数理解析研究所講究録
第 20 巻 1967 年 85-99

無限分解可能な確率過程

東京教育大　丸山儀四郎

§1 無限分解可能な確率過程と Lévy 測度

確率空間 $(S, \mathcal{F}, P)$ 上の実数値確率過程 $\xi = (\xi_t(\alpha), t \in T, \alpha \in S)$, $T = (-\infty, \infty)$ に対し、任意の T の部分集合 $\lambda = (t_1, t_2, \cdots, t_n)$ について、$\xi_\lambda \equiv (\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \cdots, \xi_{t_n})$ が無限分解可能な法則に従うとき、ξ を無限分解可能な確率過程 (infinitely divisible process) (IDP と略記) とよぶ。今後は便宜上 Gauss 成分のない IDP を対象とする。

T の有限部分集合の全体 Λ を包含関係 $\lambda \subset \mu$ によって $\lambda \leq \mu$ と順序づけた有向集合を考える。R^T (又は R^λ, $\lambda \in \Lambda$) の t―成分を $f(t, x)$ とかく。そして

$$X = \bigcup_{t \in T} \{x : f(t, x) \neq 0\}$$

(1.1)

$$X_\lambda = \bigcup_{t \in \lambda} \{x : x \in R^\lambda, f(t, x) \neq 0\}$$

とおく。R^λ は集合としては R^n と同一。

$f_{\lambda\mu}$ $(\lambda \leq \mu)$ を R^μ から R^λ への射影, $f_{\lambda\infty}$

をR^{Γ}からR^{λ}の射影とする；ただし$f_{\lambda\lambda}$は恒等写像。

(1.2) $D_{\lambda\mu}=f_{\lambda\mu}^{-1}X_{\lambda}$, $D_{\lambda\infty}=f_{\lambda\infty}^{-1}X_{\lambda}$, $\lambda\leq\mu$

とおき，$D_{\lambda\mu}$, $D_{\lambda\infty}$を定義域とする写像$g_{\lambda\mu}$, $g_{\lambda\infty}$を

(1.3) $g_{\lambda\mu}x=f_{\lambda\mu}x$, $x\in D_{\lambda\mu}$

$$g_{\lambda\infty}x=f_{\lambda\infty}x, \quad x\in D_{\lambda\infty}$$

と定義する。すると

(1.4) $g_{\lambda\mu}g_{\mu\nu}=g_{\lambda\nu}$, $g_{\lambda\mu}g_{\mu\infty}=g_{\lambda\infty}$, $\lambda\leq\mu\leq\nu$.

(1.5) $D_{\mu\nu}\supset D_{\lambda\nu}$, $D_{\mu\infty}\supset D_{\lambda\infty}$, $\lambda\leq\mu\leq\nu$,

$$X=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}D_{\lambda\infty},$$

$\alpha\cup\beta=\gamma$ ならば $D_{\gamma\infty}=D_{\alpha\infty}\cup D_{\beta\infty}$.

いまΛの増加点列 (1) $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$ と，これに対応する点列 (2) $\{x_i\in X_{\lambda_i}, 1\leq i<\infty\}$ が条件

(1.6) $x_i=g_{\lambda_i\lambda_{i+1}}x_{i+1}$, $1\leq i<\infty$

をみたすように与えられたとする。すると$f_{\lambda\mu}$と同様に，$g_{\lambda\mu}$はつぎの条件をみたす。

(P) $x_\infty \in X$ が存在して $(\lambda\gamma)\, x_i = g_{\lambda_i \infty} x_\infty,\ 1 \le i < \infty.$

ξ の有限次元分布を特性函数を用いて表わせば

$$C_\lambda(z) = E e^{i(z,\xi_\lambda)_n}$$

$$(1.8) \quad = \exp\left\{ \int_{X_\lambda} \left[e^{i(z,u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k \right] Q_\lambda(du) + i(b_\lambda, z)_n \right\},$$

ただし
$\lambda = (t_1, \cdots, t_n)$, $z = (z_1, \cdots, z_n) \in R^n$, $u = (u_1, \cdots, u_n) \in R^n$, $b_\lambda = (b_{\lambda 1}, \cdots, b_{\lambda n}) \in R^n$, $a(x) = x$ $(|x| \le 1)$, $= 1$ $(|x| > 1)$; $(\ )_n$ は R^n の内積, Q_λ は $X_\lambda = R^n - \{0\}$ 上の Lévy 測度で、従って

$$\int_{X_\lambda} \frac{|u|_n^2}{1 + |u|_n^2} Q_\lambda(du) < \infty,$$

ここに $|\ |_n$ は R^n の距離.

R^n の部分空間 X_λ $(\lambda = (t_1, \cdots, t_n))$ 上のボレル族を $\mathcal{B}_\lambda$ とする。

1° $\lambda \le \mu$ に対して $g_{\lambda\mu}$ は $(D_{\lambda\mu}, D_{\lambda\mu}\mathcal{B}_\mu, Q_\mu)$ から $(X_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, Q_\lambda)$ への homomorphism, $Q_\lambda = g_{\lambda\mu} Q_\mu$, である。$T$ 上の実函数 $b(t), t \in T$,

が存在して

$$(1.9)\quad b_{\lambda k} = b(t_k), \quad 1 \leq k \leq n, \quad \lambda = (t_1, \cdots, t_n),$$

これ $b_\lambda = (b_{\lambda 1}, \cdots, b_{\lambda n})$ は (1.8) で定まるもの。

<u>証明</u>　明らかに $\lambda = (t_1, \cdots, t_n)$, $\mu = (t_1, \cdots, t_n, t_{n+1})$ とおいて命題を証明すればよい。$z' = (z_1, \cdots, z_{n+1}) \in R^{n+1}$, $u' = (u_1, \cdots, u_{n+1}) \in R^{n+1}$ とおけば

$$C_\lambda(z) = C_{\lambda'}(z')\Big|_{z_{n+1}=0}$$

であるから

$$(1.10)\quad C_\lambda(z) = \exp\left\{\int_{X_\mu}\left(e^{i(z,u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k\right) Q_\mu(du') + i\sum_{k=1}^{n} b_{\mu k} z_k\right\}.$$

(1.10) の右辺の積分は分解されて

$$(1.11)\quad \left(\int_{X_\mu \cap (u_1^2 + \cdots + u_n^2 \neq 0)} + \int_{X_\mu \cap (u_1 = \cdots = u_n = 0)}\right) \times \left(e^{i(z,u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k\right) Q_\mu(du')$$

$$= \int_{D_{\lambda\mu}} \left(e^{i(z, g_{\lambda\mu} u')_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k\right) Q_\mu(du')$$

$$= \int_{D_\lambda} \left(e^{i(z,u)_n} - 1 - \sum_{k=1}^{n} a(u_k) z_k \right) g_{\lambda\mu} Q_\mu(du),$$

ただし
$g_{\lambda\mu}Q_\mu$ は homomorphism $g_{\lambda\mu}$ によって Q_μ から X_λ に導かれた測度で $R^{(n)}-\{0\}$ のボレル集合 $A^{(n)}$ に対し

$$g_{\lambda\mu} Q_\mu (A^{(n)}) = Q_\mu (g_{\lambda\mu}^{-1} A^{(n)}).$$

(1.8) の右辺と (1.11) の右辺を比較して,

(1.12) $\qquad Q_\lambda = g_{\lambda\mu} Q_\mu$

(1.13) $\qquad b_{\lambda k} = b_{\mu k} \quad , \quad 1 \leq k \leq n.$

(1.13) は, T 上の実函数 $b(t)$ が存在して (1.9) が成立することを示すものである。かくて定まる $b(t)$ を ξ の平均函数とよぶ。(ξ_t の平均が $b(t)$ であることを意味するものではない。)

上記から, Lévy measure の system に対応して測度空間の system $\{X_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, Q_\lambda\}$ が定まる, $\mathcal{B}_\lambda$ は位相的 σ-代数, Q_λ は σ-有限な Radon measure, 即ち任意の $E \in \mathcal{B}_\lambda$, $\delta>0$, $Q_\lambda(E)<\infty$, に対して, コンパクトな $K_\delta \subset E$ が存在して, $Q_\lambda(E-K_\delta)<\delta$.

$\lambda \leq \mu$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, に対して領域 $D_{\lambda\mu} \subset X_\mu$ から X_λ 上への連続写像が $(D_{\lambda\mu}, D_{\lambda\mu}\mathcal{B}_\mu, Q_\mu)$ から $(X_\lambda, \mathcal{B}_\lambda, Q_\lambda)$ への準同型写像 $g_{\lambda\mu}$ であるような, i.e.

(1.14) $g_{\lambda\mu}^{-1}\mathcal{B}_\lambda \subset \mathcal{B}_\mu D_{\lambda\mu}$

$$Q_\mu(g_{\lambda\mu}^{-1}E) = Q_\lambda(E) \quad , \quad E \in \mathcal{B}_\lambda ,$$

$$g_{\lambda\mu}\, g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \quad (\lambda \leq \mu \leq \nu) ;$$

および任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して集合 $D_{\lambda\infty} \subset X$ から X 上への写像 $g_{\lambda\infty}$ で

(1.15) $g_{\lambda\mu}\, g_{\mu\infty} = g_{\lambda\infty}$, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} D_{\lambda\infty} = X$

をみたすものが存在する。また $g_{\lambda\mu}$, $g_{\lambda\infty}$ は条件 (P) をみたすことが容易に示される。

$$\mathcal{B}_\lambda^* = g_{\lambda\infty}^{-1}(\mathcal{B}_\lambda), \quad Q_0(A^*) = Q_\lambda(g_{\lambda\infty}A^*)$$
$$A^* \in \mathcal{B}_\lambda^*$$

とおけば

$$\mathcal{B}_\lambda^* \subset \mathcal{B}_\mu^* \quad (\lambda \leq \mu),$$

Q_0 の定義は consistent, i.e. $A^* \in \mathcal{B}_\lambda^* \cap \mathcal{B}_\mu^*$ であれば $Q_\lambda(g_{\lambda\infty}A^*) = Q_\mu(g_{\mu\infty}A^*)$ である。

$$\mathcal{B}_0 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{B}_\lambda^*$$

とおけば $\mathcal{B}_0$ は有限加法的環であって $(X, \mathcal{B}_0, Q$ は有限加法的な測度空間である。吾々の基本定理は

<u>定理</u> $\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}_0$ から生成される最小の σ-環とすれば, Q_0 は $\mathcal{B}$ 上の測度 Q に一意に

拡張される。一般に，$(X, \mathcal{B}, Q)$ は σ－有限ではない。

この結果は Bochner の方法 [ ] の変形であって概略つぎのような手順で証明される。

1° $\mathcal{B}_0^\lambda = D_{\lambda\infty}\mathcal{B}_0$ とおけば $(D_{\lambda\infty}, \mathcal{B}_0^\lambda, Q_0)$ は有限加法的な測度空間である。

2° $(D_{\lambda\infty}, \mathcal{B}_0^\lambda, Q_0)$ は σ－有限，σ－加法的な測度空間 $(D_{\lambda\infty}, \mathcal{B}^\lambda, Q)$ に拡張（一意に）される。

この命題の証明は Bochner [ ] と同様である。X_λ はは σ－有限であるから，$D_{\lambda\infty}$ も然り，i.e

$$D_{\lambda\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad E_n \in \mathcal{B}_0^\lambda, \quad Q_0(E_n) < \infty,$$

E_n は互に disjoint. 証明のためにはつぎのことを示せばよい：$S_n^* \in \mathcal{B}_0^\lambda$, $S_1^* \supset S_2^* \supset \cdots$, $Q_0(S_1^*) < \infty$, $Q_0(S_n^*) \geq \alpha > 0$, α は n に無関係，ならば

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n^* \neq \phi$$

Λ の有向性を用いて，つぎのように考えることができる。Λ の増加列 $\lambda_n (\geq \lambda)$, $1 \leq n < \infty$, と $S_n \in \mathcal{B}_{\lambda_n}$ があって，

$$S_n^* = g_{\lambda_n\infty}^{-1} S_n, \quad 1 \leq n < \infty,$$

コンパクトな $\tilde{K}_n \subset S_n$ を $Q_{\lambda_n}(S_n - \tilde{K}_n) \leq \frac{\alpha}{2^{n+1}}$,

をみたすようにとり

$$K_n^* = \bigcap_{\nu=1}^{n} g_{\lambda_\nu \infty}^{-1}(\tilde{K}_\nu)$$

とおけば $S_n^* \supset K_n^*$，また $Q_0(S_n^*) - Q_0(K_n^*) \leq \frac{\alpha}{2}$ であるから，$Q_0(K_n^*) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$．また一方 $\bigcap_{\nu=1}^{n} g_{\lambda_\nu \lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_\nu)$ （$g_{\lambda_n \lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_n) = \tilde{K}_n$ はコンパクト）

はコンパクトであるから

(1.16) $\quad K_n \equiv g_{\lambda_n \infty}(K_n^*) = \bigcap_{\nu=1}^{n} g_{\lambda_\nu \lambda_n}^{-1}(\tilde{K}_\nu)$

はコンパクトであり，$Q_{\lambda_n}(K_n) = Q_0(K_n^*) > 0$，従って $K_n \neq \phi$．このことから，$(K_n, \lambda_n, 1 \leq n \infty)$ の部分列 $(L_n, \mu_n, 1 \leq n < \infty)$ と $x_n \in L_n$, $1 \leq n < \infty$, が存在して $x_n = g_{\mu_n \mu_{n+1}} x_{n+1}$ をみたす。よって(P)より $x_\infty \in D_{\mu_1 \infty}$ が存在して，$x_n = g_{\mu_n \infty} x_\infty \in L_n$ をみたし，$x_\infty \in g_{\mu_n \infty}^{-1} L_n = K_{m_n}^*$．従って

$$x_\infty \in \bigcap_{n \geq 1} K_{m_n}^* = \bigcap_{n \geq 1} K_n^* \subset \bigcap_{n \geq 1} S_n^*.$$

明らかに $\lambda \leq \mu$ ならば

(1.17) $\quad (D_{\lambda\infty}, \mathcal{B}^\lambda, Q) \subset (D_{\mu\infty}, \mathcal{B}^\mu, Q)$

$\mathcal{B}$，$\mathcal{B}'$をそれぞれ M，M'上のσ−代数とするとき，二つの測度空間 $(M, \mathcal{B}, \mu)$，$(M', \mathcal{B}', \mu')$ が条件：$D \equiv M \cap M' \in \mathcal{B} \cap \mathcal{B}'$，$D\mathcal{B} = D\mathcal{B}'$，$D\mathcal{B}$上では $\mu = \mu'$ をみたすとき，両測度空間は互に延長であるという。

(1.17)の関係より，任意の λ, μ に対して $(D_{\lambda\infty}, \mathcal{B}^{\lambda}, Q)$ と $(D_{\mu\infty}, \mathcal{B}^{\mu}, Q)$ は互に延長になっている。

$$(1.18)\quad \mathcal{B} = \left\{ \Gamma \;\middle|\; \Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Gamma_n ,\ \Gamma_n \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{B}^{\lambda} \right\}$$

とおけば $\mathcal{B}$ は $\mathcal{B}_0$ の決定する最小の σ-ring であって (1.17)の関係より，Γ_n は互に disjoint, λ_n が存在して

$$(1.19)\qquad \Gamma_n \in \mathcal{B}^{\lambda_n},\quad 1 \leq n < \infty ,$$

とすることができる。そこで

$$(1.20)\qquad Q(\Gamma) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} Q_{\lambda n}(\Gamma_n)$$

とおいて Q を定義する。すると Q の定義は consistent であり，Q は σ-加法的となることが証明される。

任意の $A \in \mathcal{B}$ 上で Q を考えれば，(A, Q) は σ-有限な測度空間であり，かくして集合 $A, B \in \mathcal{B}$ は測度空間として互に延長になる。X 上の実函数 $f(x) \geq 0$ に対して $\mathrm{Car}\, f = (x : f(x) \neq 0) \in \mathcal{B}$ ならば $X_0 \subset X$ が $X_0 \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ を満足するものであれば，$\mathrm{Car}\, f \subset D \in \mathcal{B}$ をみたす D に対して

$$\int_{X_0} f(x)\, Q(dx) \equiv \int_{X_0 D} f(x)\, Q(dx)$$

とおいて左辺を定義すれば（右辺は通常の意味で定まる）その値は D のとりかたに無関係である。この左辺をもって X 上の f の積分を定義する。

§2 Poisson random measure.

$(X, \mathcal{B}, Q)$ を測度空間, $\mathcal{B}$ を X 上の σ-ring とする（X は必ずしも σ-finite でない）。$\mathcal{C} = \{A \mid A \in \mathcal{B},\ Q(A) < \infty\}$ とおき, $(\pi(A), A \in \mathcal{C})$ を Q に対応する Poisson random measure, i.e. $\pi(A)$ は $E(\pi(A)) = Q(A)$ をみたし Poisson 分布に従い, $A_i \in \mathcal{C}$, A_i は互に disjoint, $1 \leq i \leq n$, ならば $(\pi(A_i), 1 \leq i \leq n)$ は独立な変数系である。

$\mathcal{G}$ を条件：

(2.1) $\quad \mathrm{Car}\, f \in \mathcal{B}, \quad \displaystyle\int_X \frac{f^2(x)}{1+f^2(x)}\, Q(dx) < \infty$

をみたし $\mathcal{B}$ 可測な実函数の族（$\longleftrightarrow$ $\mathrm{Car}\, f \cap (f(x) \leq a) \in \mathcal{B}$）とする。$f \in \mathcal{G}$ においては

(2.2) $\quad I(f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \text{ in prob.} \left(\displaystyle\int_{|f(x)|>\varepsilon} f(x)\, \pi(dx) - \int_{|f(x)|>\varepsilon} a(f(x))\, Q(dx) \right)$

が存在する。

$f_k \in \mathcal{G},\ 1 \leq k \leq n,$ に対して $I(f_k)$ の分布は特性函数の対数

$$\log E \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} z_k I(f_k)\right)$$

$$(2.3) \quad = \int_X \left[\exp\left(i \sum_{k=1}^{n} z_k f_k(x)\right) - 1 - i \sum_{k=1}^{n} z_k a(f_k(x)) \right] Q(dx),$$

によって与えられる。

1° $\{I(f_k),\ f_k \in \mathcal{G},\ 1 \leq k \leq n\}$ が独立な確率変数であるための必要充分な条件は $\mathrm{Car}\, f_k,$ $1 \leq k \leq n,$ が Q-測度 0 の集合を無視して、互に disjoint になることである。

このことは (2.3) を用いて容易に証明される。

<u>定理</u> (1.12), (1.13) をみたす函数 $b(t),\ t \in T,$ と X_λ 上の測度 Q_λ, $\lambda \in \Lambda$ が与えられれば、Q_λ, $b(t)$ を Lévy 測度、平均函数とする IDP が存在する。IDP ξ が与えられれば、Poisson random measure を用いて ξ と同じ法則に従う IDP を ~~構成~~ することができる。

<u>証明</u> π を Q に対応する Poisson random measure とする。すると $x \in X$ の t-座標 $f(t, x)$,

は

$$\int \frac{f^2(t,x)}{1+f^2(t,x)} Q(dx) = \int_{R\cap(x\neq 0)} \frac{x^2}{1+x^2} Q_{\{t\}}(dx) < \infty,$$

をみたす。
すなわち $f(t,x) \in \mathcal{G}$.

$$y_t = I(f(t,x)) + b(t), \quad t \in T$$

とおく。 $\lambda = (t_1, \cdots, t_n) \subset T$, $x = (x_{t_1}, \cdots, x_{t_n})$, $z = (z_{t_1}, \cdots, z_{t_n}) \in R^\lambda$ に対して, $y_\lambda = (y_{t_1}, \cdots, y_{t_n})$ の特性函数 の対数は

$$\log C(z) = \int \Big[\exp\Big(i \sum_{k=1}^{n} f(t_k, x) z_{t_k}\Big) - 1$$

$$(2.4) \qquad - i \sum_{k=1}^{n} a(f(t_k, x)) z_{t_k} \Big] Q(dx) + i \sum_{k=1}^{n} b(t_k) z_{t_k}$$

$$= \int g(x) Q(dx) + i \sum_{k=1}^{n} b(t_k) z_k$$

いま

$$h(x) = \exp(i(x,z)_n) - 1 - i \sum a(x) z_k, \quad x \in R^n$$

とおけば $g_{\lambda\infty} x = (f(t_1,x), \cdots, f(t_n,x)), \; x \in X$ であり, 従って

$$\int g(x) Q(dx) = \int h(g_{\lambda\infty} x) Q(dx) = \int_{X_\lambda} h(x) g_{\lambda\infty} Q(dx)$$

$$= \int_{X_\lambda} h(x) Q_\lambda(dx),$$

これを(2.4)の右辺に代入すれば $C(z)$ は与えられた IDP ξ の有限次元の射影 ξ_λ の特性函数に等しいことがわかる。

以上、一般の IDP の構成を示してきたが、それについて regularity をもった IDP を示そう。ここに精しく述べることはできないが第一に確率連続なものを示してみる。

2° IDP ξ が確率連続であるための必要充分な条件は

(a) $b(t)$ は連続

(b) $\displaystyle\lim_{t\to s} Q_{s,t}(|x-y|>\delta,\ x^2+y^2\neq 0)=0$

(c) $\displaystyle\lim_{t\to s} \int_{\substack{|x-y|\leq 1\\ x^2+y^2\neq 0}} (x-y)^2 Q_{s,t}(dx,dy)=0$

が成立することである。ここに $Q_{s,t}$ は (ξ_s, ξ_t) の Lévy measure である。

2° の (a)(b)(c) が満足され、従って ξ が確率連続になるときは Q は σ-有限になる。
これを正確に述べると

3° 2°の(a),(b),(c)が満足されれば，つぎのような$X_0\in\mathcal{B}$がとれる；任意の$A\in\mathcal{B}$と$\varepsilon>0$に対して，$B_\varepsilon\in X_0\mathcal{B}$が存在して

$$Q(A-B_\varepsilon)<\varepsilon.$$

ξが確率連続でなければQは必ずしもσ-有限にならない。たとえば$(\xi_t, t\in T)$が独立な変数系ならば，QはXの非可算な部分集合の上に集中することが示されるが，このときQはσ-有限にならない。

さてξが確率連続であるとき，3°で述べたX_0にQを制限することができるのであるが，$\mathcal{B}$の元は一般にσ-有限であるから，Qは(X_0上に制限)σ-有限になる，$X_0=\bigcup_{n\geq 1}E_n$, $Q(E_n)<\infty$. また容易に分るように，$f(t,x)$を$E=E_n$, $1\leq n$, に制限したものを$f_0(t,x)$, QをEに制限したものをQ_Eとかけば

$$\lim_{t\to s} Q_E(|f_0(t,x)-f_0(s,x)|>\delta)=0$$

が成立する。それ故$f_0(t,x)$の可測変形がとれる。従って$f(t,x)$, $x\in X_0$, の可測変形がとれる。

ξが定常過程であれば，$\xi_\lambda \sim \xi_{\lambda'}$ (法則

同値), ただし $\lambda=(t_1,\cdots,t_n)$, $\lambda'=(t_1+\tau,\cdots,t_n+\tau)$. このことから $b(t)=\underset{=b}{\text{constant}}$, $Q_\lambda=Q_{\lambda'}$,

従って, $x\in X$, $x=\{f(t,x),\ t\in T\}\longrightarrow T_\tau x=\{f(t+\tau,x),\ t\in T\}\in X$ とおけば T_t は勿論 X 上の flow (measureをぬきにして) であるが, ボレル集合 $E\subset R^n-\{0\}$ に対して,

$$Q((f(t_1,x),\cdots,f(t_n,x))\in E)$$
$$=Q((f(t_1+\tau,x),\cdots,f(t_n+\tau,x))\in E).$$

また $T_\tau\mathcal{B}\subset\mathcal{B}$ であることも証明される。$Q_\lambda=Q_{\lambda'}$ から $Q(T_\tau A)=Q(A)$, $A\in\mathcal{B}$, であり, 従って T_t は測度空間 $(X,\mathcal{B},Q)$ 上の flow であり, 定常過程 ξ は $I(f(0,T_t x))+b$ と法則同値になるが, T_t on X は可測とは限らない。また T_t を X_0 に制限すると, 正確な意味で, これは flow にならない — T_t は X_0 の 1-1 変換を与えない。これは技術的な問題であるが, 別に "T_t と同型な可測な flow S_t" を適当な空間 Ω 上にとり, その上に Poisson random measureを移して $y_t(\omega)=I(g(S_t\omega))+b$ という形で ξ と法則同値な定常過程を構成できる。定常な IDP の種々の性質については別の機会に述べる。