を代入し (6.7) の右辺の最後の項を省略して, 近似度 4 の公式を得る。

さて行列  $J$  は次の行列  $S$  による相似変換で対角形になる。

$$S = (s_{i,j}) = \left( \sin \frac{ij\pi}{n+1} \right) \quad \dots \quad (6.8)$$

$$S^{-1} = \frac{2}{n+1} S \quad \dots \quad (6.9)$$

$$S J S^{-1} = \Lambda \quad \dots \quad (6.10)$$

$$\Lambda = (\lambda_i \delta_{ij}) = \langle \lambda_i \rangle = \left\langle 2 \cos \frac{i\pi}{n+1} \right\rangle \quad \dots \quad (6.11)$$

ここで  $\langle \rangle$  は対角行列を表わすことにする。  $\delta_{ij}$  は Kronecker のデルタである。容易に次のことがわかる。

$$S J S = \frac{n+1}{2} \Lambda \quad \dots \quad (6.12)$$

また  $\alpha$  および  $\beta$  をスカラーとすると

$$S(\alpha I + \beta J)S = \frac{n+1}{2}(\alpha I + \beta J) \quad \dots \quad (6.13)$$

したがって (6.2) および (6.3) はベクトルの変換

$$u = Sv \quad \dots \quad (6.14)$$

によってそれぞれ

$$v^{i-1} + (\Lambda - (4+xh^2)I)v^i + v^{i+1} = \frac{2}{n+1} Sg^i \quad \dots \quad (6.15)$$

および

$$(4I + \Lambda)v^{i-1} + 4(\Lambda - 5I)v^i + (4I + \Lambda)v^{i+1} = \frac{2}{n+1} Sg^i \quad \dots \quad (6.16)$$

となる。ここで両式とも左辺の行列はすべて対角行列であることに注目すべきである。



COMPUTED VALUES ( UPPER ) AND TRUE VALUES ( LOWER ) OF THE SOLUTION OF  $\Delta U = 0$  WITH BOUNDARY VALUES  $X^5 - 10X^3Y^2 + 5XY^4$  ON A SQUARE.

-0.0000	-0.0000	0.0004	0.0018	0.0054	0.0128	0.0264	0.0494	0.0859	0.1409	0.2209	0.3332	0.4663	0.6921
-0.0000	-0.0000	0.0004	0.0018	0.0054	0.0128	0.0264	0.0494	0.0859	0.1409	0.2209	0.3332	0.4663	0.6921
0.0000	-0.0001	-0.0006	-0.0014	-0.0004	0.0035	0.0123	0.0292	0.0530	0.1037	0.1723	0.2713	0.4093	0.5966
0.0000	-0.0001	-0.0006	-0.0014	-0.0004	0.0035	0.0123	0.0292	0.0530	0.1037	0.1723	0.2713	0.4093	0.5966
0.0003	0.0001	-0.0009	-0.0030	-0.0058	-0.0088	-0.0107	-0.0095	0.0134	0.0436	0.0936	0.1745	0.2826	0.4403
0.0003	0.0001	-0.0009	-0.0030	-0.0058	-0.0088	-0.0107	-0.0095	0.0134	0.0436	0.0936	0.1745	0.2826	0.4403
0.0011	0.0013	-0.0002	-0.0039	-0.0100	-0.0182	-0.0278	-0.0371	-0.0450	-0.0361	-0.0117	0.0347	0.1113	0.2275
0.0011	0.0013	-0.0002	-0.0039	-0.0100	-0.0182	-0.0278	-0.0371	-0.0450	-0.0361	-0.0117	0.0347	0.1113	0.2275
0.0027	0.0041	0.0027	-0.0024	-0.0119	-0.0262	-0.0449	-0.0670	-0.0907	-0.1132	-0.1310	-0.1389	-0.0996	-0.0358
0.0027	0.0041	0.0027	-0.0024	-0.0119	-0.0262	-0.0449	-0.0670	-0.0907	-0.1132	-0.1310	-0.1389	-0.0996	-0.0358
0.0058	0.0096	0.0095	0.0037	-0.0090	-0.0297	-0.0585	-0.0951	-0.1384	-0.1862	-0.2354	-0.2818	-0.3198	-0.3418
0.0058	0.0096	0.0095	0.0037	-0.0090	-0.0297	-0.0585	-0.0951	-0.1384	-0.1862	-0.2354	-0.2818	-0.3198	-0.3418
0.0110	0.0192	0.0220	0.0169	0.0018	-0.0248	-0.0641	-0.1164	-0.1813	-0.2574	-0.3424	-0.4328	-0.5237	-0.6091
0.0110	0.0192	0.0220	0.0169	0.0018	-0.0248	-0.0641	-0.1164	-0.1813	-0.2574	-0.3424	-0.4328	-0.5237	-0.6091
0.0189	0.0342	0.0423	0.0400	0.0243	-0.0072	-0.0566	-0.1250	-0.2129	-0.3197	-0.4439	-0.5830	-0.7329	-0.8885
0.0189	0.0342	0.0423	0.0400	0.0243	-0.0072	-0.0566	-0.1250	-0.2129	-0.3197	-0.4439	-0.5830	-0.7329	-0.8885
0.0305	0.0564	0.0732	0.0767	0.0628	0.0283	-0.0299	-0.1140	-0.2253	-0.3643	-0.5304	-0.7221	-0.9363	-1.1688
0.0305	0.0564	0.0732	0.0767	0.0628	0.0283	-0.0299	-0.1140	-0.2253	-0.3643	-0.5304	-0.7221	-0.9363	-1.1688
0.0467	0.0878	0.1175	0.1307	0.1222	0.0875	0.0227	-0.0756	-0.2098	-0.3815	-0.5912	-0.8384	-1.1212	-1.4364
0.0467	0.0878	0.1175	0.1307	0.1222	0.0875	0.0227	-0.0756	-0.2098	-0.3815	-0.5912	-0.8384	-1.1212	-1.4364
0.0687	0.1304	0.1785	0.2064	0.2078	0.1770	0.1089	-0.0011	-0.1566	-0.3604	-0.6144	-0.9189	-1.2735	-1.6761
0.0687	0.1304	0.1785	0.2064	0.2078	0.1770	0.1089	-0.0011	-0.1566	-0.3604	-0.6144	-0.9189	-1.2735	-1.6761
0.0975	0.1868	0.2598	0.3086	0.3257	0.3040	0.2371	0.1191	-0.0549	-0.2892	-0.5866	-0.9492	-1.3776	-1.8711
0.0975	0.1868	0.2598	0.3086	0.3257	0.3040	0.2371	0.1191	-0.0549	-0.2892	-0.5866	-0.9492	-1.3776	-1.8711
0.1346	0.2595	0.3653	0.4426	0.4825	0.4764	0.4165	0.2956	0.1071	-0.1544	-0.4935	-0.9135	-1.4164	-2.0030
0.1346	0.2595	0.3653	0.4426	0.4825	0.4764	0.4165	0.2956	0.1071	-0.1544	-0.4935	-0.9135	-1.4164	-2.0030
0.1813	0.3514	0.4993	0.6141	0.6852	0.7028	0.6572	0.5397	0.3423	0.0580	-0.3193	-0.7945	-1.3712	-2.0516
0.1813	0.3514	0.4993	0.6141	0.6852	0.7028	0.6572	0.5397	0.3423	0.0580	-0.3193	-0.7945	-1.3712	-2.0516
0.2393	0.4657	0.6665	0.8292	0.9418	0.9923	0.9698	0.8538	0.6646	0.3636	-0.0470	-0.5738	-1.2220	-1.9955
0.2393	0.4657	0.6665	0.8292	0.9418	0.9923	0.9698	0.8538	0.6646	0.3636	-0.0470	-0.5738	-1.2220	-1.9955

INJOB 00001 OUIOR 00143 PPJOB 00002 COMPILE TIME 30009SEC TOTAL TIME 90021SEC  
 ACCOUNT DATA3002A042405410003610406410002511041211045300020000600002

Table 1



EXTERNAL FORMULA NUMBER	SOURCE STATEMENT	INTERNAL FORMULA NUMBER
	SUBROUTINE BETAV(U1,U2,U,Y0,Y1,L,N)	1
	DIMENSION BETA(100),U1(100),U2(100),V(100),U(100),Y0(100),Y1(100)	
	DOUBLE PRECISION BETA,U1,U2,V,U,Y0,Y1,PI,S,T,P	
	COMMON PI,M,L1,L2	
	DO 150 J=1,L1-1	2
	DO 145 K=1,M	4
145	BETA(K)=(2.0/FLOAT(L1))*(U1(K)*DSIN(FLOAT(J)*PI/FLOAT(L1))+U2(K)*	
	1DSIN(FLOAT(J*(L1-1))*PI/FLOAT(L1)))	6
	IF(N-1) 151,151,152	7
151	S=Y1(J)	8
	T=Y0(J)	9
	GO TO 153	10
152	JL=J+L2	11
	S=Y1(JL)	12
	T=Y0(JL)	13
153	DO 146 K=L,M	14
	AJ=J	16
	AMK=M-K	17
	AM=M	18
146	S=S+P(AMK,AJ)*BETA(K)	19
	S=S/P(AM,AJ)	20
	DO 147 K=1,L-1	21
	AK=K-1	23
147	T=T+P(AK,AJ)*BETA(K)	24
	T=T/P(AM,AJ)	25
	AL=L-1	26
	AML=M-L	27
	IF(N-1) 161,161,162	28
161	V(J)=P(AL,AJ)*S+P(AML,AJ)*T	29
	GO TO 150	30
162	V(JL)=P(AL,AJ)*S+P(AML,AJ)*T	31
150	CONTINUE	32
	IF(N-1) 165,165,166	33
165	DO 155 J=1,L1-1	34
	U(J)=0.0	36
	DO 154 K=1,L1-1	37
154	U(J)=U(J)+DSIN(FLOAT(J*K)*PI/FLOAT(L1))*V(K)	39
155	CONTINUE	40
	WRITE(6,211)(U(J),J=1,L1-1)	41
	RETURN	45
166	DO 175 J=L2+1,M	46
	JJ=J-L2	48
	U(J)=0.0	49
	DO 174 K=L2+1,M	50
	KK=K-L2	52
174	U(J)=U(J)+DSIN(FLOAT(JJ*KK)*PI/FLOAT(L1))*V(K)	53
175	CONTINUE	54
	WRITE(6,211)(U(J),J=L2+1,M)	55
211	FORMAT(1H0,9X,12HKEISAN KEKKA ,6X,(9F10.4))	59
	RETURN	60
	END	61

Fig.2 (1)

EXTERNAL FORMULA NUMBER	SOURCE STATEMENT	INTERNAL FORMULA NUMBER
	DOUBLE PRECISION FUNCTION F(X,Y)	1
	DOUBLE PRECISION X,Y,PI	
	COMMON PI	
	F=1000.0*DSIN(PI*X/3.0)*DSINH(PI*Y/3.0)/DSINH(PI)	2
	RETURN	3
	END	4

Fig.2 (2)

EXTERNAL FORMULA NUMBER	SOURCE STATEMENT	INTERNAL FORMULA NUMBER
	DOUBLE PRECISION FUNCTION P(XX,YY)	1
	DOUBLE PRECISION ALPHA,AA,BB,CC,PI	
	COMMON PI,H,L1	
	ALPHA=4.0-2.0*DCOS(YY*PI/FLOAT(L1))	2
	IF(XX-1.0) 200,201,202	3
200	P=1.0	4
	RETURN	5
201	P=ALPHA	6
	RETURN	7
202	AA=1.0	8
	BB=ALPHA	9
	XN=2.0	10
203	CC=ALPHA*BB-AA	11
	AA=BB	12
	BB=CC	13
	IF(XX.EQ.XN) GO TO 204	14
	XN=XN+1.0	16
	GO TO 203	17
204	P=BB	18
	RETURN	19
	END	20

Fig.2 (3)

EXTERNAL FORMULA NUMBER	SOURCE STATEMENT	INTERNAL FORMULA NUMBER
	DIMENSION U(100,100),P(100),B(100),Y(2)	
	FUNC(AA,BB)=AA**5-10.0*AA**3*BB**2+5.0*AA*BB**4	1
	N=15	2
	H=1.0/FLOAT(N+1)	3
	PI=3.14159265	4
	DO 15 J=1,N	5
	A=1.0	7
	P(1)=(4.0*(5.0-2.0*COS((PI*FLOAT(J))/FLOAT(N+1))))/(4.0+2.0*COS((P	
	1I*FLOAT(J))/FLOAT(N+1)))	8
	DO 20 K=2,N	9
	P(K)=P(1)*P(K-1)-A	11
	A=P(K-1)	12
20	CONTINUE	13
	SUM=0.0	14
	DO 25 K=1,N	15
	SUM=SUM+SIN((PI*FLOAT(J*K))/FLOAT(N+1))*FUNC(0.0,H*FLOAT(K))	17
25	CONTINUE	18
	Y(1)=(2.0/FLOAT(N+1))*SUM	19
	SUM=0.0	20
	DO 28 K=1,N	21
	SUM=SUM+SIN((PI*FLOAT(J*K))/FLOAT(N+1))*FUNC(1.0,H*FLOAT(K))	23
28	CONTINUE	24
	Y(2)=(2.0/FLOAT(N+1))*SUM	25
	DO 30 K=1,N	26
	B(K)=(2.0/((4.0+2.0*COS((PI*FLOAT(J))/FLOAT(N+1))*FLOAT(N+1)))*(S	
	1IN((PI*FLOAT(J))/FLOAT(N+1))*(FUNC(H*FLOAT(K-1),0.0)+4.0*FUNC(H*FL	
	20AT(K),0.0)+FUNC(H*FLOAT(K+1),0.0))+SIN((PI*FLOAT(J*N))/FLOAT(N+1)	
	3)*(FUNC(H*FLOAT(K-1),1.0)+4.0*FUNC(H*FLOAT(K),1.0)+FUNC(H*FLOAT(K+	
	41),1.0)))	28
30	CONTINUE	29
	DO 35 I=1,N	30
	SUM=0.0	32
	IF(I.EQ.N)GO TO 41	33
	DO 40 K=I,N-1	35
	NK=N-K	37
	SUM=SUM+P(NK)*B(K)	38
40	CONTINUE	39
41	SUM=SUM+B(N)	40
	IF(I.EQ.1)GO TO 43	41
	Q=P(I-1)/P(N)	43
	GO TO 47	44
43	Q=1.0/P(N)	45
47	SUM1=Q*(Y(2)+SUM)	46
	SUM=0.0	47
	IF(I.EQ.1)GO TO 45	48
	IF(I.EQ.2)GO TO 51	50
	DO 50 K=2,I-1	52
	SUM=SUM+P(K-1)*B(K)	54
50	CONTINUE	55
51	SUM=SUM+B(1)	56
45	NI=N-I	57
	IF(NI.EQ.0)GO TO 52	58
	Q=P(NI)/P(N)	60
	GO TO 54	61
52	Q=1.0/P(N)	62
54	SUM2=Q*(Y(1)+SUM)	63
	U(I,J)=SUM1+SUM2	64
35	CONTINUE	65
15	CONTINUE	66
	DO 55 J=1,N	67
	DO 60 I=1,N	69
	SUM=0.0	71
	DO 65 K=1,N	72
	SUM=SUM+SIN((PI*FLOAT(J*K))/FLOAT(N+1))*U(I,K)	74
65	CONTINUE	75
	B(I)=SUM	76
	P(I)=FUNC(H*FLOAT(I),H*FLOAT(J))	77
60	CONTINUE	78
	WRITE(6,215)(B(I),I=1,N)	79
	WRITE(6,215)(P(I),I=1,N)	83
	WRITE(6,210)	87
55	CONTINUE	88
210	FORMAT(1H )	89
215	FORMAT(1H ,15F8.4)	90
	STOP	91
	END	92

$$v^i = (V_{i,j})_{i=1,2,\dots,n} \quad \text{また} \quad \frac{2}{n+1} Sg^i = (G_{i,j})_{j=1,2,\dots,n}$$

とすれば、ベクトルの成分で書き表わすことによつて、その意味が一層よく理解される。すなはち、

$$V_{i-1,j} + (\lambda_j - 4 - kh^2) V_{i,j} + V_{i+1,j} = G_{i,j} \quad \dots \quad (6.17)$$

$$(4 + \lambda_j) V_{i-1,j} + 4(\lambda_j - 5) V_{i,j} + (4 + \lambda_j) V_{i+1,j} = G_{i,j} \dots \quad (6.18)$$

が得られる。(6.18)において  $4 + \lambda_j \neq 0$  だから  $4 + \lambda_j$  で両辺を割れば (6.17) と同じ形となり、(4.12)-(4.20)を用いて効果的に解くことができる。

Table 1.および Table 2.は、この方法で正方形  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  内で Laplace 方程式の Dirichlet 問題を解いた計算結果である。境界条件は、境界上で函数  $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$  を与えた時の解が Table 1 で  $\sinh(x) \cos(y)$  を与えた時の解が Table 2 である。ともに分割数は  $x, y$  両方向とも 16 である。

使用計算機は東京大学大型計算機センターの HITAC 5020 である。

$h = 1/16$  に対して 9 点公式で 5 桁の精度をもっている。

Fig. 2 にその計算プログラムを示す。

§7. 凹型領域での Dirichlet 問題

線の方法と Schwarz の方法とを併せて用いることによって, Fig. 3 のような穴あき正方形における調和関数の Dirichlet 問題を解いて見よう。

一辺の長さが3である正方形 ABCD の真ん中に一辺の長さ1である正方形 EFGH が Fig. 3 のように辺が平行になるようにしてある。

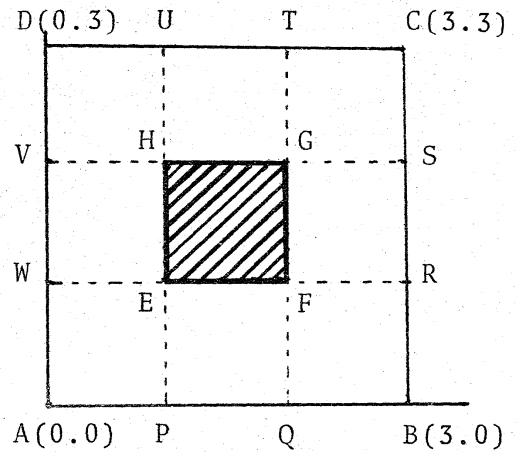


Fig. 3

この二つの正方形を境界にもつ穴あき正方形を領域 D とする。平面に直交座標系  $(x,y)$  を導入して点 A を座標原点とし  $\vec{AB}$  方向を x 軸,  $\vec{AD}$  方向を y 軸とする。内部正方形の辺の延長が外境界と交わる点を Fig. 3 のように P, Q, ..., W とする。

境界上で函数

$$\phi(x,y) = 1000.0 \cdot \sin \frac{\pi x}{3} \sinh \frac{\pi y}{3} / \sinh \pi \quad \dots \quad (7.1)$$

を与えて  $\Delta u = \phi$  の Dirichlet 問題を領域 D でとく。領域 D を長方形 CDVS, ABRW, APUD, BCTQ の重ね合わせとして考える。初めに VH, GS; WE, FR 上で出発値を適当に与える。後に示される計算例では 0 近似を

$$u_{VH}^0 = u_{GS}^0 = 10, \quad u_{WE}^0 = u_{FR}^0 = 1 \quad \dots \quad (7.2)$$

を与えた, Fig. 4 の解から見ると, すい分荒い近似値だが, これで HU,

GT; EP, FQ 上の  $\epsilon_1$  近似値を求め、それにより、又 VH, GS; WE, FR 上の  $\epsilon_1$  近似が得られるが、すでに解に近くなっていることが Table 3 により知れる。

Schwarz の方法で示したように、解とくらべて見れば、初めに与えた出発値 (7.2) は劣函数列を与えることがわかる。しかし Table 3, 3 STEP から真の解よりも計算結果が大きくなっている実があり、4 STEP では全部計算結果が大きい。近似差分方程式の解は 25 STEP あたりで表示された桁数だけ完全に収束している。劣函数が真の解より大きくなるのは、差分近似式の精度がそこまでであることに外ならない。実際優函数を  $\epsilon_0$  近似

$$u_{VH}^{\circ} = u_{GS}^{\circ} = 1000, \quad u_{WE}^{\circ} = u_{FR}^{\circ} = 100 \quad \dots \quad (7.3)$$

として計算して見れば、4 STEP で VH 上では小数第 2 位まで劣函数と同じで少し大きい値が得られている。優函数は劣函数より大きくて差分方程式の解に収束している。



## References

- Berezin, I.S. and Zhidkov, N.P. [1965]: *Metody vychislenii*, Fizmatgiz, Moscow. (Translated from Russian by Blunn. O.M. Computing methods I,II, Pergamon Press, Oxford, 1965)
- Forsythe, G.E. and Wasow W.R. [1960]: *Finite-difference method for partial differential equations*, John Wiley and Sons, New York, London.
- Kantrovič L.V. and Krylov V.I. [1952]: *Priblizhennyye metody vysshego analiza*, Gostekhizdat Moscow, Leningrad. (Translated from Russian by C. D. Benster: *Approximate method of higher analysis*, Interscience Publishers Inc., New York 1958)
- 加藤敏夫, 藤田 宏, 橋本英典, 中田義元 [1958] : 微分方程式の近似解法 I,II,III,岩波書店, 小松勇作 [1944] : 等角写像論上,下, 共立出版
- Lyusternik L.A. [1954]: *O raznostnykh approksimatsiyakh operatora Laplasa*, *Uspehi Math.Nauk* vol. 9 no. 2, pp. 3-66 (J.B.Diatz: *On difference approximations of the Laplace operator*, *Amer. Math. Soc. Translations* (2), vol. 8 1958, pp. 289-351)
- Nakashima, K. [1963]: *On the computation of the general eigenproblem*. *Information Processing in Japan*, vol. 3, pp. 25-32.
- Nakashima, K. [1965]: *Numerical computation of elliptic partial diffefential equations, I. Method of lines*, *Momos. of the School of Sci. and Eng. Waseda Univ.*, vol. 29, pp.115-127.
- Nevanlinna, F. [1939]: *Über das alternierendes Verfahren von Schwarz*. *Crelles Journ.* Bd.180, pp.121-128.

EXTERNAL FORMULA NUMBER	SOURCE STATEMENT	INTERNAL FORMULA NUMBER
	DIMENSION UA(100),UB(100),UC(100),UD(100),UP(100),UQ(100),UR(100), 1US(100),VA(100),VD(100),VP(100),VS(100),Z(100)	
	DOUBLE PRECISION UA,UB,UC,UD,UP,UQ,UR,US,VA,VD,VP,VS,Z,PI,F,H COMMON PI,M,L1,L2	
	READ(5,100)M,L1,L2	1
100	FORMAT(3I5)	2
	READ(5,101)(UB(I),UC(I),I=1,L1-1),(UB(I),UC(I),I=L2+1,M)	3
101	FORMAT(16F5.0)	10
	WRITE(6,102)	11
102	FORMAT(1H1,5X,23HDIRICLET MONDAI 5-POINT ///,5X,19HINITIAL VALUS O 1N VH,11X,19HINITIAL VALUS ON WE,11X,19HINITIAL VALUS ON GS,11X,19H 2INITIAL VALUS ON FR)	12
	WRITE(6,103)(UR(I),UC(I),UR(I),UC(I),I=1,L1-1)	13
103	FORMAT(1H , (3X,D24.15,6X,D24.15,6X,D24.15,6X,D24.15))	17
	WRITE(6,104)	18
104	FORMAT(1H0,14HBOUNDARY VALUS / 20X,5HON AB,25X,5HON BC,25X,5HON AD 1,25X,5HON DC)	19
	PI=3.1415926535897932	20
	H=3.0/FLOAT(M+1)	21
	DO 10 I=1,M+1	22
	UD(I)=F(H*FLCAT(I),0.0)	24
	US(I)=F(3.0,H*FLCAT(I))	25
	UP(I)=F(0.0,H*FLCAT(I))	26
	UA(I)=F(H*FLCAT(I),3.0)	27
	WRITE(6,105)UD(I),US(I),UP(I),UA(I)	28
105	FORMAT(1H ,3X,D24.15,6X,D24.15,6X,D24.15,6X,D24.15)	29
10	CONTINUE	30
	WRITE(6,106)	31
106	FORMAT(1H0,20X,5HON EF,25X,5HON FG,25X,5HON EH,25X,5HON FG) DO 15 I=L1,L2	32
	UC(I)=F(H*FLCAT(I),1.0)	35
	UR(I)=F(2.0,H*FLCAT(I))	36
	UQ(I)=F(1.0,H*FLCAT(I))	37
	UR(I)=F(H*FLCAT(I),2.0)	38
	WRITE(6,107)UC(I),UR(I),UQ(I),UR(I)	39
107	FORMAT(1H 3X,D24.15,6X,D24.15,6X,D24.15,6X,D24.15)	40
15	CONTINUE	41
	DO 20 I=1,L1-1	42
	VP(I)=0.0	44
	VS(I)=0.0	45
	VD(I)=0.0	46
	VA(I)=0.0	47
	DO 19 J=1,L1-1	48
	VP(I)=VP(I)+(2.0/FLOAT(L1))*UP(J)*DSIN(FLOAT(I*J)*PI/FLOAT(L1))	50
	VS(I)=VS(I)+(2.0/FLOAT(L1))*US(J)*DSIN(FLOAT(I*J)*PI/FLOAT(L1))	51
	VD(I)=VD(I)+(2.0/FLOAT(L1))*UD(J)*DSIN(FLOAT(I*J)*PI/FLOAT(L1))	52
	VA(I)=VA(I)+(2.0/FLOAT(L1))*UA(J)*DSIN(FLOAT(I*J)*PI/FLOAT(L1))	53
19	CONTINUE	54
20	CONTINUE	55
	DO 22 I=L2+1,M	56
	VP(I)=0.0	58
	VS(I)=0.0	59
	VD(I)=0.0	60
	VA(I)=0.0	61
	K=I-L2	62
	DO 21 J=L2+1,M	63
	LL=J-L2	65
	VP(I)=VP(I)+(2.0/FLOAT(L1))*UP(J)*DSIN(FLOAT(K*LL)*PI/FLCAT(L1))	66
	VS(I)=VS(I)+(2.0/FLOAT(L1))*US(J)*DSIN(FLOAT(K*LL)*PI/FLOAT(L1))	67

Table 3 (1)

EXTERNAL FORMULA NUMBER	SOURCE STATEMENT	INTERNAL FORMULA NUMBER
	VD(I)=VD(I)+(2.0/FLOAT(L1))*LD(J)*DSIN(FLOAT(K*LL)*PI/FLCAT(L1))	68
	VA(I)=VA(I)+(2.0/FLOAT(L1))*UA(J)*DSIN(FLOAT(K*LL)*PI/FLCAT(L1))	69
21	CONTINUE	70
22	CONTINUE	71
	II=1	72
23	WRITE(6,108)II	73
108	FORMAT(1H,13,4HSTEP)	74
	CALL BETAV(UD,UC,UQ,VP,VS,L1,1)	75
	DO 25 J=1,L1-1	76
25	Z(J)=F(1.0,H*FLOAT(J))	78
	WRITE(6,109)(Z(J),J=1,L1-1)	79
	CALL BETAV(UD,UC,UR,VP,VS,L2,1)	83
	DO 26 J=1,L1-1	84
26	Z(J)=F(2.0,H*FLOAT(J))	86
	WRITE(6,110)(Z(J),J=1,L1-1)	87
	CALL BETAV(UR,UA,UC,VP,VS,L1,2)	91
	DO 27 J=L2+1,M	92
27	Z(J)=F(1.0,H*FLOAT(J))	94
	WRITE(6,111)(Z(J),J=L2+1,M)	95
	CALL BETAV(UR,UA,UR,VP,VS,L2,2)	99
	DO 28 J=L2+1,M	100
28	Z(J)=F(2.0,H*FLOAT(J))	102
	WRITE(6,112)(Z(J),J=L2+1,M)	103
	CALL BETAV(UR,UQ,UC,VD,VA,L1,1)	107
	DO 29 J=1,L1-1	108
29	Z(J)=F(H*FLOAT(J),1.0)	110
	WRITE(6,113)(Z(J),J=1,L1-1)	111
	CALL BETAV(JR,UQ,UR,VD,VA,L2,1)	115
	DO 30 J=1,L1-1	116
30	Z(J)=F(H*FLOAT(J),2.0)	118
	WRITE(6,114)(Z(J),J=1,L1-1)	119
	CALL BETAV(JR,US,UC,VD,VA,L1,2)	123
	DO 31 J=L2+1,M	124
31	Z(J)=F(H*FLOAT(J),1.0)	126
	WRITE(6,115)(Z(J),J=L2+1,M)	127
	CALL BETAV(JR,US,UR,VD,VA,L2,2)	131
	DO 32 J=L2+1,M	132
32	Z(J)=F(H*FLOAT(J),2.0)	134
	WRITE(6,116)(Z(J),J=L2+1,M)	135
	IF(II.EQ.25) GO TO 40	139
	II=II+1	141
	GO TO 23	142
109	FORMAT(1H ,9X,18HSHIN NO ATAI ON PE ,(9F10.4))	143
110	FORMAT(1H ,9X,18HSHIN NO ATAI ON QF ,(9F10.4))	144
111	FORMAT(1H ,9X,18HSHIN NO ATAI ON HU ,(9F10.4))	145
112	FORMAT(1H ,9X,18HSHIN NO ATAI ON GT ,(9F10.4))	146
113	FORMAT(1H ,9X,18HSHIN NO ATAI ON WE ,(9F10.4))	147
114	FORMAT(1H ,9X,18HSHIN NO ATAI ON VH ,(9F10.4))	148
115	FORMAT(1H ,9X,18HSHIN NO ATAI ON FR ,(9F10.4))	149
116	FORMAT(1H ,9X,18HSHIN NO ATAI ON GS ,(9F10.4))	150
40	STOP	151
	END	152

## 1STEP

KEISAN KEKKA	51.2326	10.4162	15.7529	21.2495	26.9768	33.0526	39.7556	47.9705	61.0636
SHIN NO AITAI ON PE	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	51.1824	10.4162	15.7529	21.2495	26.9768	33.0526	39.7556	47.9705	61.0636
SHIN NO AITAI ON OF	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	278.0429	301.8732	353.5950	406.4712	467.5955	533.9491	606.2122	685.0259	771.3120
SHIN NO AITAI ON HU	333.9296	371.8677	415.4454	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	270.0429	301.8732	353.5950	406.4712	467.5955	533.9491	606.2122	685.0259	771.3120
SHIN NO AITAI ON GT	333.9296	371.8677	415.4454	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	10.4781	20.8334	33.9448	40.5938	49.9613	58.5591	66.7367	74.3131	82.1451
SHIN NO AITAI ON WS	11.3031	22.4923	33.4311	44.0016	54.0911	63.5879	72.3880	80.3950	87.5212
KEISAN KEKKA	34.1165	67.7893	100.6007	132.1215	161.8238	189.5893	215.5356	239.4479	263.9566
SHIN NO AITAI ON V	35.1914	71.8433	105.9955	140.8305	173.1224	203.5176	231.6830	257.3101	280.1180
KEISAN KEKKA	82.1451	74.3131	66.7367	58.5591	49.9613	40.5938	30.9448	20.8334	10.4781
SHIN NO AITAI ON FR	87.5212	80.3950	72.3880	63.5879	54.0911	44.0016	33.4301	22.4923	11.3081
KEISAN KEKKA	253.9566	239.4479	215.5356	189.8395	161.8238	132.1215	100.6007	67.7898	34.1128
SHIN NO AITAI ON GS	280.1180	257.3101	231.6830	203.5176	173.1224	140.8305	106.9955	71.9884	36.1924

## 2STEP

KEISAN KEKKA	7.6722	15.4283	23.3534	31.5346	40.0636	49.0400	58.5811	68.8550	80.2050
SHIN NO AITAI ON PE	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	7.6722	15.4283	23.3534	31.5346	40.0636	49.0400	58.5811	68.8550	80.2050
SHIN NO AITAI ON QF	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	329.8165	367.1135	409.3639	456.3503	508.4062	566.0499	629.8979	700.6458	779.0683
SHIN NO AITAI ON HU	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	329.8165	367.1135	409.3639	456.3503	508.4062	566.0499	629.8979	700.6458	779.0683
SHIN NO AITAI ON GT	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	11.2542	22.3842	33.2673	43.7835	53.8169	63.2579	72.0064	79.9812	87.1534
SHIN NO AITAI ON WS	11.3081	22.4923	33.4311	44.0016	54.0911	63.5879	72.3880	80.3950	87.5212
KEISAN KEKKA	36.0673	71.7351	106.6076	140.2990	172.4365	202.6677	230.6703	256.1798	279.0877
SHIN NO AITAI ON V	36.1924	71.9883	106.9955	140.8305	173.1224	203.5176	231.6830	257.3101	280.1180
KEISAN KEKKA	37.1534	79.9812	72.0064	63.2579	53.8169	43.7835	33.2673	22.3842	11.2542
SHIN NO AITAI ON FR	37.5212	80.3950	72.3880	63.5879	54.0911	44.0016	33.4301	22.4923	11.3081
KEISAN KEKKA	279.0877	256.1798	230.6703	202.6677	172.4365	140.2990	106.6076	71.7350	36.0673
SHIN NO AITAI ON GS	286.1180	257.3101	231.6830	203.5176	173.1224	140.8305	106.9955	71.9884	36.1924

Table 3 (3)

## 3STEP

KEISAN KEKKA	7.8583	15.7986	23.9140	32.2914	41.0228	50.2041	59.9372	70.3331	81.5214
SHIN NO ATAI ON PE	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	7.8563	15.7986	23.9140	32.2914	41.0228	50.2041	59.9372	70.3331	81.5214
SHIN NO ATAI ON OF	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	333.7049	371.4437	413.3117	459.7236	511.1765	568.2309	631.5111	701.7191	779.5971
SHIN NO ATAI ON HU	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	333.7040	371.4437	413.3117	459.7236	511.1765	568.2309	631.5111	701.7191	779.5971
SHIN NO ATAI ON GT	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	11.3037	22.4932	33.4308	44.0012	54.0835	63.5819	72.3774	80.3795	87.5040
SHIN NO ATAI ON WE	11.3081	22.4923	33.4301	44.0016	54.0911	63.5879	72.3880	80.3950	87.5212
KEISAN KEKKA	36.1979	71.9934	107.0085	140.8438	173.1329	203.5210	231.6749	257.2872	280.0852
SHIN NO ATAI ON V4	36.1924	71.9883	106.9955	140.8385	173.1224	203.5176	231.6830	257.3101	280.1180
KEISAN KEKKA	37.5040	80.3795	122.3774	163.5819	204.0885	244.0012	283.4308	322.4932	361.3087
SHIN NO ATAI ON FR	37.5212	80.3950	122.3880	163.5879	204.0911	244.0016	283.4301	322.4923	361.3081
KEISAN KEKKA	280.0852	257.2872	231.6749	203.5210	173.1329	140.8438	107.0085	71.9984	36.1979
SHIN NO ATAI ON GS	280.1180	257.3101	231.6830	203.5176	173.1224	140.8305	106.9955	71.9884	36.1924
KEISAN KEKKA	7.8692	15.8246	23.9534	32.3446	41.0902	50.2859	60.0325	70.4369	81.6138
SHIN NO ATAI ON OF	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	333.9610	371.7302	413.5731	459.9470	511.3600	568.3755	631.6180	701.7807	779.6321
SHIN NO ATAI ON HU	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	333.9610	371.7302	413.5731	459.9470	511.3600	568.3755	631.6180	701.7807	779.6321
SHIN NO ATAI ON GT	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	11.3125	22.5003	33.4421	44.0163	54.1074	63.6045	72.4034	80.4074	87.5285
SHIN NO ATAI ON WE	11.3081	22.4923	33.4301	44.0016	54.0911	63.5879	72.3880	80.3950	87.5212
KEISAN KEKKA	36.2055	72.0158	107.0351	140.8800	173.1790	203.5775	231.7414	257.3605	280.1512
SHIN NO ATAI ON V4	36.1924	71.9883	106.9955	140.8305	173.1224	203.5176	231.6830	257.3101	280.1180
KEISAN KEKKA	87.5235	80.4074	72.4034	63.6045	54.1074	44.0163	33.4421	22.5008	11.3125
SHIN NO ATAI ON FR	87.5212	80.3950	72.3880	63.5879	54.0911	44.0016	33.4301	22.4923	11.3081
KEISAN KEKKA	280.1512	257.3605	231.7414	203.5775	173.1790	140.8800	107.0351	72.0158	36.2065
SHIN NO ATAI ON GS	280.1180	257.3101	231.6830	203.5176	173.1224	140.8305	106.9955	71.9884	36.1924

## 4STEP

## 5STEP

KEISAN KEKKA	7.8701	15.8264	23.9562	32.3483	41.0049	50.2016	60.0391	70.4442	81.6203
SHIN NO AITAI ON PE	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0028	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	7.8701	15.8264	23.9562	32.3483	41.0049	50.2016	60.0391	70.4442	81.6203
SHIN NO AITAI ON QF	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0028	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	333.9739	371.7492	413.5914	459.9613	511.3722	568.3950	631.6251	701.7854	779.6345
SHIN NO AITAI ON HU	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	333.9739	371.7492	413.5914	459.9613	511.3722	568.3950	631.6251	701.7854	779.6345
SHIN NO AITAI ON GT	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	11.3127	22.5013	33.4429	44.0174	54.1087	63.6061	72.4052	80.4093	87.5302
SHIN NO AITAI ON WE	11.3081	22.4923	33.4301	44.0016	54.0911	63.5879	72.3880	80.3950	87.5212
KEISAN KEKKA	36.2071	72.0170	107.0369	140.8824	173.1821	203.5176	231.7459	257.3653	280.1555
SHIN NO AITAI ON VH	36.1924	71.9833	106.9955	140.8305	173.1224	203.5176	231.6830	257.3101	280.1180
KEISAN KEKKA	87.5302	80.4093	72.4052	63.6061	54.1087	44.0174	33.4429	22.5013	11.3127
SHIN NO AITAI ON FR	87.5212	80.3950	72.3880	63.5879	54.0911	44.0016	33.4301	22.4923	11.3081
KEISAN KEKKA	280.1555	257.3653	231.7459	203.5176	173.1821	140.8824	107.0368	72.0170	36.2071
SHIN NO AITAI ON GS	280.1180	257.3101	231.6830	203.5176	173.1224	140.8305	106.9955	71.9884	36.1924

## 6STEP

KEISAN KEKKA	7.8702	15.8266	23.9563	32.3486	41.0952	50.2020	60.0396	70.4447	81.6207
SHIN NO AITAI ON PE	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	7.8702	15.8266	23.9563	32.3486	41.0952	50.2020	60.0396	70.4447	81.6207
SHIN NO AITAI ON QF	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	333.9791	371.7504	413.5915	459.9628	511.3730	568.3857	631.6256	701.7857	779.6346
SHIN NO AITAI ON HU	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	333.9791	371.7504	413.5915	459.9628	511.3730	568.3857	631.6256	701.7857	779.6346
SHIN NO AITAI ON GT	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	11.3128	22.5014	33.4430	44.0175	54.1088	63.6062	72.4053	80.4094	87.5304
SHIN NO AITAI ON WE	11.3081	22.4923	33.4301	44.0016	54.0911	63.5879	72.3880	80.3950	87.5212
KEISAN KEKKA	36.2071	72.0171	107.0370	140.8825	173.1823	203.5815	231.7461	257.3657	280.1558
SHIN NO AITAI ON V=	36.1924	71.9883	106.9955	140.8305	173.1224	203.5176	231.6830	257.3101	280.1180
KEISAN KEKKA	87.5304	80.4094	72.4053	63.6062	54.1086	44.0175	33.4430	22.5014	11.3128
SHIN NO AITAI ON F9	87.5212	80.3950	72.3880	63.5879	54.0911	44.0016	33.4301	22.4923	11.3081
KEISAN KEKKA	280.1558	257.3657	231.7461	203.5815	173.1823	140.8825	107.0370	72.0171	36.2071
SHIN NO AITAI ON GS	280.1180	257.3101	231.6830	203.5176	173.1224	140.8305	106.9955	71.9884	36.1924

KEISAN KEKKA	7.8702	15.8266	23.9564	32.3486	41.0952	50.2020	60.0396	70.4447	81.6208
SHIN NO ATAI ON PE	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	7.8702	15.8266	23.9564	32.3486	41.0952	50.2020	60.0396	70.4447	81.6208
SHIN NO ATAI ON OF	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	333.9792	371.7505	413.5916	459.9629	511.3731	568.3857	631.6256	701.7857	779.6346
SHIN NO ATAI ON HU	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	333.9792	371.7505	413.5916	459.9629	511.3731	568.3857	631.6256	701.7857	779.6346
SHIN NO ATAI ON GT	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	11.3128	22.5014	33.4430	44.0175	54.1088	63.6062	72.4053	80.4094	87.5304
SHIN NO ATAI ON HE	11.3081	22.4923	33.4301	44.0016	54.0911	63.5879	72.3880	80.3950	87.5212
KEISAN KEKKA	36.2071	72.0171	107.0370	140.8825	173.1823	203.5815	231.7461	257.3657	280.1558
SHIN NO ATAI ON VH	36.1924	71.9883	106.9955	140.8305	173.1224	203.5176	231.6830	257.3101	280.1180
KEISAN KEKKA	87.5304	80.4094	72.4053	63.6062	54.1088	44.0175	33.4430	22.5014	11.3128
SHIN NO ATAI ON FR	87.5212	80.3950	72.3880	63.5879	54.0911	44.0016	33.4301	22.4923	11.3081
KEISAN KEKKA	280.1558	257.3657	231.7461	203.5815	173.1823	140.8825	107.0370	72.0171	36.2071
SHIN NO ATAI ON GS	280.1180	257.3101	231.6830	203.5176	173.1224	140.8305	106.9955	71.9884	36.1924
KEISAN KEKKA	7.8702	15.8266	23.9564	32.3486	41.0952	50.2020	60.0396	70.4447	81.6208
SHIN NO ATAI ON UF	7.8672	15.8207	23.9478	32.3379	41.0828	50.2787	60.0265	70.4332	81.6129
KEISAN KEKKA	333.9792	371.7505	413.5916	459.9629	511.3731	568.3857	631.6256	701.7857	779.6346
SHIN NO ATAI ON HU	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	333.9792	371.7505	413.5916	459.9629	511.3731	568.3857	631.6256	701.7857	779.6346
SHIN NO ATAI ON GT	333.9296	371.6677	413.4854	459.8415	511.2450	568.2600	631.5124	701.6964	779.5825
KEISAN KEKKA	11.3128	22.5014	33.4430	44.0175	54.1088	63.6062	72.4053	80.4094	87.5304
SHIN NO ATAI ON WE	11.3081	22.4923	33.4301	44.0016	54.0911	63.5879	72.3880	80.3950	87.5212
KEISAN KEKKA	36.2071	72.0171	107.0370	140.8825	173.1823	203.5815	231.7461	257.3657	280.1558
SHIN NO ATAI ON VF	36.1924	71.9883	106.9955	140.8305	173.1224	203.5176	231.6830	257.3101	280.1180
KEISAN KEKKA	87.5304	80.4094	72.4053	63.6062	54.1088	44.0175	33.4430	22.5014	11.3128
SHIN NO ATAI ON FR	87.5212	80.3950	72.3880	63.5879	54.0911	44.0016	33.4301	22.4923	11.3081
KEISAN KEKKA	280.1558	257.3657	231.7461	203.5815	173.1823	140.8825	107.0370	72.0171	36.2071
SHIN NO ATAI ON GS	280.1180	257.3101	231.6830	203.5176	173.1224	140.8305	106.9955	71.9884	36.1924

25STEP

Table 3 (6)

- Peaceman, D.W. and Rachford, H.H.Jr., [1955]: The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations, J. Soc. Indust. Appl. Math., vol.3, pp.28-41.
- Petrovskii, I.G. [1950]: Lektsii ob uravneniakh c chastnymi proizvdnymi, GTTI, (Translated from Russian into Japanese by T. Watanabe Hembibun Hoteisiki, Tokyo Publ. 1958)
- Wilkinson, J.H. [1961]: Error analysis of direct methods of matrix inversion, J.A.C.M., vol. 8, pp.281-330.
- Young D. [1954]: Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic types, Trans, Amer. Math. Soc., vol. 76, pp.92-111.