数理解析研究所講究録
第 20 巻 1967 年 1-33

リーマン多様体上の flow と transversal field

九大 理　押川元重

〔1〕 Ya. G. Sinai ; 可算ルベーグスペクトルをもつ力学系 I. Izv. Akad. Nauk, 25(1961), 899 — 924.

〔2〕 Ya. G. Sinai ; 可算ルベーグスペクトルをもつ古典力学系 II. Izv. Akad. Nauk, 30(1966), 15 — 68.

Ya. G. Ŝinai は論文〔1〕において, Kolmogorov - system の一般的性質—エルゴード性, 混合性, 可算ルベーグスペクトル等—を示したのに続き, 論文〔2〕において古典力学系が K-system になるための条件を与える方法として transversal field の概念とその性質を研究した。

§1. リーマン多様体上の automorphism

n 次元, 連結, 向きづけ可能な C^∞ 級リーマン多様体 M は区分的に滑らかな $(n-1)$ 次元部分多様体をなす境界 ∂M をもつ.

リーマン計量を $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i dx_j$, リーマン計量から定まる体積要素を $d\sigma(x) = \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, dx_1 \cdots dx_n$ とする。

M上の測度μは微分形式により与えられる.

$d\mu(x) = a(x_1, x_2, \cdots, x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, $a(\cdot)$は非負C^4級函数

Mのボレル部分集合の全体の作るσ代数を$\mathfrak{F}$とあらわす.

MからMの上への1対1, C^4級写像をTとする.

Tがμー不変

$$\mu(A) = \mu(TA) = \mu(T^{-1}A) \ , \quad A \in \mathfrak{F}$$

のとき, TをM上の*automorphism*という.

注. $(M, \mathfrak{F}, \mu)$はルベーグ空間になる.

§2. リーマン多様体上の*flow*

Mを含むn次元,連結,向きづけ可能なC^∞級リーマン多様体をM_0とする. M_0上に滑らかなベクトル場$\tilde{\omega}(x)$が与えられているとする. $\tilde{\omega}(x)$のMへの制限を$\omega(x)$とかく.

$$\partial M_1 = \{ x \in \partial M \ ; \ x\text{における}\partial M\text{の外法線ベクトルへの}\ \omega(x)\text{の射影が非負} \}$$

$$\partial M_2 = \{ x \in \partial M \ ; \ x\text{における}\partial M\text{の外法線ベクトルへの}\ \omega(x)\text{の射影が非正} \}$$

とすると, $\partial M = \partial M_1 \cup \partial M_2$ となる. ただし$\partial M_1 \cap \partial M_2$は$\partial M$の滑らかな成分上では$\partial M$を$\partial M_1$と$\partial M_2$に分ける$(n-2)$次元の部分多様体と仮定する.

∂M_1から∂M_2への滑らかな1対1変換で$\partial M_1 \cap \partial M_2$上では恒等変換になるようなものをSとする.

Mの内部では微分方程式系 $\dfrac{dx}{dt}=\omega(x)$ により軌道が定まり，∂M_1 に達すれば S により ∂M_2 に変換されることにより構成されるM上の変換の1径数群を $\{S_t\}$ とする.

$\{S_t\}$ が μ－不変のとき，$\{S_t\}$ をM上の *flow* という.

注. S をMを閉多様体にかえる縁の同一視とみなせば，$\{S_t\}$ はその上の区分的に滑めらかな変換となる.

§3. 可測ファイバー構造

<u>定義</u> Mの可測部分集合Uに対して，次のようなUの可測分割 $\xi=\{C_\xi\}$ が与えられているとき，ξ をUにおける<u>k次元局所ファイバー構造</u>という.

1) ξ の成分 C_ξ はMにおける区分的に滑らかな k 次元局所的閉部分多様体であり，$C_\xi \neq C'_\xi$ ならば，$\overline{C_\xi}\cap\overline{C'_\xi}=\phi$.

Mのリーマン計量から導かれる C_ξ 上のリーマン計量を $d\rho_{C_\xi}(x)$，とし，$d\rho_{C_\xi}(x)$ に対応する C_ξ 上の体積要素を $d\sigma_{C_\xi}(x)$ とする.

2) $\mu(A\cap B)=\int_B \mu(A\,|\,C_\xi(x))\,d\mu(x)$,　$A\in\mathfrak{F}_U$, $B\in\mathfrak{F}(\xi)$

とするとき，

$$\mu(A\,|\,C_\xi(x))=\int_{A\cap C_\xi(x)} P_\xi(y)\,d\sigma_{C_\xi(x)}(y)$$

但し $P_\xi(y)$ は U上の ~~非負~~ 正 (a.e.) 可測函数.

3) $x\in U$ から $C_\xi(x)$ の境界までの距離を与える函数 $f_\xi(x)$ が可測.

C_ξを局所ファイバーという.

定義(local base)

ルベーグ空間$(M, \mathcal{F}, \mu)$の部分集合の系$\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}$がlocal baseであるとは

1) $\mathfrak{U}$はルベーグ空間Mのbaseである.

2) $^\forall A \in \mathcal{F}$; $0 < \mu(A) < 1$

$$\Longrightarrow \ ^\exists U_\alpha \ ; \ \mu(U_\alpha \cap A)\mu(U_\alpha \cap (M-A)) \neq 0$$

lemma 1. $\mathfrak{U}=\{U_\alpha\}$を$M$のlocal baseとする。

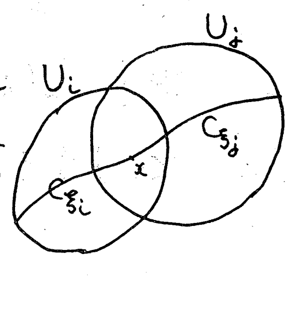
$\mathcal{F}$の任意の部分σ-代数$\mathcal{F}'$が全てのU_αについて, $\mathcal{F}'_{U_\alpha}=\mathcal{M}_{U_\alpha}$ならば, $\mathcal{F}'=\mathcal{M}$ (trivial)である。

定義 リーマン多様体Mに次のような可算local base $\mathfrak{U}=\{U_i\}$が与えられたとき, k次元可測ファイバー構造Zが与えられたという。

1) 各U_iはk次元局所ファイバー構造ξ_iをもつ.

2) $U_i \cap U_j \neq \phi$ のとき,

a.e. $x \in U_i \cap U_j$に対して, $C_{\xi_i}(x) \cap U_j = C_{\xi_j}(x) \cap U_i$であり, ともに$k$次元区分的に滑らかな局所的閉部分多様体である。



<u>lemma 2.</u> $\mathfrak{U}=\{U_i\}$ を可測ファイバー構造を与える可算local baseとする。

$$W_i \subset U_i\ ,\ W_i \in \mathfrak{F}(\xi_i)\ ,\quad \mu(W_i)=0$$

$$\Longrightarrow\ {}^{\exists}W \supset \bigcup_i W_i\ ,\quad W \cap U_i \in \mathfrak{F}(\xi_i)\ ,\quad \mu(W)=0$$

Mの元xとyが同値とは，有限ヶの局所ファイバー

$C_{\xi_{\alpha_1}} \subset U_{\alpha_1}\ ,\ C_{\xi_{\alpha_2}} \subset U_{\alpha_2}\ ,\ \cdots\ ,\ C_{\xi_{\alpha_m}} \subset U_{\alpha_m}$ が存在して，

$\overline{C_{\xi_{\alpha_1}}} \ni x\ ,\quad \overline{C_{\xi_{\alpha_m}}} \ni y\ ,\quad \overline{C_{\xi_{\alpha_i}}} \cap \overline{C_{\xi_{\alpha_{i+1}}}} \neq \phi\quad (i=1,2,\cdots,m-1)$

となること，と定義する．

この同値関係による同値類をΓとあらわせば，ΓはMの可測集合であり，その全体$Z=\{\Gamma\}$はMの分割(mod 0)を与える。但し可測分割になるとは限らない．Γのことを<u>ファイバー</u>とよび，分割Zの可測被をU_Zで表わす．ファイバーをこのように定義するにはlemma 2. を用いるが，次のlemma 3もlemma 2より直ちにわかる．

<u>lemma 3.</u> M上の$\mathfrak{F}$－可測函数$h(x)$が，各U_i上で$\mathfrak{F}(\xi_i)$－可測であれば，$h(x)$は$\mathfrak{F}(U_Z)$－可測である．

§4. 2つの可測ファイバー構造の絶対連続性

$Z_1\ ,\ Z_2$をn次元リーマン多様体Mのそれぞれk_1次元，k_2次元の可測ファイバー構造とし，構造を与えるlocal baseをそれぞ

れ $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ とする。

<u>定義</u>　Z_2 が Z_1 に関して絶対連続であるとは、

1)　a.e. $C_{\xi^1_\alpha} \subset U^1_\alpha \in \mathfrak{U}_1$ に対して

$\mu(U^2_\beta \mid C_{\xi^1_\alpha}) > 0$ なる $U^2_\beta \in \mathfrak{U}_2$ について

a)　$U^2_\beta(C_{\xi^1_\alpha}) = \bigcup_{x \in C_{\xi^1_\alpha} \cap U^2_\beta} C_{\xi^2_\beta}(x)$　とするとき, $\mu(U^2_\beta(C_{\xi^1_\alpha})) > 0$.

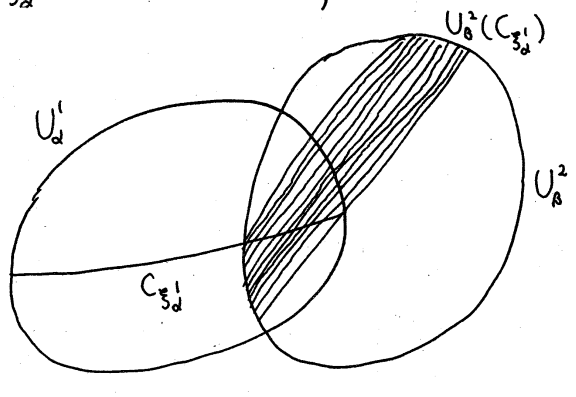
b)　$C_{\xi^1_\alpha} \cap U^2_\beta$ 上に与えられる次の２つの測度 μ_1, μ_2 が互に絶対連続である.

$$\mu_1(A) = \mu(A \mid C_{\xi^1_\alpha})$$

$$\mu_2(A) = \mu(\tilde{A}), \quad \tilde{A} \in \gamma(\xi^2_\beta)_{U^2_\beta(C_{\xi^1_\alpha})}, \tilde{A} \cap C_{\xi^1_\alpha} = A.$$

2)　任意の測度１の可測集合 K に対して

$\{U^2_\beta(C_{\xi^1_\alpha}(x)) \ ; \ x \in K\}$ が M の local base をなす。



注　1), a) が成立するためには, $k_1 + k_2 \geqq n$

<u>定理 1.</u>　Z_2 が Z_1 に関して絶対連続であれば,

$$\gamma(\mathfrak{U}_{Z_1}) \cap \gamma(\mathfrak{U}_{Z_2}) = \mathfrak{N}$$

証明　$\mathcal{V}(\mathfrak{U}_{Z_1})\cap\mathcal{V}(\mathfrak{U}_{Z_2})$ の base をなる可算集合系を $\{B_i\}$ とすれば，Z_1の完全なファイバーからなる集合の系 $\{B_i^{(1)}\}$ 及び Z_2の完全なるファイバーからなる集合の系 $\{B_i^{(2)}\}$ が存在して，

$$\mu(B_i \triangle B_i^{(1)}) = \mu(B_i \triangle B_i^{(2)}) = \mu(B_i^{(1)} \triangle B_i^{(2)}) = 0, \quad {}^{\forall}i$$

全ての $U_\alpha^1 \in \mathfrak{U}_1$について

$$\left\{ C_{\xi_\alpha^1} \in \xi_\alpha^1 \ ; \ \mu(B_i | C_{\xi_\alpha^1}) = \mu(B_i^{(1)} | C_{\xi_\alpha^1}) = \mu(B_i^{(2)} | C_{\xi_\alpha^1}) = 0 \text{ or } 1, {}^{\forall}i \right\}$$

は測度1の集合をなす．絶対連続性の定義 1), 2) より

$$\mu(B_i^{(2)} | C_{\xi_\alpha^1}) = \mu_1(B_i^{(2)}) = 1 \Rightarrow \mu_2(B_i^{(2)}) = 1 \Rightarrow \mu(U_\beta^2(C_{\xi_\alpha^1}) - B_i^{(2)}) = 0$$

従って，$\quad \mathcal{V}(\mathfrak{U}_{Z_1})\cap\mathcal{V}(\mathfrak{U}_{Z_2})\big|_{U_\beta^2(C_{\xi_\alpha^1})} = \mathcal{N}_{U_\beta^2(C_{\xi_\alpha^1})}$

絶対連続性の定義 2) と lemma 1 より，

$$\mathcal{V}(\mathfrak{U}_{Z_1})\cap\mathcal{V}(\mathfrak{U}_{Z_2}) = \mathcal{N} \qquad \lrcorner$$

§5. 一般の可測ファイバー構造と flow から定まる可測ファイバー構造の可積分性

M上の flow $\{S_t\}$ の軌道への空間Mの分割により与えられる可測ファイバー構造をZとし，Mの任意の可測ファイバー構造をZ_1とする。

<u>定義</u>　Z_1とZが互に可積分であるとは，次のような局所可測ファイバー構造をもつ local base $\widetilde{\mathfrak{U}} = \{\widetilde{U}_\alpha\}$ により与えられる可測ファイバー構造 $\widetilde{Z}_1$ が存在することである．

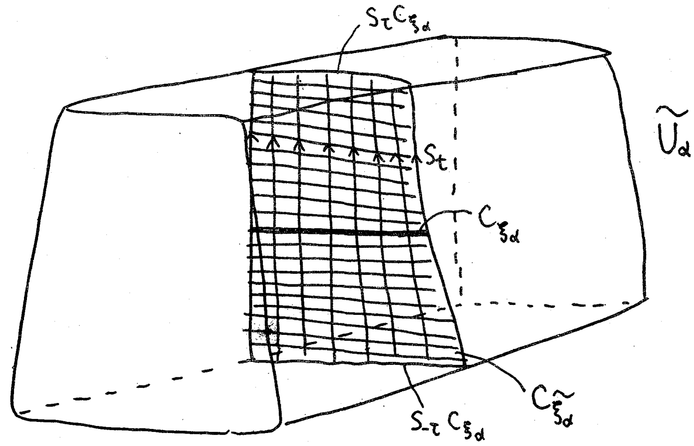
1)　各 $\widetilde{U}_\alpha$ 上の局所ファイバー構造 $\widetilde{\xi}_\alpha$ の局所ファイバーは

$$C_{\tilde{\xi}_\alpha} = \bigcup_{|t|<\tau} S_t C_{\xi_\alpha}$$ の形をしている.

但し, $\tau = \tau(C_{\tilde{\xi}_\alpha}(x))$ は可測函数であり,

C_{ξ_α} は Z_1 の局所ファイバーである.

2) 各 $\tilde{U}_\alpha$ 上の分割 $\{S_t C_{\xi_\alpha} ; |t|<\tau, C_{\xi_\alpha}\}$ は $\tilde{U}_\alpha$ 上の局所可測ファイバー構造 ξ_α をなし, 系 $\{\tilde{U}_\alpha, \xi_\alpha\}$ は可測ファイバー構造 Z_1 を与える.



$\tilde{Z}_1$ を Z_1 と Z の和とよび, $\tilde{Z}_1 = Z_1 \wedge Z$ と表わす.

注. $\dim \tilde{Z}_1 = \dim Z_1 + \dim Z = \dim Z_1 + 1$

§6. 2つの可測ファイバー構造の非可積分性

Z_1, Z_2 はともに flow $\{S_t\}$ から定まる可測ファイバー構造 Z と可積分な可測ファイバー構造とする.

$$\tilde{Z}_1 = Z_1 \wedge Z \quad , \quad \tilde{Z}_2 = Z_2 \wedge Z$$

$\dim Z_1 + \dim Z_2 + 1 \geqq n$ を仮定する.

$\tilde{\mathfrak{U}}_i$ を Z_i 及び和 $\tilde{Z}_i$ 構造を同時に与える local base とする.

Z_1 の局所ファイバー $C_{Z_1} \subset \tilde{U}^1_\alpha \in \tilde{\mathfrak{U}}_1$ について,

$\widetilde{U}^2_\beta \in \widetilde{\mathfrak{U}}_2$ を $\mu(\widetilde{U}^2_\beta | C_{z_1}) > 0$ なるものとする.

$$\Gamma_2(C_{z_1}) = \bigcup_{x \in C_{z_1} \cap \widetilde{U}^2_\beta} C_{z_2}(x)$$, $C_{z_2}(x)$ は x を通る $\widetilde{U}^2_\beta$ 上の Z_2 の局所ファイバー

とすれば, $\Gamma_2(C_{z_1})$ 上には Z_2 の局所ファイバーからなる分割 $\mathcal{X}_2$ が与えられる. 集合 $\Gamma_2(C_{z_1})$ には滑らかさが必ずしもないので可測な多様体と呼ぶことにする.

$$U_2(C_{z_1}) = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t \Gamma_2(C_{z_1})$$, ρ_0 は定数.

とすれば,可測集合 $U_2(C_{z_1})$ 上には, $\widetilde{Z}_2$ の局所ファイバー

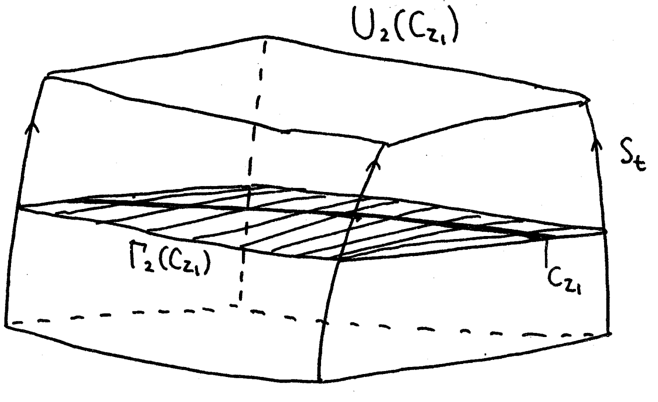
$$C_{\widetilde{Z}_2} = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t C_{Z_2}$$, C_{Z_2} は $C_{Z_1} \cap U^2_\beta$ と交わる Z_2 の局所ファイバー.

からなる可測分割 $\widetilde{\mathcal{X}}_2$ が与えられる.

$\mu(U_2(C_{z_1})) > 0$ であれば, $\Gamma_2(C_{z_1})$ 上には,

$$\sigma(A) = \mu(\widetilde{A}) \quad , \quad \widetilde{A} = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t A \ , \ A \in \mathcal{T}(\mathcal{X}_2), \widetilde{A} \in \mathcal{T}(\widetilde{\mathcal{X}}_2).$$

により測度 σ が与えられる.



同様に Z_2 の局所ファイバー C_{z_2} に対して, 可測集合 $U_1(C_{z_2})$ とその上での $\widetilde{Z}_1$ の局所ファイバー $C_{\widetilde{Z}_1} = \bigcup_{|t| < \rho_0} S_t C_{z_1}$ が与えられる.

<u>定義</u>　Z_1 と Z_2 が非可積分であるとは,

正測度の Z_1 の局所ファイバー C_{z_1} に対して，$\mu(U_2(C_{z_1}))>0$ であり，
$\Gamma_2(C_{z_1})$ の部分集合 $\Gamma'\in\gamma(\mathfrak{X}_2)$，$\sigma(\Gamma')>0$ が存在して，
任意の Z_2 の局所ファイバー C'_{z_2}，$C''_{z_2}\in\Gamma'$ に対して，

1) $\mu(U_1(C'_{z_2})\cap U_1(C''_{z_2}))>0$

2) $U_1(C'_{z_2})\cap U_1(C''_{z_2})\ni x$ について，2つの $\tilde{Z}_1$ の局所ファイバーを

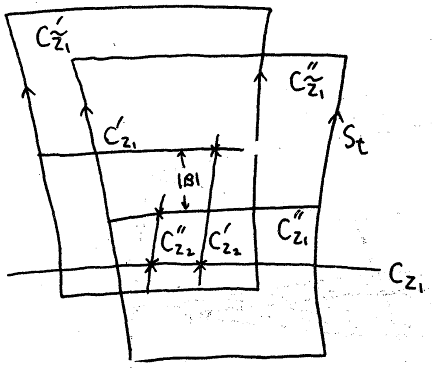
$C'_{\tilde{z}_1}(x)=\bigcup_{|t|<\rho_0} S_t C'_{z_1}$ ，C'_{z_1} は C'_{z_2} と交わる Z_1 の局所ファイバー．

$C''_{\tilde{z}_1}(x)=\bigcup_{|t|<\rho_0} S_t C''_{z_1}$ ，C''_{z_1} は C''_{z_2} と交わる Z_1 の局所ファイバー．

とするとき，次のような $\beta=\beta(x)$，$|\beta|<\rho_0$ が定まる．

$$C'_{\tilde{z}_1}(x)\cap C''_{\tilde{z}_1}(x)=\begin{cases}\bigcup_{-\rho_0<t<\rho_0-\beta} S_t(S_\beta C'_{z_1}\cap C''_{z_1}) & \text{if } \beta\geqq 0\\ \bigcup_{-\rho_0-\beta<t<\rho_0} S_t(S_\beta C'_{z_1}\cap C''_{z_1}) & \text{if } \beta<0\end{cases}$$

$\beta(x)$ は 0 と異なる (a.e.) 可測函数である．



§7. automorphism の transversal field

<u>定義</u> 可測ファイバー構造 $Z=\{\Gamma\}$ が automorphism T の trans-versal field であるとは，

$$Z \ni {}^\forall\Gamma \longrightarrow T^{-1}\Gamma \in Z$$

をみたすことである.

ファイバーΓ上の正則な点xを通りΓ上にある長さをもつ曲線をlとする。$l' = T^{-1}l$はファイバー$T^{-1}\Gamma$上の点$x' = T^{-1}x$を通る曲線を表わす. 点xから点yまでの曲線lの長さをs, 点$x' = T^{-1}x$から点$y' = T^{-1}y$までの曲線l'の長さをs'とする.

$$\lambda_l(x) = \lim_{s \to 0} \frac{s'}{s} \quad , \quad \lambda(x) = \inf_l \lambda_l(x)$$

とすれば, $\lambda(x)$は正則点xを通るファイバー上で局所的に滑らかである.

<u>定義</u> 任意の正則な点xと任意の方向lに対して, $\lambda_l(x) > 1$のとき, transversal field は拡大しているという.

任意の正則な点xと任意の方向lに対して, $\lambda_l(x) < 1$のとき, transversal field は縮少しているという.

ファイバーΓ上で, 点$x \in \Gamma$の近傍におけるリーマン計量から導かれる体積要素を$d\sigma_z(x)$で表わす. $d\sigma'_z(x) = d\sigma_z(T^{-1}x)$は$d\sigma_z(x)$に関して絶対連続で密度函数$\Delta(x)$をもつ. 即ち

$$d\sigma_z(T^{-1}x) = \Delta(x)\, d\sigma_z(x)$$

拡大している transversal field のときは, $\Delta(x) > 1$, $\lambda(x) > 1$.

縮少している transversal field のときは, $\Delta(x)<1$, $\lambda(x)<1$.

$\rho_Z(x_1, x_2)$ を Z のファイバー Γ 上の2点 x_1, x_2 間の Γ にそっての距離とする.

<u>lemma 4.</u> 拡大している transversal field $Z=\{\Gamma\}$ について, ほとんど全てのファイバー Γ に対して, Γ 上の任意の2点を x_1, x_2 とすれば,

$$\rho_Z(T^n x_1, T^n x_2) \longrightarrow 0 \qquad (n \to \infty)$$

証明 1° 可測集合 U は次の性質をみたすようなものとする。

1) ある点の球近傍 V に含まれ, V の中の Z の各局所ファイバーと U との交わりは区分的に滑らかな境界をもつ滑らかな開部分多様体をなす。 2) $\lambda(x) \geq \lambda_0 > 1$ for $\forall\, x \in U$.

U 上の2点 x_1, x_2 が Z の1つの局所ファイバー上にあれば,

$$\rho_Z(T^{-1}x_1, T^{-1}x_2) \geqq \lambda_0\, \rho_Z(x_1, x_2)$$

2° 再帰定理より可算無限可測集合列で次の性質をみたすもの $U_i' \subset U_i''$ $(i=1,2,\cdots)$ が存在する.

1) U_i', U_i'' はともに1°と同じ性質をもち, U_i' 中の Z の各局所ファイバーはそれを含む U_i'' の中の Z の局所ファイバーの境界から $a_i>0$ 以上はなれている. 2) ほとんど全ての x は U_i' の少くとも一つに無限回はいる.

完全なファイバーから成る測度1の可測集合M'で，M'に制限して考えると，全ての局所ファイバーで条件つけた2)の性質をみたす点xの集合の確率が1になる．ようなものが存在する．

3° M'の任意のファイバーΓに対して，Γ上の2点x_1, x_2が$\rho_Z(T^n x_1, T^n x_2) \longrightarrow 0 \ (n \to \infty)$ のとき同値$(x_1 \sim x_2)$であると定義すると，同値類は同値関係の定義よりΓで開集合になり，2°よりΓで閉集合になることもわかる．従ってΓの連結性より同値類はΓに一致する。 ┘

<u>lemma 5</u> エルゴード性をもつ *automorphism* Tについて，測度正の集合U上にTの拡大している *transversal field* Zの局所ファイバーへの分割ξが与えられているとする．

ほとんど全ての$x \in U$ に対して，

$T^{n_i} x \in U$ なる時刻列を$n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_k \le \cdots$ とすれば，

$$\Gamma(x) = \bigcup_k T^{-n_k} C_\xi (T^{n_k} x)$$ となる．

証明 Uの測度正の部分集合U'を次の様にとる。ξがU'上に導びく分割をξ'とする．各$C_{\xi'}$ は$C_{\xi'}$を含むC_ξの境界から（$C_{\xi'}$に関係する）$a > 0$ 以上にはなれている。

U'への *induced automorphism* のエルゴード性を考えるとほとんど全てのxに対して，正数a_0 と$\{n_k\}$の部分列$\{m_s\}$

が存在して，$C_{\xi'}(T^{m_s}x)$ に対して $a > a_0$ となる。

x は同時に $\Gamma(x)$ が lemma 4 の性質をみたすようなものとする。

$\Gamma(x)$ の点で，$\bigcup_k T^{-n_k} C_\xi(T^{n_k}x)$ に含まれない点 y が存在したと仮定する。$\rho_z(T^n y, T^n x) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ だから，充分大きな s では $\rho_z(T^{m_s}y, T^{m_s}x) \leq a_0$．従って，

$T^{m_s}y \in C_\xi(T^{m_s}x)$，$y \in T^{-m_s}C_\xi(T^{m_s}x)$ となり矛盾 」

§8. flow の transversal field

<u>定義</u> 可測ファイバー構造ζが flow $\{S_t\}$ の transversal field であるとは，

1) ζ の各ファイバー Γ に対して $S_t\Gamma$ も又ζのファイバーである。

2) flow $\{S_t\}$ から導かれる可測ファイバー構造とζは可積分である。

Automorphism の場合と同様に S_t に対して $\lambda_\ell(t,x)$，$\Delta(t,x)$ が定義される。$\{S_t\}$ の滑らかさにより正則点で次の極限も存在する。

$$\lambda_\ell(x) = \lim_{t\to 0} \frac{\lambda_\ell(t,x)-1}{t}, \qquad \alpha(x) = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta(t,x)-1}{t}$$

$\Delta(t_1+t_2, x) = \Delta(t_1, S_{t_2}x)\Delta(t_2, x)$ より

$$\Delta(t,x) = \exp\left(\int_0^t \alpha(S_t x)\,dt\right)$$

も成り立つ。

<u>定義</u>　任意の正則点xと任意の方向lに対して，

$\lambda_l(x)>0$　ならば　transversal field は拡大している．

$\lambda_l(x)<0$　ならば　transversal field は縮少している．

という。

<u>定義</u>　transversal field Z　について，$\mathcal{U}_Z=\mathcal{U}$ (trivial) であれば，metrical transitive であるという．

§9.　エルゴード性に関する定理

<u>定理2A</u>　automorphism Tに対して，拡大している（又は縮少している）transversal field Z_1　があれば，T不変な集合全体の作るσ代数をγ_0とするとき，

$$\gamma_0 \subset \gamma(\mathcal{U}_{Z_1})$$

が成り立つ。

証明　Z_1が拡大しているとき；$f(x)$をM上の連続函数とする．エルゴード定理より，次の極限はほとんど全てのxに対して存在する．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(T^k x)=\bar{f}_+(x)$$

函数$\bar{f}_+(x)$はT不変即ちγ_0-可測であり，しかもこのような函数はγ_0-可測かつ絶対値可積分な函数のなすバナッハ空間で

いたるところ稠密である．従って $\bar{f}_+(x)$ が $\gamma(U_{Z_1})$-可測であることを示せば充分である。

lemma 4 より，ほとんど全ての Z_1 のファイバー Γ に対して，Γ 上の任意の２点を x_1, x_2 とすれば，$\rho_{Z_1}(T^n x_1, T^n x_2) \longrightarrow 0 \quad (n \to 0)$．空间 M の compact 性より，函数 $f(x)$ は一様連続となるから，

$$\lim_{n\to\infty} |f(T^n x_1) - f(T^n x_2)| = 0$$

従って，$\bar{f}_+(x_1)$ が存在すれば，$\bar{f}_+(x_2)$ も存在して，$\bar{f}_+(x_1) = \bar{f}_+(x_2)$．即ち $\bar{f}_+(x)$ はそのようなファイバー Γ 上で定数となり，$\gamma(U_{Z_1})$ -可測である。

Z_1 が縮少しているとき； 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(T^{-k}x) = \bar{f}_-(x)$$

を考えることにより，同様にいえる。 ┘

系 automorphism T に対して，拡大している transversal field Z_1 と縮少している transversal field Z_2 が存在して，

Z_2 が Z_1 に関して絶対連続

又は Z_1 が Z_2 に関して絶対連続

であれば，T はエルゴード性をもつ．

証明　定理 1 を使って，$\gamma_0 \subset \gamma(U_{Z_1}) \cap \gamma(U_{Z_2}) = \mathcal{N}$ ．

注　系の条件の「拡大」「縮少」はどちらでもよいが具体例ではこのような形で使えることが多い．このことは以後の定理についてもいえる．

<u>定理2F</u>　flow $\{S_t\}$ に対して，拡大（又は縮少）しているtrans-versal field Z_1 があれば，$\{S_t\}$-不変な集合全体の作る σ-代数を $\mathfrak{T}_0$ とするとき，
$$\mathfrak{T}_0 \subset \mathfrak{T}(\cup_{\tilde{Z}_1})$$
が成り立つ．ここに $\tilde{Z}_1 = Z_1 \wedge Z$，$Z$ は flow $\{S_t\}$ から導かれる可測ファイバー構造．

<u>証明</u>　automorphism の場合と同じような議論をすればよいが，flow の場合は M 上に定義された連続函数 $f(x)$ について，
極限
$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(S_t x)\,dt = \bar{f}_+(x)$$
を考える．ほとんどすべての Z_1 の局所ファイバー C_{z_1} に対して，C_{z_1} 上の任意の２点を x_1, x_2 とすれば $\bar{f}_+(x_1) = \bar{f}_+(x_2)$．
$\tilde{Z}_1$ の局所ファイバーは $C_{\tilde{z}_1} = \bigcup_{|t|<\rho_0} S_t C_{z_1}$ の形をしているので，$C_{\tilde{z}_1}$ 上の任意の２点を y_1, y_2 とすれば，$S_{\tau_1} y_1 = x_1$, $S_{\tau_2} y_2 = x_2$, $x_1, x_2 \in C_{z_1}$ $|\tau_1|, |\tau_2| < \rho_0$ と表わせる．$\bar{f}_+$ の定義より
$\bar{f}_+(y_1) = \bar{f}_+(x_1) = \bar{f}_+(x_2) = \bar{f}_+(y_2)$ となり $C_{\tilde{z}_1}$ 上で定数となる．従って $\bar{f}_+$ は $\mathfrak{T}(\cup_{\tilde{z}_1})$-可測となる．」

<u>系</u>　flow $\{S_t\}$ に対して，拡大している transversal field Z_1 と縮少している transversal field Z_2 が存在して，

$\widetilde{Z}_2$ が Z_1 に関して絶対連続

又は　$\widetilde{Z}_1$ が Z_2 に関して絶対連続

であれば，$\{S_t\}$ はエルゴード性をもつ．

<u>証明</u>　$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}(\mathcal{U}_{\widetilde{Z}_1}) \cap \mathcal{V}(\mathcal{U}_{Z_1}) = \mathcal{N}$.

§10.　増大している分割の存在に関する定理

<u>定理 3A</u>　エルゴード性をもつ automorphism T が拡大している transversal field Z をもてば，ほとんどすべての要素が Z のファイバーの開連結部分集合であるような可測分割 ς で次の性質をみたすものが存在する。

0)　$T\varsigma > \varsigma$

1)　$\prod_k T^k \varsigma = \varepsilon$

2)　$\bigcap_k T^k \varsigma = \mathcal{U}_Z$

3)　$H(T\varsigma \mid \varsigma) = h$　　但し　$h = \int \log_2 \Delta(x) d\mu(x)$

<u>証明</u>　0°　Z を与える local base の元を U_1 とする．

U_1 の測度正の部分集合 V を次のようにとる．

1.　$\lambda(x) \geq \lambda_0 > 1$　　for　$x \in V$

2. U_1 の各局所ファイバー C_ξ に対して $C_\xi \cap V$ は滑らかな境界をもつファイバーの開部分集合

3. V はある半径 $d_0>0$ の球 を含み，球に滑らかに同位相.

V の測度正の部分集合 V_1 を次のようにとる.

1. U_1 の各局所ファイバー C_ξ に対して $C_\xi \cap V_1$ は滑らかな境界をもつファイバーの開部分集合

2. V_1 は半径 $\frac{d_0}{18}$ の球を含み，球に滑らかに同位相

3. $C_\xi \cap V_1$ は直径 $\frac{d_0}{4}$ 以下であり，$C_\xi \cap V$ の境界から $\frac{d_0}{4}$ 以上にはなれている.

Z の局所ファイバーへの集合 V_1 の分割を η とかく。V_1 上では η と一致し，$V-V_1$ 上では Z の局所ファイバーを与える集合 V の分割を $\hat{\eta}$ とかく. 次のことを仮定するのは自然である. 正数 R が存在して，$C_{\hat{\eta}}$ の境界からの距離が t を越えない点からなる集合 $D_t \subset C_{\hat{\eta}}$ に対して，$\mu(D_t | C_{\hat{\eta}}) \leq Rt$.

V_1 上では η に一致し，$M-V_1$ 上で退化している M の分割を $\tilde{\eta}$ とかく. $\zeta = \prod_{k \leq 0} T^k \tilde{\eta}$ が求める分割である。

1° $\varepsilon > 0$ をとめて考える. エルゴード定理を用いれば，

$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{V_1}(T^i x)$ とすると、集合 G と自然数 $n(\varepsilon)$ が次のようにとれる.

$$\mu(G) > 1-\varepsilon$$

$$|s_n(x) - n\mu(V_1)| \leq \varepsilon n \quad \text{for } x \in G,\ n > n(\varepsilon).$$

$$\widetilde{G} = \{x \in V_1 \ ; \ \mu(G \mid C_\eta(x)) > 1-\sqrt{\varepsilon}\} \in \mathfrak{F}_{V_1}(\eta)$$

とすれば、 $\mu(V_1 - \widetilde{G}) < \sqrt{\varepsilon}$.

$T^i C_\eta(x) \cap V_1 \neq \phi$ ならば、$T^i C_\eta(x) \subset V$ だから、

又 $x \in G_\circ$ ならば、 $s_n(x) \geqq n(\mu(V_1) - \varepsilon)$ だから、

$$d(T^n C_\eta(x)) \leqq d_0 \lambda_0^{-n(\mu(V_1)-\varepsilon)} \quad \text{for } x \in \widetilde{G}, \ n > n(\varepsilon).$$

$K_n = \{x \in \widetilde{G} \ ; \ H(\widetilde{\eta} \mid C_{T^n \widetilde{\eta}}(T^n x)) > 0\}$ とする。

点 $y \in T^n K_n$ はある $C_{\widetilde{\eta}}$ の境界から $d_0 \lambda_0^{-n(\mu(V_1)-\varepsilon)}$ 以内の距離にある。従って、

$$\mu(K_n) = \mu(T^n K_n) = \int_V \mu(T^n K_n \mid C_{\widetilde{\eta}})\, d\mu \leqq R d_0 \lambda_0^{-n(\mu(V_1)-\varepsilon)}.$$

$\sum_n \mu(K_n) < \infty$ なることより、ほとんどすべての点 x は高々有限ヶの K_n にのみ属する。

エントロピーの性質から、ほとんどすべての点 $x \in \widetilde{G}$ に対して、

$$H(\rho \mid C_{\widetilde{\eta}}(x)) = H(T^{-1}\widetilde{\eta} \vee T^{-2}\widetilde{\eta} \vee \cdots \vee T^{-\ell}\widetilde{\eta} \mid C_{\widetilde{\eta}}(x))$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{\ell} H(T^{-i}\widetilde{\eta} \mid C_{\widetilde{\eta}}(x)) = \sum_{i=1}^{\ell} H(\widetilde{\eta} \mid T^i C_{\widetilde{\eta}}(x)) < \infty$$

ここに ℓ は最右辺により決まる x に関係する数である。

この式は ρ がほとんど全ての $C_{\widetilde{\eta}} \subset \widetilde{G}$ を有限ヶの連結成分に分けることを意味する。

$\varepsilon = \frac{1}{m}$ とおき、$m \to \infty$ とすれば、ほとんどすべての $C_{\widetilde{\eta}} \subset V_1$ を分割 ρ の有限ヶの要素に mod 0 で分ける。

$W_\ell = T^{-\ell} V_1 - \left(\bigcup_{k=0}^{\ell-1} T^{-k} V_1\right)$, $\ell > 0$ とすれば、T のエルゴード性より $\bigcup_{\ell \geqq 0} W_\ell = M \pmod 0$

$x\in W_\ell$ に対して $C_\rho(x)=T^{-\ell}C_\rho(T^\ell x)$ が得られる.
即ちほとんどすべての要素 C_ρ は Z のファイバーの開連結部分集合である。

2° $T\rho \geqq \rho$ は定義より明らか. $T\rho>\rho$ は $H(T\rho|\rho)>0$ よりわかる.

$\prod_k T^k\rho=\varepsilon$, $\bigcap_k T^k\rho=\nu_Z$ は Z の拡大性を lemma 4. lemma 5 によって用いればよい.

3° ・ $-\frac{1}{m}\log\mu(C_{T^m\rho}(x)\,|\,C_\rho(x))$

$$=-\frac{1}{m}\left[\log\mu(C_{T^m\rho}(x)\,|\,C_{T^{m-1}\rho}(x))+\cdots+\log\mu(C_{T\rho}(x)\,|\,C_\rho(x))\right]$$

$$=-\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}\log\mu(C_{T\rho}(T^{-k}x)\,|\,C_\rho(T^{-k}x)) \qquad \text{for a.e. } x$$

エルゴード定理より,

$$\lim_{m\to\infty}\left[-\frac{1}{m}\log\mu(C_{T^m\rho}(x)\,|\,C_\rho(x))\right]=H(T\rho\,|\,\rho) \quad \text{for a.e. } x$$

・まず, $H(T\rho|\rho)\leqq h$ を示す。$h<\infty$ を仮定してもよい。
分割 ρ_{V_1} は η の細分故, ほとんどいたるところ正の密度 $p_\rho(x)$ で,

$$\mu(A|C_\rho)=\int_{A\cap C_\rho}p_\rho(x)\,d\sigma_{C_\rho}(x) \qquad \text{for a.e. } C_\rho$$

$G(p,P)=\{x\in V_1\,;\,p<p_\rho(x)<P\}$ とする。

$\varepsilon>0$ に対して, 次のような $0<p_0<P_0<\infty$ と集合 $G_1\in\mathfrak{F}_{V_1}(\rho)$ が見いだせる。即ち $x\in G_1$ に対して,

$\alpha_1)$ $$\int_{C_\rho(x)\cap G(p_0,P_0)}d\sigma_{C_\rho}(y)\geqq(1-\varepsilon)\Sigma(C_\rho(x))$$

α_2) $p_0 < \Sigma(C_\xi(x)) < P_0$

α_3) $\displaystyle\int_{C_\xi(x)\cap G(p_0,P_0)} p_\xi(y)\, d\sigma_{C_\xi(x)}(y) = \mu(G(p_0,P_0) \mid C_\xi(x)) \geq 1-\varepsilon$

$$\mu(G_1) \geq \mu(V_1)(1-\varepsilon)$$

。 $E_m = \bigcup \left\{ C_{T^m\xi} \in T^m\xi \ ; \int_{C_{T^m\xi}\cap G(p_0,P_0)} d\sigma_{C_\xi}(y) \geq (1-\sqrt{\varepsilon})\Sigma C(C_{T^m\xi}) \right\}$

とすれば, $C_\xi \subset G_1$ について

$$\int_{(G_1-E_m)\cap C_\xi} d\sigma_{C_\xi}(y) = \sum_{C_{T^m\xi}\subset (G_1-E_m)\cap C_\xi} \int_{C_{T^m\xi}} d\sigma_{C_\xi}(y)$$

$$\leqq \sum_{C_{T^m\xi}\subset (G_1-E_m)\cap C_\xi} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \int_{C_{T^m\xi}\cap(V_1-G(p_0,P_0))} d\sigma_{C_\xi}(y) \qquad (E_m \text{の定義})$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{C_\xi\cap(V_1-G(p_0,P_0))} d\sigma_{C_\xi}(y) \leqq \sqrt{\varepsilon}\, \Sigma(C_\xi) \qquad (\alpha_1)$$

G_1 上に新らしい測度 μ_1 を, $A \subset G_1$

$$\mu_1(A) = \frac{1}{p_0}\int_{G_1} d\mu(x) \int_{A\cap C_\xi(x)} \frac{1}{p_\xi(y)}\, d\mu(y \mid C_\xi(x)) = \frac{1}{p_0}\int_{G_1} d\mu(x) \int_{A\cap C_\xi(x)} d\sigma_{C_\xi}(y)$$

で導入すれば, 測度 μ と μ_1 は同値である.

$$\mu_1(G_1-E_m) \leqq \int_{G_1} \sqrt{\varepsilon}\, \Sigma(C_\xi(x))\, d\mu(x) < \sqrt{\varepsilon} \quad \mu(V_1)$$

故に $\mu(G_1-E_m) < \varepsilon_1$

。エルゴード定理より,

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log \Delta(T^i y) \longrightarrow \int \log\Delta(y)\, d\mu(y) = h \qquad \text{a.e. } y$$

$\varepsilon > 0$ に対して $m(\varepsilon)$ と集合 F が存在して,

$$\mu(F) > 1-\varepsilon$$

$$2^{-m(h+\varepsilon)} \leq \frac{1}{\Delta(Ty)\cdots\Delta(T^m y)} \leq 2^{-m(h-\varepsilon)}, \quad y \in F,\ m > m(\varepsilon).$$

$$\left(\begin{array}{l} h=\infty \text{ のときは，任意の } N \text{ に対して，} \mu(F)>1-\frac{1}{N} \\ \quad 0 \leq \frac{1}{\Delta(Ty)\cdots\Delta(T^m y)} \leq 2^{-mN} \quad , \ y\in F,\ m>m(N) \end{array} \right)$$

・ $F_1=\{x\in V_1\ ;\ \mu(F|C_\xi(x))>1-\sqrt{\varepsilon}\}\in \mathfrak{F}_{V_1}(\xi)$

とすれば，　$\mu(F_1)>\mu(V_1)(1-\sqrt{\varepsilon})$

$L_m=E_m\cap T^m G_1\cap T^m F_1$ とすると，$a>0$ と $\mu(L_m)>a$ なる無限に多くの m がある。即ち無限に多くの L_m にはいるような点の集合は正測度である．

$x\in L_m$ について，

$$\mu(C_{T^m\xi}(x)\,|\,C_\xi(x))=\int_{C_{T^m\xi}(x)} P_\xi(y)\,d\sigma_{C_\xi(x)}(y)$$

$$\geqq \int_{C_{T^m\xi}(x)\cap G(P_0,P_0)} P_\xi(y)\,d\sigma_{C_\xi(x)}(y) \geqq P_0(1-\sqrt{\varepsilon})\,\Sigma(C_{T^m\xi}(x))$$

$$\Sigma(C_{T^m\xi}(x))=\int_{C_{T^m\xi}(x)} d\sigma_{C_\xi(x)}(y) = \int_{T^{-m}C_{T^m\xi}(x)} d\sigma_{C_\xi(T^{-m}x)}(T^m y)$$

$$=\int_{T^{-m}C_{T^m\xi}(x)} \frac{1}{\Delta(Ty)\cdots\Delta(T^m y)}\,d\sigma_{C_\xi(T^{-m}x)}(y)$$

$$=\int_{T^{-m}C_{T^m\xi}(x)} \frac{1}{P_\xi(y)}\cdot\frac{1}{\Delta(Ty)\cdots\Delta(T^m y)}\,P_\xi(y)\,d\sigma_{C_\xi(T^{-m}x)}(y)$$

$$\geqq \int_{T^{-m}C_{T^m\xi}(x)\cap G(P_0,P_0)\cap F} \frac{1}{P_\xi(y)}\cdot\frac{1}{\Delta(Ty)\cdots\Delta(T^m y)}\,d\mu(y\,|\,C_\xi(T^{-m}x))$$

$$\geqq \frac{1}{P_0}\,2^{-m(h+\varepsilon)}\,\mu(G(P_0,P_0)\cap F\,|\,C_\xi(T^{-m}x))$$

$$\geqq \frac{1-\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon}{P_0}\,2^{-m(h+\varepsilon)}$$

故に

$$-\frac{1}{m}\log\mu(C_{T^m\rho}(x)\mid C_\rho(x))$$

$$\leqq \frac{-\log P_0-\log(1-\sqrt{\varepsilon})+\log P_0-\log(1-\sqrt{\varepsilon}-\varepsilon)}{m}+h+\varepsilon$$

$m\to\infty$ とすれば　$H(T\rho\mid\rho)\leq h+\varepsilon$

$\varepsilon\downarrow 0$ とすれば　$H(T\rho\mid\rho)\leq h$

4° $H_m=\{x\in V_1\ ;\ \mu(G(p_0,P_0)\cap T^mF\mid C_{T^m\rho}(x))>1-\sqrt{\varepsilon}\}$

とすれば　$\mu(H_m)>\mu(V_1)(1-\sqrt{\varepsilon})$

$I_m=H_m\cap T^mG_1$ とすると　$b>0$ と $\mu(I_m)>b$ なる無限に多くの m がある．即ち無限に多くの I_m にはいるような点の集合は正測度である．

$x\in I_m$ について，

$$\mu(C_{T^m\rho}(x)\mid C_\rho(x))=\frac{\mu(G\cap T^mF\cap C_{T^m\rho}(x)\mid C_\rho(x))}{\mu(G\cap T^mF\mid C_{T^m\rho}(x))}$$

$$\leqq\frac{1}{1-\sqrt{\varepsilon}}\int_{G(p_0,P_0)\cap T^mF\cap C_{T^m\rho}(x)}p_\rho(y)\,d\sigma_{C_\rho(x)}(y)$$

$$\leq\frac{P_0}{1-\sqrt{\varepsilon}}\int_{G(p_0,P_0)\cap T^mF\cap C_{T^m\rho}(x)}d\sigma_{C_\rho(x)}(y)$$

$$\int_{G(p_0,P_0)\cap T^mF\cap C_{T^m\rho}(x)}d\sigma_{C_\rho(x)}(y)=\int_{T^{-m}G(p_0,P_0)\cap F\cap T^{-m}C_{T^m\rho}(x)}d\sigma_{C_\rho(T^{-m}x)}(T^mz)$$

$$=\int_{T^{-m}G(p_0,P_0)\cap F\cap C_\rho(T^{-m}x)}\frac{1}{\Delta(Tz)\cdots\Delta(T^mz)}\,d\sigma_{C_\rho(T^{-m}x)}(z)$$

$$\leqq 2^{-m(h-\varepsilon)}\Sigma(C_\rho(T^{-m}x))\leq 2^{-m(h-\varepsilon)}P_0$$

故に．

$$-\frac{1}{m}\log \mu(C_{T^m\varsigma}(x) \mid C_\varsigma(x))$$

$$\geqq \frac{-2\log P_0 + \log(1-\sqrt{\varepsilon})}{m} + h - \varepsilon$$

$m \to \infty$ とすれば $H(T\varsigma \mid \varsigma) \geqq h - \varepsilon$

$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば $H(T\varsigma \mid \varsigma) \geqq h$ 」

定理F エルゴード性をもつ flow $\{S_t\}$ が拡大している transversal field Z_1 をもてば，ほとんどすべての要素が Z のファイバーの開連結部分集合であるような可測分割 ς で次の性質をみたすものがある．

0) $S_t\varsigma > \varsigma$ for $\forall t > 0$

1) $\prod_t S_t \varsigma = \varepsilon$

2) $\bigcap_t S_t \varsigma = \nu_{Z_1}$

3) $H(S_t\varsigma \mid \varsigma) = t h \log_2 e$ 但し $h = \int \alpha(x)\, d\mu(x)$

証明 1° 分割 ς の作り方

可測集合 U を次のように選ぶ。

1. U には $\widetilde{Z_1} = Z_1 \wedge Z$ の局所ファイバーで

$$C_{\widetilde{Z_1}} = \bigcup_{0 \le t \le \tau} S_t C_{Z_1}, \quad \tau = \tau(C_{\widetilde{Z_1}}), \quad C_{Z_1} \text{ は } Z_1 \text{ の局所ファイバー.}$$

の形をしたものからなる可測分割がある。

2. $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ for $x \in U$

U の部分集合 V を次のように選ぶ.

1. Z の V に含まれる局所ファイバーは，それを含み，U に含まれる局所ファイバーの境界から $d_0>0$ 以上はなれている

2. Z の V に含まれる局所ファイバーの直径は d_0 より小さい．また V は $\frac{d_0}{4}$ 半径の球を含む．

3. V に含まれる $\tilde{Z}_1$ の局所ファイバーは次のような形をしている。

$$C_{\tilde{Z}_1} = \bigcup_{0\le t\le\delta} S_t C_{Z_1}$$ ，C_{Z_1} は V に含まれる Z_1 の局所ファイバー．δ は $C_{\tilde{Z}_1}$ に無関係

Z_1 の局所ファイバーへの V の分割を ξ，V 上では ξ に一致し，$M-V$ 上では退化している空間 M の分割を $\tilde{\xi}$ とあらわす。

$\rho = \prod_{k\le 0} S_{\frac{k\delta}{2}} \tilde{\xi}$ が求めるものである．

2° エントロピーの計算

$$\begin{aligned}
H(S_t\rho\,|\,\rho) &= \int \log_2 \Delta(t,x)\, d\mu(x) \\
&= \int d\mu(x) \int_0^t \alpha(S_\tau x)\,d\tau \cdot \log_2 e \\
&= \int_0^t d\tau \int \alpha(S_\tau x)\,d\mu(x) \cdot \log_2 e \\
&= t \int \alpha(x)\,d\mu(x) \cdot \log_2 e
\end{aligned}$$

§11. transversal field の metrical transitivity と K-system.

<u>定理4A</u> automorphism T が拡大している transversal field Z_1 と縮少している transversal field Z_2 をもち，

1) Z_1 は Z_2 に関して絶対連続

且つ 2) Z_2 は Z_1 に関して絶対連続

ならば，　$U_{Z_1} = U_{Z_2} = U$.

結果　定理4A の条件のもとで定理3A の分割 ς は T が K-system であることを与える分割となっている．

単に T が K-system であるためには定理4A の条件 1) 又は 2) のどちらかがいえればよい．

定理4F　flow $\{S_t\}$ が拡大している transversal field Z_1 と縮少している transversal field Z_2 をもち，

1) $\widetilde{Z_1}$ は Z_2 に関して絶対連続

且つ 2) $\widetilde{Z_2}$ は Z_1 に関して絶対連続

であれば，　$U_{Z_1} = U_{Z_2}$

定理5F　flow $\{S_t\}$ の transversal field Z_1, Z_2 について，

3) Z_1 と Z_2 が非可積分

4) $U_{Z_1} = U_{Z_2}$

であれば，　$U_{Z_1} = U_{Z_2} = U_{\widetilde{Z_1}} = U_{\widetilde{Z_2}}$

結果　定理4F，5F の条件 1) 2) 3) のもとで，定理3F の分割 ς は $\{S_t\}$ が K-system であることを与える分割となっている。

§13. automorphism の1次元 transversal field

抽象ルベーグ空間をMとし，その上に automorphism T が定義されているとする。

<u>定義</u> Mの可測変換の一径数群 $\{Z_u\}$ が admissible とは，

1) 空間Mの群 $\{Z_u\}$ に関し正則な分割が存在する。即ちほとんどすべての要素が群 $\{Z_u\}$ の軌道の半閉区間であるような可測分割で，分割の時間的長さが可測函数であるもの。

2) 空間Mの任意の正則分割 ξ に対し，定数 $0 < c \leq C < \infty$ が存在し，分割の要素 $C_\xi = \{Z_u x \ ; \ a \leq x < b\}$ について，

$$\mu(A \mid C_\xi) = \int_{A \cap C_\xi} f(u \mid C_\xi)\, du$$

ここに密度は $c \leq f(u \mid C_\xi) \leq C$ をみたすとする。

特に $\{Z_u\}$ が力学系即ち不変測度をもつときは admissible であり，このとき $c = C = 1$ となる。

<u>定義</u> admissible group $\{Z_u\}$ が T の transversal field とは，

1) $\{Z_u\}$ の軌道は T によって $\{Z_u\}$ の軌道にうつる

2) $T^{-1} Z_u x = Z_{\bar{u}} T^{-1} x$

をみたす函数 $\bar{u} = \bar{u}(u, x)$ に対し，次の極限がほとんどいたるところ存在し，x の可測函数になる。

$$\lim_{u\to 0} \frac{\overline{u}(u,x)}{u} = \lambda(x)$$

$\lambda(x) > 1$, < 1 により拡大, 縮少を定義する。

定理3A と同様の定理がなり立つ。

Compact abelian group 上の automorphism について, transversal field の存在するための条件を与える。

第2可算公理をみたす compact abelian group をMとし, M上の群としての自己同型写像をTとする。TはM上のHaar測度μを不変にする。

GをMの character group とする(離散群になる), Tに共役なGの自己同型写像をT^*と表わす。

$\{a_u\}$ をMの1径数部分群とする。即ち $a_{u+v} = a_u + a_v$

$\{a_u\}$ がTに関する固有部分群であるとは, $T^{-1}a_u = a_{\lambda u}$ をみたすλが存在することをいう。

$\{a_u\}$ により導かれるMの1径数変換群を$\{Z_u\}$ とする。

即ち　$Z_u x = x + a_u$

<u>lemma</u>　Tに関する固有部分群$\{a_u\}$により導かれる変換群 $\{Z_u\}$ はTの transversal field をなす。

証明 $T^{-1}Z_u x = T^{-1}(x+a_u) = T^{-1}x + T^{-1}a_u$

$$= T^{-1}x + a_{\lambda u} = Z_{\lambda u}T^{-1}x$$

$$\bar{u} = \lambda u \qquad \lim_{u\to 0}\frac{\bar{u}}{u} = \lambda$$ 」

定理 群Gの実数の加法群R^1へのisomorphic imbedding $\varphi(\cdot)$で，$\varphi(T^*g) = \frac{1}{\lambda}\varphi(g)$ をみたすものが存在すればTはtransversal field をもつ

証明 $a_u(g) = \exp(iu\varphi(g))$ とする.

1) $a_u(\cdot)$ はGから複素数群$\mathbb{C}$への準同型写像

2) $|a_u(g)| = 1$ 3) $\{a_u(\cdot)\}$ は1径数群

だから a_u はMの1径数群と考えられる.

$$(Ta_{\lambda u}, g) = (a_{\lambda u}, T^*g) = \exp[i\lambda u\varphi(T^*g)]$$

$$= \exp[iu\varphi(g)] = (a_u, g)$$

故に $Ta_{\lambda u} = a_u$, $T^{-1}a_u = a_{\lambda u}$

即ち $\{a_u\}$ はTに関する固有部分群である。」

2次元torus の場合

$$M = \mathbb{T}^2 = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; 0 \le x, y < 1 \right\}$$

$$T : \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \qquad \alpha_{ij} \text{ は整数}, \quad \det\alpha = 1$$

αの固有値をλ, λ'とすると．$\lambda\lambda' = 1$．1の根が固有値でないこと即ちλ, λ'が実数値であることを仮定する。

$$\alpha\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix} \qquad \alpha\begin{pmatrix}\gamma_1'\\ \gamma_2'\end{pmatrix} = \lambda'\begin{pmatrix}\gamma_1'\\ \gamma_2'\end{pmatrix}$$

$$G = \left\{ N = \begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix} \ ;\ n_1, n_2 \text{は整数} \right\}$$

$$T^* \ ;\ \alpha^* = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{21}\\ \alpha_{12} & \alpha_{22}\end{pmatrix}$$

$$(TX, N) = (\alpha X)^* N = X^*\alpha^* N = (X, \alpha^* N) = (X, T^* N)$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}^* \begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix} = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2$$

とすれば，φはGからR'への isomorphic imbedding であり，

$$\varphi\left(T^*\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}^* \alpha^* \begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix} = \lambda\varphi\left(\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix}\right)$$

$$\left[a_u, \begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix}\right] = \frac{iu\varphi\left(\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix}\right)}{2\pi i} = \frac{u}{2\pi}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}^*\begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix} = \left[\frac{u}{2\pi}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}n_1\\ n_2\end{pmatrix}\right]$$

故に，

$$a_u = \frac{u}{2\pi}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$$

$$Z_u\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \frac{u}{2\pi}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$$