数理解析研究所講究録
第 22 巻 1967 年 45-52

Boltzmann 及び Schrödinger 作用素の固有値問題

京大 理学部 内山 淳

次のような形の積分作用素のスペクトルを調べよう。

(1) $(Hf)(x) = V(x)\cdot f(x) + \int_{\Omega} K(x,y) f(y)\, dy \equiv (Vf)(x) + (Kf)(x)$

ここで次の仮定を置こう。

<u>仮定 1</u> $V(x)$ は実数値函数で，かつ $V(x) \in C^0(\Omega)$ である。さらに $L^2(\Omega)$ における乗法作用素 V の domain を，$\mathcal{D}(V) = \{f \in L^2(\Omega),\ V(x)f(x) \in L^2(\Omega)\}$ とする。（Ω は R^m の domain である。）

<u>仮定 2</u> $\inf_{x\in\Omega} V(x) = 0$

<u>仮定 3</u> $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(V)$ とすると，K は $L^2(\Omega)$ の対称作用素である。

<u>仮定 4</u> 集合 $\{x \in \Omega : V(x) = 0\}$ の Lebesgue measure は 0 である。

<u>仮定 5</u> $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(V)$ とするとき，H は $L^2(\Omega)$ の自己共役な作用素である。

(1) のような形の作用素で，これらの仮定をみたす作用素は，応用に際して，かなりしばしば現れる。たとえば，linearized Boltzmann operator 及び，Schrödinger 作用素を Fourier 変換して得られる作用素もこの type に属する。また いわゆる Friedrichs model もそうである。この種の作用素の連続スペクトルに関しては，Friedrichs [3] や Faddeev [2] などによって調べられているが，その離散固有値に対しては，系統的に調べたものがないように思われるので，それを少し調べよう。

次の定理は，Birman [1] によって得られたものと，類似であるが，Birman [1] は，Hermitian form を用いて述べてあるのを，我々は，作用素を使って調べよう。

定理 1

(2) $$(G_0 f)(x) = \int_{\Omega} \frac{K(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}} f(y)\,dy$$

で定義された作用素 G_0 は，$L^2(\Omega)$ の有界自己共役作用素であるならば，

(3) $S(H;-\infty,0) = S(G_0;-\infty,-1)$ である。

ただしここで，A を自己共役作用素としたとき，$S(A;a,b) = \dim\{E_A(b-0) - E_A(a)\}L^2(\Omega)$ である。

(証明) $S(G_0;-\infty,-1) = n < +\infty$ とする。すると，

$$\exists\{\varphi_i\}_{i=1,\cdots,n} \subset L^2(\Omega),\quad G_0\varphi_i = \lambda_i\varphi_i,\quad \lambda_i < -1.$$

である。ところで，$V^{\frac12}|_{\mathfrak{D}(V)}$ は essentially selfadjoint であるから $V^{\frac12} > 0$ より，$V^{\frac12}\mathfrak{D}(V)$ は $L^2(\Omega)$ で dense である。よって，

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\{f_i\}_{i=1,\cdots,n} \subset \mathfrak{D}(V),\quad \|V^{\frac12}f_i - \varphi_i\| < \varepsilon,$$

が成り立つ。すると，

$$|((G_0+I)V^{\frac12}f_i,\ V^{\frac12}f_j) - ((G_0+I)\varphi_i,\ \varphi_j)|$$
$$\leq (\|G_0\|+1)(2+\varepsilon)\varepsilon$$

を得る。いま，$f = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \in \mathfrak{D}(V)$，$\sum_{i=1}^{n}|a_i| \neq 0$ とおくと，$G_0 \supset V^{-\frac12}KV^{-\frac12}$ で $\mathfrak{D}(V^{-\frac12}KV^{-\frac12}) = V^{\frac12}\mathfrak{D}(V)$ であるから，

$$(Hf,f) = (Vf,f) + (Kf,f) = ((G_0+I)V^{\frac12}f,\ V^{\frac12}f)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\{\lambda_i + 1 + (n+1)(\|G_0\|+1)(2+\varepsilon)\varepsilon\}$$

を得る。よって，$\lambda_i + 1 + (n+1)(\|G_0\|+1)(2+\varepsilon)\varepsilon < 0$ となるように

εを十分小さくとれば，$(Hf, f) < 0$ を得る。よって $S(H; -\infty, 0) \geqq S(G_0; -\infty, -1)$ を得る。今 $S(H; -\infty, 0) > S(G_0; -\infty, -1)$ とすると，

$$\exists f_0 \in \mathfrak{D}(V),\ f_0 \neq 0,\ V^{\frac{1}{2}} f_0 \perp E_{G_0}(-1-0) L^2(\Omega),\ (Hf_0, f_0) < 0$$

を得る。ところで，

$$(Hf_0, f_0) = \| V^{\frac{1}{2}} f_0 \|^2 + \int_{-1-0}^{\|G_0\|} \lambda \, d\| E_{G_0}(\lambda) f_0 \|^2 \geqq 0$$

であるから矛盾である。よって $S(H; -\infty, 0) = S(G_0; -\infty, -1)$ が示された。$S(G_0; -\infty, -1) = \infty$ のときにも，同様にして，示すことができる。(q.e.d.)

これより，容易に次の系が成り立つことが分かる。

<u>系</u> 特に G_0 が完全連続作用素ならば，H は F に有界で，$\sigma_e(H) = \sigma_e(V)$ 且，$(-\infty, 0)$ には，H は高々有限個の discrete eigenvalue をもつのみである。

さて，次に，これを用いないで，$S(H; -\infty, 0) = +\infty$ となるための一つの十分条件を与えよう。(但し，$\sigma_e(H) \cap (-\infty, 0) = \phi$ である。) そのために，次の lemma を与えておこう。それは，容易に証明することができる。

<u>lemma</u> $\omega \subset \Omega$ とする。

(4) $$(H_\omega f)(x) = V(x) \cdot f(x) + \int_\omega K(x, y) f(y) dy \qquad (x \in \omega)$$

とし，$\mathfrak{D}(H_\omega) = \{ f(x) \in L^2(\omega);\ V(x) f(x) \in L^2(\omega) \}$ とすると，H_ω は $L^2(\omega)$ の自己共役作用素であるとする。すると

(5) $$S(H; -\infty, 0) \geqq S(H_\omega; -\infty, 0)。$$

このlemmaにより，Hの$(-\infty, 0)$におけるdiscrete eigenvalueの無限個存在することを示すためには，H_ωのそれを示せば十分である。

定理 2. ある点$x_0 \in \Omega$と，ある領域$\omega = \{x ; |x - x_0| < r_0$で，$x$は$x_0 \in \bar{\Omega}$を頂点とするある円錐に属する$\} \subset \Omega$が存在して次の条件が成り立つとする。

(6) $0 \leq V(x) \leq C|x - x_0|^\nu \quad C \geq 0, \ \nu > 0$.

(7) $K(x, y) = M(x, y) + N(x, y)$, $M(x, y) = \overline{M(y, x)}$,

$N(x, y) = \overline{N(y, x)}$ で，

$\mathrm{Re}(M(x, y)) \leq -\sum_{i=1}^{N} d_i |x - y|^{\beta_i} |x - x_0|^{\gamma_i} |y - x_0|^{\delta_i}$

$\mathrm{Re}(N(x, y)) \leq \mathrm{Const} \sum_{i=1}^{N'} |x - y|^{\beta_i'} |x - x_0|^{\gamma_i'} |y - x_0|^{\delta_i'}$

が，$|x - x_0| \leq |y - x_0|$，$x, y \in \omega$ で成り立つ。ここで

(8) $\beta_i + \gamma_i + \delta_i = \nu - m$, $\min_{1 \leq i \leq N'} (\beta_i' + \gamma_i' + \delta_i') = \nu - m + \varepsilon'$, $(\varepsilon' > 0)$

(9) $\inf_{g \in W(\tilde{\omega})} \left\{ C \int_{\tilde{\omega}} |x|^\nu |g(x)|^2 dx - 2 \sum_{i=1}^{N} d_i \iint_{\substack{\tilde{\omega}\ \tilde{\omega} \\ |x| \leq |y|}} |x - y|^{\beta_i} |x|^{\gamma_i} |y|^{\delta_i} g(x) g(y) dx dy \right\} < 0$

但し，$\tilde{\omega} = \{x : x = x' - x_0, x' \in \omega\}$ であり，また

$W(\tilde{\omega}) = \{g(x) \in L^2(\tilde{\omega}) ; \|g\|_{\tilde{\omega}} \equiv \|g\|_{L^2(\tilde{\omega})} = 1, \ g(x) \geq 0 \ \text{for} \ x \in \tilde{\omega}\}$

である。また

(10) $\min_{\mu \in \sigma_e(H_\omega)} \mu = \min_{\mu \in \sigma_e(H)} \mu = 0$,

(11) $K_\omega^{(2)}(x, y) = \int_\omega |K(x, z) K(z, y)| dz$ は $L^2(\omega)$の有界作用素のkernelで，

(12) $K_\omega^{(2)}(x, y) \leq \mathrm{Const} \sum_{i=1}^{N''} |x - y|^{\beta_i''} |x - x_0|^{\gamma_i''} |y - x_0|^{\delta_i''}$ for $|x - x_0| \leq |y - x_0|$, $x, y \in \omega$

(13) $\min_{1 \leq i \leq N''} (\beta_i'' + \gamma_i'' + \delta_i'') = \nu - m + \varepsilon''$, $(\varepsilon'' > 0)$

とする。このとき，Hは$(-\infty, 0)$に無限個のdiscrete eigenvalueをもつ。

(証明) (9)の左辺の $\{\ \}$ の中が負になるような $\tilde{g}_1(x) \in W(\tilde{\omega})$ を一つとってくる。そして、$\tilde{\omega}$ の外では0にしておく。今 $\tilde{g}_\ell(x) = \ell^{\frac{m}{2}} g_1(\ell x)$ とおき、$g_\ell(x) = \tilde{g}_\ell(x-a)$ とおくと、(6)〜(9) より

$$(H_\omega g_\ell, g_\ell)_\omega = -k_0 \ell^{-\nu} + \mathrm{const}\, \ell^{-\nu-\varepsilon'}$$ となる。$(k_0 > 0)$

よって、ℓ を十分大きくとれば、$(H_\omega g_\ell, g_\ell) < 0$ となり、H_ω は $(-\infty, 0)$ に少くとも一つ、離散固有値をもつことが分かる。今 H_ω が、$(-\infty, 0)$ に p 個の固有値 $\{\lambda_k\}_{k=1,\cdots,p}$ をもち、その正規直交固有函数を、$\{\varphi_k\}_{k=1,\cdots,p}$ とする。いま、

$$v_\ell(x) = g_\ell(x) - \sum_{k=1}^{p} \beta_\ell^{(k)} \varphi_k(x), \quad \beta_\ell^{(k)} = (g_\ell, \varphi_k)$$

とおくと、$(v_\ell, \varphi_k)_\omega = 0 \quad (k = 1, \cdots, p)$ である。ところで、

$$|\lambda_k \beta_\ell^{(k)}| = |(g_\ell, H_\omega \varphi_k)_\omega| = |(H_\omega g_\ell, \varphi_k)| \leq |(V g_\ell, \varphi_k)_\omega| + |(K g_\ell, \varphi_k)_\omega|$$

であるから、(11)〜(13) より、

$$|\beta_\ell^{(k)}|^2 \leq \mathrm{const}\, \|V g_\ell\|_\omega^2 + \mathrm{const}\, \|K g_\ell\|^2 \leq \mathrm{const}\, \ell^{-2\nu} + \mathrm{const}\, \ell^{-\nu-\varepsilon''}$$

を得る。よって、

$$(H_\omega v_\ell, v_\ell)_\omega = (H_\omega g_\ell, g_\ell)_\omega - \sum_{k=1}^{p} \lambda_k |\beta_\ell^{(k)}|^2 \leq -k_0 \ell^{-\nu} + \mathrm{const}(\ell^{-2\nu} + \ell^{-\nu-\varepsilon'} + \ell^{-\nu-\varepsilon''})$$

となり、ℓ を十分大とすると、$(H_\omega v_\ell, v_\ell)_\omega < 0$ となるから、(10)より、少くとも $(p+1)$ 個は、離散固有値が $(-\infty, 0)$ に存在することがわかる。よって帰納法により、無限個存在することがわかった。 (q.e.d.)

さて、これらの application を考えよう。まず mono-atomic gas model に対する Boltzmann 方程式に関連した、固有値問題は、次の如くなる。

<u>Example 1</u> $\quad V(x) = 6\left[\left(x + \frac{1}{2Mx}\right) I(\sqrt{M}\, x) + \frac{1}{\sqrt{\pi M}} e^{-Mx^2}\right].$

$$K(x,y) = -b\theta^2 \Big\{ e^{-\frac{1}{2}(y^2-x^2)} \{ I(\theta x - \zeta y) \pm I(\theta x + \zeta y) \} + e^{\frac{1}{2}(y^2-x^2)} \{ I(\theta y - \zeta x) \mp I(\theta y + \zeta x) \} \Big\} \quad (y \lessgtr x)$$

ここで

$$I(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \theta = \frac{M+1}{2\sqrt{M}}, \quad \zeta = \frac{M-1}{2\sqrt{M}}, \quad b > 0, \quad M > 0$$

である。すると，

(i) H はその domain を $\mathcal{D}(H) = \{ \varphi : (1+x)\varphi \in L^2(0,\infty) \}$ とするとき，$L^2(0,\infty)$ の自己共役作用素で，

(ii) $\sigma_e(H) = [\mu, \infty)$，$\left(\mu = V(+0) = \frac{2b}{\sqrt{\pi M}} > 0\right)$ であり，

(iii) $(-\infty, \mu)$ には，無限個の離散固有値を H はもつ。

実際 (i), (ii) は容易に示すことができ，(iii) は，

$$V(x) = \mu + c x^2 + O(x^4), \quad 0 < x < 1, \quad c = \frac{2}{3} b \sqrt{\frac{M}{\pi}},$$

$$K(x,y) = K(y,x) = -\alpha x + O(x(x^2+y^2)), \quad 1 \geq y \geq x > 0,$$

$$\alpha = \frac{4\theta^2}{\sqrt{\pi}} b (\theta - \zeta) = \frac{(M+1)^2}{M^{\frac{3}{2}}\sqrt{\pi}} b$$

が成り立つことより，定理2において，$\check{V} = V - \mu I$ と K は，$x_0 = 0$，$\omega = (0,1) \subset \Omega = (0,\infty) \subset R^1$，$\nu = 2$，$\beta_i = \beta_i' = \beta_i'' = \delta_i = 0$，$\gamma_i = 1$，で条件をみたすことより得られる。Kuščer - Corngold [4] および Ukai [5] は上記の結果を示したが，我々のそれが数学的には，厳密なように思われる。

<u>Example 2</u>　$(L_0 f)(x) = \sum_{k=1}^{3} \left(i \frac{\partial}{\partial x_k} + b_k(x) \right)^2 f(x) + q_0(x) f(x)$

とする。ここで，$b_k(x) \in B^1(R^3)$，$q_0(x) \in L^2_{loc}(R^3)$ は実数値函数で，$b_k(x)$，$\frac{\partial}{\partial x_k} b_k(x)$，$q_0(x)$ は $|x| \to \infty$ のとき，一様に 0 に近づくとする。

このとき，

(i) $\mathfrak{D}(L_0) = \mathfrak{D}_{\Delta}(R^3)$ とすると，L_0 は $L^2(R^3)$ の自己共役作用素である。

(ii) $\sigma_c(L_0) = [0, \infty)$,

(iii)(a) ある $\alpha > 0$ に対して，$\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_k^2(x) + \frac{1}{1+\alpha} q_0(x) \leq -\frac{c}{|x|^2}$ が $|x| \geq R_0$

で成り立つならば，L_0 は $(-\infty, 0)$ に無限個の discrete eigenvalue をもつ，

但し $\quad C > \inf_{g \in W(\omega)} 4\pi \int_{\omega} |x|^2 |g(x)|^2 dx \left[\iint_{\omega\,\omega} \frac{g(x)g(y)}{|x-y|} dx\,dy\right]^{-1}$, $\omega = \{x \in R^3 : |x| < 1\}$

である，

(b) ある $1 > \alpha > 0$ に対して $|x| \geq R_0$ で $\frac{1}{1-\alpha} q_0(x) - \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_k^2(x) \geq -\frac{\text{const}}{|x|^{2+\varepsilon}}$

ならば，L_0 は $(-\infty, 0)$ に高々有限個の discrete eigenvalue をもつ。 により得られる。

実際 (i), (ii) はよく知られており，(iii) は定理 1, 2 を応用すること

実際
$$q_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_k^2(x) + \frac{1}{1+\alpha} q_0(x) & : |x| \leq R_0 \\ -\frac{c}{|x|^2} & : |x| > R_0 \end{cases} \qquad L_1 = -\Delta + q_1(x)$$

$$q_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} q_0(x) - \frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{3} b_k^2(x) & : |x| \leq R_0 \\ -\frac{\text{const}}{|x|^{2+\varepsilon}} & : |x| > R_0 \end{cases} \qquad L_2 = -\Delta + q_2(x)$$

とおくと．$\quad L_0 \leq (1+\alpha) L_1, \quad L_0 \geq (1-\alpha) L_2$，である。ところで．

$$(H_1 \hat{f})(\xi) = \mathfrak{F}(L_1 f)(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \cdot \hat{f}(\xi) + \int_{R^3} \hat{q}_1(\xi - \eta) \hat{f}(\eta) d\eta.$$

$$(H_2 \hat{f})(\xi) = \mathfrak{F}(L_2 f)(\xi) = 4\pi^2 |\xi|^2 \cdot \hat{f}(\xi) + \int_{R^3} \hat{q}_2(\xi - \eta) \hat{f}(\eta) d\eta$$

である。ここで，$|\xi - \eta| \leq 2$ に対して．

$$\hat{q}_1(\xi - \eta) = -\frac{c\pi}{|\xi - \eta|} + O(1), \quad |\hat{q}_2(\xi - \eta)| \leq \frac{\text{const}}{|\xi - \eta|^{1-\varepsilon}}$$

を得るから，H_1 に対しては定理 2 において，$\nu = 2$, $\beta_i = -1$, $\delta_i = \delta_i' = 0$ とおいて，条件がみたされており，H_2 に対しては，G_0 が Hilbert - Schmidt 型になることが分かる。よって，求める結果が得られた。

Example 3. $(Hf)(x) = x\cdot f(x) + \int_0^\infty K(x,y)f(y)dy$ で.
$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, $|K(x,y)| \leq \text{const}\ (1+x+y)^{-\theta}\ (\theta > \frac{1}{2})$, $|K(x,y)| \leq \text{const}\ |y|^{\mu}\ (\mu > 0)\ \ (0 \leq x, y \leq 1)$

に対しては. $\sigma_e(H) = [0, \infty)$ で. $(-\infty, 0)$ には. H は高々有限個の離散固有値しかもたない。実際, 定理1の G_0 はこの場合, Hilbert-Schmidt になる。(これは Faddeev [2] の Friedrichs model である。)

Example 4. $(Hf)(x) = |x|^2 f(x) + \int_{R^n} K(x,y)f(y)dy\ \ (n \geq 3)$ で,
$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, $|K(x,y)| \leq \text{const}\ (1+|x-y|)^{-n-\varepsilon}\ (\varepsilon > 0)$ に対しては $\sigma_e(H) = [0, \infty)$ で, $(-\infty, 0)$ には高々有限個の discrete eigenvalue しかもたない。実際 G_0 は. Hilbert-Schmidt になるとは限らないが, 完全連続作用素になることを示すことができるからである。(これは. Ushijima [6] が研究した model であるが, 彼は $\sigma_e(H) \cap (-\infty, 0) = \phi$ しか示していない。)

References :

[1] Birman, M. Š ; Mat. Sb. 55 (97) (1961), 125–174.

[2] Faddeev, L. D. ; Trudy. Inst. in. V. A. Steklova, 73 (1964) 292–313.

[3] Friedrichs, K. O. ; Math. Ann. 115 (1938), 249–272.

[4] Kuščer-Corngold : Phys. Rev. 139 (1965), 981–990.

[5] Ukai, S. ; Jour. Nucl. Energy. 19 (1965) 833–848.

[6] Ushijima, T : Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 16, (1966) 127–133)