

双曲型偏微分方程式の初期値問題  
をとく Scheme について

京大 工 山 口 昌 哉

1. 次のような一階の偏微分方程式系を考える,

$$(1) \quad u_t = \sum_{k=1}^n A_k u_{x_k}$$

ここで  $u$  は未知関数の  $N$  次元ベクトルで,  $A_k$  は実の定数行列である. 初期値問題とは  $t=0$  における値:

$$(2) \quad u(x,0) = \phi(x)$$

をあたえて (1) をみたす解  $u(x,t)$  を求めることであり, その場合に任意の滑らかな  $\phi$  に対して (1), (2) が唯一つの解をもつとき system

(1),(2) は Well posed であるという. Well posed であるための必要十分条件はよく知られた次の定理で述べられる.

定理 1.  $\xi_i, (i = 1, 2, \dots, n)$  を実数とするとき行列  $\sum_{i=1}^n A_i \xi_i$  が任意の  $\xi$  に対して real な固有値ばかりをもつことが, (1), (2) の Well posed であるための必要十分条件である.

特に  $A_i$  がすべて Symmetric な行列である場合は上の条件は trivial にみたされる. この場合を Symmetric hyperbolic とよぶ. 又それに準ずる場合として, ある定数の regular な行列  $N$  があつてすべての  $A_i$  が  $N$  による similarity transformation, つまり  $N^{-1} A_i N$  をつくることによつて symmetric になるような場合も同じく hyperbolic である. さらに non symmetric な場合で固有値が  $|\xi| \neq 0$  に対して相異なる場合, regularly hyperbolic とよぶ.

さて上の系の数値解法であるが, 現在までのほとんどすべての scheme

は symmetric hyperbolic についてのみ考察されて来た。唯一つの例外は P.D.Lax の 1958 年の論文 Differential equation, Difference Equation, Matrix theory C.P.A.M. Vol.XI であつて、ここでは Friedrichs の scheme が non symmetric の場合にも Von Neumann の条件をみたすことを示している。先ず Lax にならつて non symmetric (特に regularly hyperbolic) がどのくらい多量に存在するかを示しておこう。

例  $A_0, B_0$  を次の行列とする。

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_0\xi + B_0\eta$  は  $\xi^2 + \eta^2 = 1$  に対して固有値  $-1, 0, 1$  をもち、したがつて

$A_0\xi + B_0\eta$  は symmetric regular hyperbolic である。X を任意の実の行列として  $B_0 + \varepsilon X = B$  をつくり  $A_0\xi + B\eta$  を考えれば  $\varepsilon$  十分小のとき regular hyperbolic であることはかわらない。しかしこれは symmetric であつたり、又第 2 にのべた同時に symmetriciable であるのはごくまれであることが示せる。

次に実際的な理由をのべよう。

1965 年 S. Burnstein は次のような方程式系の流体モデルについて数値解法を行なつた。

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(w) \frac{\partial w}{\partial x} + B(w) \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$A(w) = - \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{3-\nu}{2}X^2 + \frac{1-\nu}{2}Y^2 & (\nu-3)X & (\nu-1)Y & (1-\nu) \\ XY & -Y & -X & 0 \\ \nu XZ + (1-\nu)X(X^2+Y^2) & -\nu Z + \frac{\nu-1}{2}(3X^2+Y^2) & (\nu-1)XY & -\nu X \end{bmatrix}$$

$$B(w) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ XY & -Y & -X & 0 \\ \frac{3-V}{2}Y^2 + \frac{1-V}{2}X^2 & (V-1)X & (V-3)Y & (1-V) \\ VYZ + (1-V)Y(X^2+Y^2) & (V-1)XY & -VZ + \frac{-1}{2}(3Y^2+X^2) & -VY \end{bmatrix}$$

ここで  $w$  は  $\rho, \rho_u, \rho_v, E$  を component とするたてのベクトルであつて、上の  $A(w)$  中の  $X, Y, Z$  はそれぞれ  $u, v, B$  及び  $\frac{E}{\rho}$  のことである。そして  $A(w)$  又は  $B(w)$  の固有値が 0 になる場所で不安定がいちぢるしく起ることを観察した。用いた差分法は Lax-Wendroff のものである。

Lax-Wendroff の scheme は今まで非線形双曲型の方程式に適用してよい安定性を示していたので S. Burnstein の結果は珍しくその数学的な検討がのぞまれている。その原因の究明については色々の角度からの研究があるだろうがここでは non symmetric な hyperbolic system について今までの scheme の安定性の条件が全く変更なく適用できるものであるかどうかをしらべよう。一方真の non linearity による原因究明についてはいくつかの実験結果をあわせて報告しよう。

## 2. Difference Scheme の一般論

初期値問題 (1) (2) の解は  $u(t) = E_t u(0)$  とかくことができる。ここで  $E_t$  はそのフーリエ変換が  $e^{i \sum A_i \xi_i t}$  であるような函数である。これを  $[t, t+h]$  の区間でかけば  $u(t+h) = E_h u(t)$  となるがここで次のような近似を考える。

$$(3) \quad u(t+h) = S_k u(t)$$

但し

$$(4) \quad S_k = \sum_j C_j T^j \quad \text{である}$$

ここで  $T^j$  は  $T_1^{j_1} T_2^{j_2} \dots T_n^{j_n}$  をあらわし,  $T_\nu$  は  $x_\nu$  方向への  $k$  だけの移動をあらわす作用素である. 又  $C_j$  は  $N \times N$  定数行列とする. 今 (2) の  $\phi(x)$  が exponential function であるとする.  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  として

$$\phi(x) = e^{ix \cdot \xi} v \quad v = \text{constant vector}$$

そのときの (3) を  $m$  回ほどこした解は,  $t=mh$  として

$$u(t) = u(mh) = e^{ix \cdot \xi} \left( \sum_j C_j e^{ik_j \xi} \right)^m v$$

である. そこで

$$(5) \quad C(\xi) = \sum_j C_j e^{ij \xi} \quad \xi \text{ に関する周期函数}$$

とかいて  $C(\xi)$  を Amplification Matrix とよぶ. これを用いて安定性, 正確度等を定義しておこう.

「安定性」とは (3) について, 任意の自然数  $m$  に対して  $k$  が存在して

$$(6) \quad |C(\xi)^m| \leq K \quad (m \text{ に無関係な定数})$$

が成立することであり, 「正確度」 accuracy が  $p$  であるとは,  $|\xi|$  十分小としたとき

$$(7) \quad |e^{i\lambda A \cdot \xi} - C(\xi)| \leq K_1 |\xi|^{p+1}$$

ここで  $A \cdot \xi = \sum_{i=1}^n A_i \xi_i$  であり,  $\lambda = \frac{h}{k}$  である. この2つの概念が  $u$  については  $L^2$ -空間を用いて導いた概念であることは前報告で述べた. (応用数理講究録 10)

又 (5) が成立するための必要条件は Von Neumann の条件:

$$(8) \quad |K_p(\xi)| \leq 1 \quad (p=1, 2, \dots, N) \quad |\xi_i| \leq \pi$$

であつて、ここで  $k_p(\xi)$   $p=1, \dots, N$  は  $C(\xi)$  の固有値である。

又 (8) を更に強くした：

$$(9) \quad |k_p(\xi)| \leq 1 - \delta |\xi|^{2r} \quad (p=1, 2, \dots, N) \quad |\xi_i| \leq \pi$$

がみたされるとき (3) の Scheme は dissipation が  $2r$  であるとい  
う。これらの言葉をもちいて一般的な安定性の定理がいくつかある。そのう  
ち最も進んだものは Parlett のものである。C.P.A.M. 1966.

定理 2. Symmetric hyperbolic に対しては正確度  $2p-2$ , dissipa-  
tion  $2p$  であればその Scheme は安定である。

定理 3. 一般の hyperbolic system に対しては正確度  $2p-1$ ,  
dissipation  $2p$  であればその scheme は安定である。

というのが Kreiss 1964 年 C.P.A.M. vol.17. の結果である。

但し、この hyperbolicity は regular hyperbolic よりは弱いが定理  
1. よりは強い双曲性を仮定している。( Strong hyperbolicity 応用数  
理講究録 10 §1 参照 )

さて次に system (1) が regularly hyperbolic ~~なる場合~~ ~~に~~

同種類の結果が得られないものであろうか？ それについては次の定理がある。

定理 4. (1) が regularly hyperbolic であるならば、正確度 (1)  
以上 (つまり consistency condition 1 ) で次の条件のいずれかが満足  
されればその scheme は安定である。

- i)  $C(\xi)$  は任意の order の dissipation をもつ。
- ii)  $C(\xi)$  の固有値は  $\xi \neq 0$  で相異なり Von Neumann の条件を

みたす。

この定理だけ証明しておこう。

1) 先ず,  $|\xi|=0$  の近傍で  $C(\xi)$  は一様に対角化可能である.

$C(0)=I$ ,  $|\xi|$  を十分小にすると次の展開がある.

$$\log C(\xi) = \frac{C(\xi)-I}{1} - \frac{(C(\xi)-I)^2}{2} + \dots$$

accuracy  $\geq 1$  であるので

$$\log C(\xi) = i\lambda A \xi + R(\xi) \quad |R(\xi)| \leq O(|\xi|^p), \quad p > 1$$

いま  $|\xi|=\rho$ ,  $|\xi'|=\xi'$  とおいて  $\rho \neq 0$  とすると,

$$\frac{\log C(\xi)}{\rho} = i\lambda A \xi' + R_1(\rho, \xi') \quad |R_1(\rho, \xi')| \leq O(|\xi'|^{p-1})$$

$A \cdot \xi'$  は regular hyperbolic であるから  $i\lambda A \cdot \xi'$  は  $\xi'=1$  の上で相異なる根をもち, 十分小な  $\rho$  に対しては  $\frac{\log C(\xi)}{\rho}$  も一様に相異なる根をもつ. したがって一様に対角化可能である. 十分小な  $\rho$  に対して,  $\rho \leq r$  として定数  $\alpha_1$  と正則行列  $T_1$  があり

$$\max(|T_1|, |T_1^{-1}|) < \alpha_1 \quad (\rho \leq r)$$

$$T_1 \frac{\log C}{\rho} T_1^{-1} = D \quad (\text{対角形})$$

$$\text{したがって } T_1 C(\xi) T_1^{-1} = e^{\rho D} = \begin{pmatrix} k_1 & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ & & & & k_N \end{pmatrix}$$

となる.

2) 次に  $\rho \geq r$  に対しては ii) の場合明らかに対角化可能であり, i) の場合を考えよう. ただし  $C(\xi)$  が周期函数であることを考慮すれば,

$|\xi'_i| \leq \pi$  で考えれば十分である. 適当なユニタリ行列  $V(\xi)$  によつ

て  $C(\xi)$  を上三角行列に変換する.

$$B = UCU^{-1} = K + B_1$$

$K$  は  $C(\xi)$  の (対角にならべた) 固有値の行列で,  $B_1$  は真の上三角行列である. 次のような対角行列  $D$  をとり  $DBD^{-1}$  をつくと  $DBD^{-1} = K + B_2$  として

$$D = \begin{bmatrix} d & & & \\ & d^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d^n \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b_{12}}{d} & \frac{b_{1n}}{d^{n-1}} & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{b_{n-1,n}}{d} & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 条件 i) によつて  $K^*K \leq (1-\delta)I$   $\delta$ : constant

$$(K + B_2)^*(K + B_2) = K^*K + K^*B_2 + KB_2^* + B_2^*B_2$$

によつて,  $d$  を十分大にとれば  $(K + B_2)^*(K + B_2) \leq I$

が示せる. よつて  $T_2 = DU$  とおけば,  $\alpha_2$  定数として

$$\max(|T_2|, |T_2|^{-1}) \leq \alpha_2$$

$$|T_2 C T_2^{-1}| \leq 1 \quad \text{が証明される}$$

条件 ii) の場合は明らかである.

以上の一般論にもとづいて具体的な scheme の安定性を主として regularly hyperbolic の場合にしらべて見よう.

### 3. 具体的な scheme

#### α) Friedrichs の Positive Scheme

単独方程式については前の報告で紹介した. ここ以後は次元  $n=2$  と仮定しよう. (1) は  $U_t = AU_x + BU_y$  とかく.

Friedrichs の scheme は (1) において  $u_t$  を  $\frac{u(t+h) - u(t)}{h}$  で  $u_x$  を  $u(x+k, t) - u(x-k, t) / 2k$  で置きかえたものであつて,  $\tilde{u}(t)$  は  $u(x+k, y, t), u(x-k, y, t), u(x, y+k, t), u(x, y-k, t)$  の平均である.

$u(t+h) = S_k u(t)$  としたときの  $S_k$  をかくと

$$S_k = \frac{1}{4}(I+2\lambda A)T_{+1}^x + \frac{1}{4}(I-2\lambda A)T_{-1}^x \\ + \frac{1}{4}(I+2\lambda B)T_{+1}^y + \frac{1}{4}(I-2\lambda B)T_{-1}^y$$

$\lambda = \frac{h}{k}$  であつた

Amplification Matrix  $C(\xi, \eta)$  は

$$C(\xi, \eta) = C_1 e^{i\xi} + C_2 e^{-i\xi} + C_3 e^{-i\eta} + C_4 e^{-i\eta}$$

$$C_{1,2} = \frac{1}{4}(I \pm 2\lambda A), \quad C_{3,4} = \frac{1}{4}(I \pm 2\lambda B)$$

この Scheme については  $\sum_{i=1}^4 C_i = I$  が成立してしたがつて accuracy 1 以上 (consistency condition) であつて, 今もし  $I \pm 2\lambda A \geq 0$  及び  $I \pm 2\lambda B \geq 0$  が仮定されるならば  $C_i \geq 0$  である. ここからこの scheme が positive といわれるわけである. その場合に安定性を示そう.

$$(*) \quad C(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 C_i z_i \quad \text{とかく} \quad |z_i| = 1 \quad (i=1, 2, 3, 4) \text{ である}$$

今  $z_i = x_i + iy_i$  とかくとき  $C(\xi, \eta) - I = \sum C_i (x_i - 1) + i \sum C_i y_i$  とかかれる. そこで P.D.Lax の次の定理を用いる.

定理 (Lax)  $X\xi + Y\eta$  が (1) の意味で hyperbolic で  $X \leq 0$  ならば,  $X+iY$  の固有値の実部は正でない.



$$\text{この定理を } -X = \sum c_i(1-x_i) \geq 0, \quad Y = \sum c_i y_i$$

に用いたならば  $C(\xi, \eta) - I$  の固有値の実部が正でないことがわかる。定理の仮定は  $C_i$  が  $A, B$  の実係数の一次結合であることから明らかにみたされる。ところで式 (\*) に  $e^{i\psi}$   $|\psi| \leq \pi$  をかけたものについても同様の議論ができるので結局  $C(\xi, \eta)$  の固有値の絶対値は 1 をこえぬ Von Neumann の条件,

一方  $C(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\cos \xi + \cos \eta) + i\lambda(A \sin \xi + B \sin \eta)$  とかけるので一様に対称化可能であることもよい。定理 4. ii) により安定である。まとめると「Friedrichs の scheme は  $I + 2\lambda A > 0, I + 2\lambda B > 0$  のとき安定である。」

β) Lax Wendroff の scheme について

先ず

$n=1$  の場合 (1) は  $u_t = Au_x$  となる。  $u_{tt} = A^2 u_{xx}$  が微分により出る。

Taylor expansion

$$u(t+h) = u(t) + hu_t + \frac{h^2}{2!} u_{tt} + O(h^3)$$

上式を代入して

$$u(t+h) = u(t) + hAu_x + \frac{h^2}{2!} A^2 u_{xx} + \dots$$

2 次までで打ち切り,  $u_x$  を  $\frac{(T+1-T-1)}{2k} u$ ,  $u_{xx}$  を  $\frac{\left(\frac{T}{+2} - \frac{T}{-2}\right)^2}{k^2} u$  でおきかえて次の scheme を得る。  $u(t+h) = S_k u(t)$  として

$$(10) \quad S_k = I + \lambda A \frac{T+1-T-1}{2} + \lambda^2 A^2 \frac{T+1+T-1-2T}{2}$$

$$C(\xi) = I + i\lambda A \sin \xi - \lambda^2 A^2 (I - \cos \xi)$$

accuracy 2 で一様に対角化可能である。定理 3. によつて Von Neumann

の条件のみ確めればよい。Aの固有値を  $\mu$ ,  $C(\xi, \eta)$  のそれを  $k$  とすると,  
spectral mapping theorem により

$$k = 1 + i\lambda\mu \sin \xi - \lambda^2 \mu^2 (1 - \cos \xi)$$

$$|k|^2 = 1 - (1 - \cos \xi)^2 \{(\mu\lambda)^2 - (\mu\lambda)^4\}$$

したがって、「 $I \pm \lambda A \geq 0$  が満足されるとき  $n=1$  の Lax Wendroff  
scheme は安定である」

注意  $|k|^2$  の式のなかで  $\mu=0$  がおこれば  $|k|=1$  となり dissipation=0  
であり, Aの固有値が 0でなければ dissipation 4 で丁度 Parlett の  
定理が symmetric ならば適用できる.

次に  $n=2$  の場合の Lax Wendroff の scheme について検討する. そ  
の前に regularly hyperbolicity について  $n=2$  のとき,  $N=2$  と  $N>2$   
とでは本質的に差のあることを次の注意 1. で明らかにしよう.

注意 1.  $N=2$  の regular hyperbolic system (1) については  $A_i$  は  
常に同時に対称化可能である.

証明 i)  $A\xi + B\eta$  において Aを対角行列と考えてよい. 何故なら Aを  
対角化する行列 N で A, B を変換して  $A' = N^{-1}AN$ ,  $B' = N^{-1}BN^{-1}$  として  
 $A'$ ,  $B'$  について論じて仮定も結論も同じである.

ii)  $MX = \text{対称 } M \text{ symmetric positive} \iff N^{-1} \times N = \text{対称 } |N| \neq 0$   
であることに注意すると  $MA, MB$  が対称なような positive symmetric M  
を求めればよい. しかも Mは対角行列でよい.

$$\therefore M \begin{bmatrix} d_1 & \\ & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1^{m_{11}} & d_2^{m_{12}} \\ d_1^{m_{12}} & d_2^{m_{22}} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} m_{12}(d_1 - d_2) = 0 \\ m_{12} = 0 \end{matrix}$$

$$\text{iii) } A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{とすれば}$$

regular hyperbolicity より  $bc > 0$ , したがって  $M = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

注意 2.  $A^2\xi + B^2\eta$  が再び  $\xi, \eta$  (実) に対して hyperbolic であれば  $\xi \geq 0, x \geq 0, \xi^2 + x^2 \neq 0$  に対して  $A^2\xi + B^2x \geq 0$ . ( $A, B$  のどちらも 0 の固有値をもつことがなければ  $\xi > 0, x > 0$  について  $A^2\xi + B^2x > 0$  これは Lax の convexity theorem である

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(A^2\xi + B^2x) &= (\xi+x)\lambda_{\min}\left(\frac{\xi}{\xi+x}A^2 + \frac{x}{\xi+x}B^2\right) \\ &\geq \lambda_{\min}(A^2)\xi + \lambda_{\min}(B^2)x > 0 \end{aligned}$$

さて  $n=2$  の Lax Wendroff の scheme を紹介しよう. (10) の式と同じ導き方で,

$$u(t+h) = S_k u(t)$$

$$(11) \quad S_k = I + \lambda \left( A \frac{T_{+1}^x - T_{-1}^x}{2} + B \frac{T_{+1}^y - T_{-1}^y}{2} \right) + \frac{\lambda^2}{2} \left\{ A^2 \left( T_{+\frac{1}{2}}^x - T_{-\frac{1}{2}}^x \right)^2 + (BA+AB) \left( T_{+1}^x - T_{-1}^x \right) \left( T_{+1}^y - T_{-1}^y \right) + B^2 \left( T_{+\frac{1}{2}}^y - T_{-\frac{1}{2}}^y \right)^2 \right\}$$

Amplification matrix  $C(\xi, \eta)$  は

$$(12) \quad C(\xi, \eta) = I + i\lambda(A\sin\xi + B\sin\eta) - \lambda^2 \left\{ A^2(1 - \cos\xi) + \frac{1}{2}(BA+AB)\sin\xi\sin\eta + B^2(1 - \cos\eta) \right\}$$

$$(13) \quad C(\xi, \eta) = I + i\lambda(A\sin\xi + B\sin\eta) - \frac{\lambda^2}{2}(A\sin\xi + B\sin\eta)^2 - 2\lambda^2 \left( A^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} + B^2 \sin^2 \frac{\eta}{2} \right)$$

この安定性については P.D. Lax の次の結果がある.

「  $A, B$  symmetric のとき,

$$(14) \quad I \pm 2\sqrt{2}\lambda A \geq 0, \quad I \pm 2\sqrt{2}\lambda B \geq 0$$

ならば安定である。」

したがって  $A, B$  が同時に対称化可能である場合、対称化したもの (similarity で) を  $A, B$  として用いれば上の結果で十分である。したがって  $n=2, N=2$  ならば問題はない。

しからば  $N > 2$  で  $A, B$  が同時に対称化不可能な場合はどうであろうか。答は一般的には否定的である。それは一言にして言えば注意 2. を考えると  $A^2\zeta + B^2\eta$  がもはや hyperbolic とは言えないからである。

例  $A, B$  を次のものとしよう。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon > 0 \text{ 小さい}$$

$A^2\zeta + B^2\eta$  については次のことが示しうる

- i)  $A^2\zeta + B^2\eta$  regularly hyperbolic
- ii)  $A, B$  は同時に対称化不可能
- iii)  $\zeta > 0, x > 0, A^2\zeta + B^2x$  は負の二根をもつ。
- iii) を示そう。

$$A^2\zeta + B^2x = \begin{bmatrix} \zeta + (1-\varepsilon^2)x & 0 & 0 \\ 0 & \zeta + x & \varepsilon x \\ 0 & -\varepsilon x & -\varepsilon^2 x \end{bmatrix}, \quad |A^2\zeta + B^2x| = (\zeta + (1-\varepsilon^2)x)(-\varepsilon^2\zeta x)$$

実は  $A^2\zeta + B^2x$  は  $\zeta > 0, x > 0$  に対しては実根ばかりをもち、 $\zeta > 0, x < 0$  で虚根をもつ。

今  $C(\pi, \pi)$  を考えると (13) より  $C(\pi, \pi) = I - 2\lambda^2(A^2 + B^2)$  したがってどんなに入が小さくても  $C(\pi, \pi)$  の固有根の一つは 1 より大きくなり Von Neumann の条件が破れる。

この不安定性は Lax-Richtmeyer の意味のみでなく Forsyth-Wasow

の意味でも不安定といえるものであつて、 $\|S_k^n\|$  は  $\exp(\frac{1}{k})$  で大きくなる。(n =  $\frac{1}{k}$ )

この例では A にも B にも固有値 = 0 がおこつたが A 又は B のみに固有値 = 0 が起る例も考えられる。

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & m & 1 \\ k & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} m+k \neq 0 \\ m \neq k \\ p \text{ 十分大} \\ 4(mk-2)^3 - 27(m+k)^2 \geq 0 \end{array}$$

注意 この例が  $N=3$  であり、A, B が共に 0 を固有根にもつてゐることは注目すべきことである。A+B が 0 の固有根をもたずしかも上のようになる例は不明である。

scheme を変更して次のようにすれば安定性が言える。(野木達夫 京大・工 修士論文 1965)

$$1) \quad C(\xi, \eta) = I + i\lambda(A\sin\xi + B\sin\eta) - \lambda^2(A\sin\xi + B\sin\eta)^2$$

$$2) \quad C(\xi, \eta) = I + i\lambda(A\sin\xi + B\sin\eta) - \frac{1}{4}\lambda^2(A\sin\xi + B\sin\eta)^3$$

1) は accuracy 1, 2) は accuracy 2 であつてそれぞれ

$$\lambda^2(A\sin\xi + B\sin\eta)^2 \leq I$$

$$\lambda^2(A\sin\xi + B\sin\eta)^2 \leq 4I$$

のとき安定性がいえる。

最後に  $n=2, N>2$  の場合にも通用する十分条件を説いておこう。つまり

$$(15) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y}$$

の初期値問題について、次のような Amplification Matrix をもつ Lax-Wendroff scheme が mesh ratio  $\lambda$  を十分小にしたとき安定であるた

めの十分条件である。

$$(16) \quad C(\xi, \eta) = I + i\lambda(A\sin\xi + B\sin\eta) - \frac{\lambda^2}{2}(A\sin\xi + B\sin\eta)^2 \\ - 2\lambda^2(A^2\sin^2\frac{\xi}{2} + B^2\sin^2\frac{\eta}{2})$$

ここで  $A\sin\xi + B\sin\eta = A_0(\xi, \eta)$

$$A^2\sin^2\frac{\xi}{2} + B^2\sin^2\frac{\eta}{2} = A_1(\xi, \eta) \quad \text{とおき} \quad |\xi| \leq \pi, \quad |\eta| \leq \pi \text{ で}$$

考える。この記号を用いて十分条件は次のように述べられる。

- 1) A 又は B が zero の固有値をもたぬ。
- 2)  $A^2\xi + B^2\eta$  がすべての real  $\xi, \eta$  に対して real の固有値ばかりをもつ。(つまり hyperbolic )
- 3)  $\varphi_0, \psi_0$  をそれぞれ  $A_0(\xi, \eta)$  及び  $A_0^*(\xi, \eta)$  の同じ固有値に対応する固有ベクトルで  $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle > 0$  をみたすものとするとき
 
$$\langle A_1(\xi, \eta)\varphi_0, \psi_0 \rangle \geq c \langle \varphi_0, \psi_0 \rangle \quad c > 0$$

が満足される。

証明

i) 注意 2. によつて仮定 1) 2) から,  $|\xi| = \pi, |\eta| = \pi$  の十分近傍では  $A^2\sin^2\frac{\xi}{2} + B^2\sin^2\frac{\eta}{2} \geq c > 0$  したがつてこのような領域  $\pi - \varepsilon \leq |\xi| \leq \pi, \pi - \varepsilon \leq |\eta| \leq \pi$  では  $C(\xi, \eta)$  の根  $|k_1(\xi, \eta)| \leq 1 - \frac{c}{2}$  となり positive dissipation が示される。

ii) 次に上のような点  $|\xi| = \pi, |\eta| = \pi$  の近傍をのぞいた領域でも positive dissipation が保証されることを示そう。そのための条件が 3) である。

$\lambda$  に関する perturbation の方法を用いる.

$$\rho = \sqrt{\sin^2 \xi + \sin^2 \eta} \text{ として } \frac{\sin \xi}{\rho} = \xi', \quad \frac{\sin \eta}{\rho} = \eta', \quad \xi'^2 + \eta'^2 = 1$$

$$\frac{A_1(\xi, \eta)}{\rho} = A_1'(\xi, \eta) \text{ とおく. そして次のような matrix を考える.}$$

$$C_1(\xi, \eta) = iA_0(\xi', \eta') + (-1)\lambda \left\{ \frac{\rho}{2} A_0(\xi', \eta')^2 + 2A_1'(\xi, \eta) \right\}$$

このような  $(\xi', \eta')$  に対して  $A_0(\xi', \eta')$  の固有値が distinct real で 2 根の差は下からおさえられていることは regular hyperbolicity による.  $\lambda$  を十分小にすれば  $C_1(\xi, \eta)$  の固有根は  $\lambda$  の Taylor 級数で表わされ収束する. それを実行すると,  $C_1(\xi, \eta)$  の固有値を  $\nu(\xi, \eta)$  として, 固有ベクトルを  $\phi(\xi, \eta)$  として

$$\nu(\xi, \eta) = \nu_0 + \lambda \nu_1 + \lambda^2 \nu_2 + \dots$$

$$\phi(\xi, \eta) = \phi_0 + \lambda \phi_1 + \lambda^2 \phi_2 + \dots$$

$C_1(\xi, \eta)\phi = \nu\phi$  に代入して

$$\left[ iA_0(\xi', \eta') - \lambda \left\{ \frac{\rho}{2} A_0(\xi', \eta')^2 + 2A_1'(\xi, \eta) \right\} \right] (\phi_0 + \lambda \phi_1 + \dots)$$

$$= (\nu_0 + \lambda \nu_1 + \dots) (\phi_0 + \lambda \phi_1 + \dots)$$

$\lambda^0$  の項を比較して  $iA_0(\xi', \eta')\phi_0 = \nu_0\phi_0$

したがって  $A_0(\xi', \eta')$  の 1 つの固有値を  $\mu_0$  とすると  $\nu_0 = i\mu_0$ ,  $\phi_0$  は  $A_0(\xi', \eta')$  の対応する固有ベクトル, それを  $\varphi_0$  とすれば  $\phi_0 = \varphi_0$ ,  $\lambda^1$  の項を比較して,

$$iA_0(\xi', \eta')\phi_1 - \left\{ \frac{\rho}{2} A_0(\xi', \eta')^2 + 2A_1'(\xi, \eta) \right\} \varphi_0$$

$$= i\mu_0 \phi_1 + \nu_1 \varphi_0$$

$$i[A_0(\xi', \eta') - \mu_0 E]\phi_1 = (\nu_1 E + \frac{\rho}{2} A_0(\xi', \eta')^2 + 2A_1'(\xi, \eta)) \varphi_0$$

が non trivial solution をもつための必要十分条件は,  $\psi_0$  を  $A_0^*(\xi, \eta)$  の固有ベクトルとしたとき (但し  $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle > 0$  ととる)

$$\langle (\nu_1 E + \frac{P}{2} A_0(\xi, \eta)^2 + 2A_1(\xi, \eta)) \psi_0, \psi_0 \rangle = 0$$

である.

$$\begin{aligned} \nu_1 &= - \frac{\langle (\frac{P}{2} A_0(\xi, \eta)^2 + 2A_1(\xi, \eta)) \psi_0, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle} \\ &= - \frac{P}{2} \mu_0^2 - \frac{2 \langle A_1(\xi, \eta) \psi_0, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle} \end{aligned}$$

$$\frac{\langle A_1(\xi, \eta) \psi_0, \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle} = k \quad \text{とおけば条件 3) により } k \geq \frac{c}{P} > 0 \text{ である.}$$

したがって  $\nu$  の展開は,

$$\nu = i\mu_0 + \lambda(-\frac{P}{2}\mu_0^2 - k) + \lambda^2\nu_2 + \dots$$

$C(\xi, \eta)$  の固有値  $k(\xi, \eta)$  の展開は  $\mu_0(\xi, \eta)$  の  $\xi, \eta$  に関する homogeneity により

$$k(\xi, \eta) = 1 + i\lambda\mu_0(\xi, \eta) - \lambda^2(\frac{\mu_0^2}{2} + k\rho) + \lambda^3\nu_2\rho + \dots$$

したがって,

$$\begin{aligned} |k(\xi, \eta)|^2 &= \left\{ 1 - \lambda^2(\frac{\mu_0^2}{2} + k\rho) + \lambda^3 \operatorname{Re}(\nu_2\rho) + \dots \right\}^2 \\ &\quad + \left\{ \lambda\mu_0 + \lambda^3 \operatorname{Im}(\nu_0\rho) + \dots \right\}^2 \\ &= 1 - 2\lambda^2 k\rho + \lambda^3 * + \dots \end{aligned}$$

したがって  $\lambda$  十分小のときたしかに positive dissipation がある. これ定理 4. の仮定 i) がすべてみたされたことになり, scheme は安定である. 例えば trivially に A, B を同時に対称化可能のとき 3) はみた



される。更に  $A = A_0, B = B_0 + \varepsilon X$  ( $\varepsilon |X| \leq |\lambda_{\min}(A)|$  or  $|\lambda_{\min}(B)|$ ) のとき ( $A_0, B_0$  は symmetric) の時にもみたされる。更に一つの定数行列  $N$  によつてこのように変換できるときにも上の仮定 3) はみたされる。