

Sobolev空間の埋蔵定理の証明について

村松寿延 (京大 数理解析研)

0: 序

次の定理の簡単な証明を得たので報告する

埋蔵定理 $1 < p \leq \infty, m, k \geq 0, l - \frac{n}{p} + \frac{m}{q} - k \geq 0$ のとき次の附

加条件の下で 埋蔵作用素

$$W^{l,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,q,n-m}(\Omega)$$

が存在する。すなわち, $C^\infty(\Omega)$ の $W^{l,p}$ 上での埋蔵作用素に等しい連続作用素が存在する。

Ω に関する条件: Ω は n 次元空間 \mathbb{R}^n の領域であって, 円錐条件 を満たす。すなわち, Ω の各点 x に対してベクトル $\Psi(x)$ を次のように定めることができる:

- (a) $x \in \Omega, 0 \leq t \leq T_0, z \in Q \Rightarrow x + tz + t\Psi(x) \in \Omega$
- (b) Ψ は Ω 上で有界であって, Ω 上で一様に Lipschitz 連続である。

ただし, T_0 は x に独立な定数 Q は厚みを中心とする立方体。

指数に関する条件:

- (i) $p < \infty, m > 0$ または (ii) $m = 0, k \neq \text{整数}$ または (iii) $l - \frac{n}{p} + \frac{m}{q} - k > 0$

注意 $p = \infty \leq 2, n > m > 0, l - \frac{n-m}{p} - k = 0$ の場合および, $p = \infty > 2, m > 0, l - \frac{n-m}{p} - k = 0, k \neq \text{整数}$ の場合にも定理は正しい。 $p = \infty > 2, n > m > 0, l - \frac{n-m}{p} - k = 0, k = \text{整数}$ の場合には定理は成立しない([14])。

$W^{l,p,n-m}$ の定義を述べる。まず Ω 上の函数 f について,

$$\|f\|_{L^{p,n-m}(\Omega)} = \sup_{x'' \in \mathbb{R}^{n-m}} \|f(x', x'')\|_{L^p(\Omega(x''))}, \quad \text{ただし, } \Omega(x'') = \{x' \mid (x', x'') \in \Omega\}$$

(n 次元空間に x'' と Ω)

である。 $f \in C^\infty(\Omega)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対して, $f^{(\alpha)}$ を f の α 階導数
 数と示し, l が整数 n のとき,

$$\|f\|_{L^p, p, n-m, \Omega} = \sum_{|\alpha|=l} \|f^{(\alpha)}\|_{L^p, n-m, \Omega}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

と定め, $l = [l] - 1$, $0 < m < l$ のときは,

$$\|f\|_{L^p, p, n-m, \Omega} = \sum_{|\alpha|=[l]} \left\| \frac{f^{(\alpha)}(x) - f^{(\alpha)}(y)}{|x-y|^{\frac{m}{p} + \alpha}} \right\|_{L^p, 2n-2m}(\Omega \times \Omega),$$

と定義する。

$C^\infty(\Omega)$ に従い, $\|f\|_{0, p, n-m, \Omega} + \|f\|_{l, p, n-m, \Omega} < \infty$ となる f の全体 W
 のノルムで完備化した空間を $W^{l, p, n-m}(\Omega)$ と定義する。特に, $L^p = W^{0, p, n}$
 であり, $W^{l, p, 0} \in W^{l, p}$ とかく。また $W^{l, p, n}$ のノルムは p に無関係で
 あるから $\mathcal{B}^l(\Omega)$ とかく。たとえば $\mathcal{B}^2(\Omega)$ のノルムは

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sum_{|\alpha|=2} \sup_{x \in \Omega} |f^{(\alpha)}(x)|$$

である。

Sobolev [10] が最初に $l = \text{整数}$, $k=0$, $\frac{m-n}{p} > p > 1$ の場合に \rightarrow いて埋
 蔵定理を示した (1938)。Sobolev の表示とよばれている, potential 型
 の積分表示を用いた。さらに Sobolev は $l, n = \text{整数}$, m 一般の場合も証
 明した [11]。ただし Ω は有界, $l - \frac{n}{p} + \frac{m}{p} - k > 0$ の場合である。(1950)。

Gagliardo [2], (1958), と Nirenberg [6], (1959) は互に独立に, Sobolev
 とほぼ同様な方法で, 一般の埋蔵定理を証明している。ただし, l, k が分
 数の場合は, 定理が成立すると言っているだけで, 証明はない。これより
 前 Nicolas du Plessis [8], (1955) は $l = \text{整数}$, $m=0$, $k \neq \text{整数}$ の場合 (すな

わさ (3.2, 埋蔵) および $l, k = \text{整}$, $l - \frac{1}{p} + \frac{n}{q} - k = 0$, $m = n$, $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合を証明している。

し、 k が整数の場合について、 $p = 2$ の場合は Sobolevskii [9] が扱っている、一般の場合を Besov [1] (1959), Uspenskii [12], [13] (1960) が結果を報告している。証明はない。

し、 k が整数でない場合を扱う一つの方法は "空間の interpolation" であるが、Lions [5] (1961) の証明ではすべての場合を cover しない。最近、Peetre [7] (1966) はこの方法に基づいてこの場合を cover する証明を与えている。

以下において、われわれは Sobolev の表示と本質的には同じであるが見かけ上異なる積分表示を用いて証明する。積分表示の形が有効に働いて計算の見通しをよくなり、 l, k が分数の場合を含めて、簡単な証明が得られるのである。

1. 積分表示と定理の証明.

立方体 Q 上に $\varphi(z)$ を $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ に属し、 $\int \varphi(z) dz = 1$ とする函数 φ を一つ定めおく。 $f \in C^m(\Omega)$, l を整数とする。 $x \in \Omega$ を固定し、函数

$$f(x + tz + t\Psi(x)), \quad 0 \leq t \leq T_0, \quad z \in Q$$

を考える。 t について T_0 で展開し、 $t=0$ とおき、 $\varphi(z)$ を乗じて、 z で積分すると、

$$f(x) = \sum_{|\alpha|=l} \int_0^T t^{l-1} dt \int \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (z + \Psi(x))^\alpha f^{(\alpha)}(x + tz + t\Psi(x)) dz \\ + \sum_{|\alpha| < l} T^{|\alpha|} \int \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} (z + \Psi(x))^\alpha f^{(\alpha)}(x + Tz + T\Psi(x)) \varphi(z) dz \quad (1)$$

をこう。 ただし、 $0 < T \leq T_0$ とし、 $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$ と表わす。

$$T^{|\alpha|} f^{(\alpha)}(x+Tz+T\Psi(x)) = D_z^\alpha f(x+Tz+T\Psi(x))$$

であるから、第2項で z についての部分積分を行うと、第2項は

$$\sum_{|\alpha| \leq l} \int \varphi_\alpha(z) (z+\Psi(x))^\alpha f(x+Tz+T\Psi(x)) dz$$

の形になる。 $|\alpha|+1$ についての公式(1)を用いて、第1項において、たとえば

$\alpha_j \neq 0$ のとき、 $\beta = (\alpha_1, \dots, \alpha_j-1, \dots, \alpha_n)$ とおくと

$$t f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x)) = \frac{\partial}{\partial z_j} (t f^{(\beta)}(x+tz+t\Psi(x)))$$

であることに注意して部分積分を行うと、

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_0^T t^{|\alpha|-1} dt \int \varphi_\alpha(x, z) f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x)) dz$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leq l} \int \varphi_\alpha(z) (z+\Psi(x))^\alpha f(x+Tz+T\Psi(x)) dz \quad \dots (2)$$

である。ただし、

$$\varphi_\alpha(x, z) = \frac{(-1)^{|\alpha|+1}}{\alpha!} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \left((z+\Psi_j(x)) (z+\Psi(x))^\alpha \varphi(z) \right)$$

である。大切なのは

$$\int \varphi_\alpha(x, z) dz = 0$$

であるから、

$$\begin{aligned} & \int \varphi_\alpha(x, z) f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x)) dz \\ &= \iint \varphi_\alpha(x, z) \varphi(w) \left(f^{(\alpha)}(x+tz+t\Psi(x)) - f^{(\alpha)}(x+tw+t\Psi(x)) \right) dz dw \end{aligned} \quad \dots (3)$$

が成立することである。

$|\alpha| \leq l$ のとき、 $f^{(\beta)}(x)$ に公式(2)を適用して、さらに第2項の部分積分

分る行くと,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{\substack{\alpha \geq 3 \\ |\alpha| = l}} \int_0^T t^{l-|\alpha|-1} dt \int \varphi_{x_0}(x, z) f^{(\alpha)}(x + tz + t\psi(x)) dz \\ + T^{-|\alpha|} \int \psi_n(x, z) f(x + Tz + T\psi(x)) dz \quad \dots (4)$$

さうする。ここに φ_n は z と $\psi(z)$ の等変数の多項式を係数とする $\psi(x)$ の多項式であって、 z と Q では恒等的に 0 となる。

この表示に関連して次の補題を示せば、埋蔵定理が証明される。

補題 1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^{n+m}$ を領域とする。さらに $\tilde{\Omega}$ は \tilde{Q} , $\tilde{\psi}(x)$

に関して、前記の意味の内錐条件を満たしているとする。更に Ω から $\tilde{\Omega}$

への写像 $\tilde{\psi}$ は Ω で 一様に Lipschitz 連続 である。また、 $\tilde{\psi}(x) = (x, \psi_0(x))$ が成立するとする。 $K(x, \tilde{z})$ は

$\Omega \times \tilde{\Omega}$ で定義され、 $\Omega \times \tilde{\Omega}$ で 一様に Lipschitz 連続 であり、台は $\Omega \times \tilde{Q}$

に含まれ、有界であるとする。このとき $f \in L^p(\tilde{\Omega})$ に対して、

$$F(x) = \int_0^T \eta(t) dt \int f(\tilde{\psi}(x) + t\tilde{z} + t\tilde{\psi}(\tilde{\psi}(x))) K(x, \tilde{z}) d\tilde{z}$$

を定義する。 $|\eta(t)| \leq t^{l-1}$ ($l > 0$), $0 \leq k < 1$, $1 < p \leq q < \infty$

$\lambda = l - k - \frac{n+m}{p} + \frac{m}{q} \geq 0$ とする。さらに、

(i) $\lambda > 0$

または (ii) $\lambda \geq 0$, $p < q$, $m > 0$

または (iii) $\lambda \geq 0$, $m = 0$, $k > 0$

であれば、

$$\|F\|_{k, q, n-m(\Omega)} \leq C T^\lambda \|f\|_{p, q(\tilde{\Omega})} \quad \dots (5)$$

が成立する。ここに C は f, T に独立な定数である。

本. 補題の条件の下で, $t > 0$ に対して,

$$\left| \int_{\Omega} f(\alpha(x) + t\tilde{z} + t\tilde{z}(\omega)) dx \right|_{R, \beta, n-m, \Omega} \leq C t^{-k - \frac{n+s}{p} + \frac{m}{2}} \|f\|_{L^p(\tilde{\Omega})} \quad (6)$$

が成立する.

埋蔵定理の証明. 次の不等式を示せばよいことは明らかである. すなわ

ち,

$$\|f\|_{R, \beta, n-m, \Omega} \leq C \|f\|_{W^{l,p}(\Omega)}, \quad (\forall f \in C^\infty(\Omega) \cap W^{l,p}).$$

l が正の整数の場合. $|\beta| = [l]$ なる β について, 積分表示(4)を用い, その右辺の各項に補題1を乗せ, $\tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}$, $\alpha(x) = x$, $s = 0$ とし直
すれば

$$\|f^{(l)}\|_{R-[l], \beta, n-m, \Omega} \leq C \|f\|_{W^{l,p}(\Omega)}$$

を得る.

l が分数の場合には 積分表示(4)の第1項を公式(3)のように変形
して, $\Omega \rightarrow \tilde{\Omega} = \Omega \times \Omega$, $\alpha(x) = (x, x)$, $s = n$ とし補題1を使
う. ただし, $K(x, \tilde{z})$ は

$$K(x, z, w) = \varphi_n(x, z) \varphi(w) |z-w|^{\frac{n}{p} + l - [l]}$$

とし, f は

$$\tilde{f}(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{|x-y|^{\frac{n}{p} + l - [l]}}$$

になる.

2. 補題1の証明.

補題1の証明を行う. まず $k=0$ の場合は次の補題に帰着する.

補題2. 補題1の条件の下で, $f \in L^p(\bar{\Omega})$ に對して,

$$(A) \quad \varphi(t, x) = \int_{\bar{\Omega}} |f(\bar{z}(x) + t\tilde{z}) + t\tilde{\Psi}(\bar{z}(x))| d\tilde{z}$$

と置く, $t > 0$ のとき,

$$\|\varphi(t, x)\|_{L^{p, n-m}(\Omega)} \leq C t^{-\frac{n+s}{p} + \frac{m}{q}} \|f\|_{L^p(\bar{\Omega})}, \quad \dots (7)$$

(B)

$$\left\| \int_0^T t^{\lambda-1} \varphi(t, x) dx \right\|_{L^{p, n-m}(\Omega)} \leq C T^\lambda \|f\|_{L^p(\bar{\Omega})}, \quad \dots (8)$$

ただし, $\lambda = k - \frac{n+s}{p} + \frac{m}{q} \geq 0$ とし, λ に

(i) $\lambda > 0$ または (ii) $\lambda \geq 0, p < q, m > 0$
を仮定する.

証明. $f \in \Omega$ の外で零として延長しておく. $|\tilde{z}_j + \tilde{\Psi}_j(\bar{z}(x))| \leq M_1 < \infty$
であるから

$$\varphi(t, x) = \int_{\bar{\Omega}} |f(\bar{z}(x) + t\tilde{z})| d\tilde{z}$$

と置く. ただし $\bar{\Omega}$ の一边は M_1 である. $\bar{\Omega} = \Omega \times Q^*, \Omega \subset \mathbb{R}^n, Q^* \subset \mathbb{R}^{n+s-m}, \tilde{z} = (z, w), \bar{z}(z) = (z, \bar{z}^*(z))$ とおくと, Hölder の不等式により,

$$\int_{Q^*} |f(x + tz, \bar{z}^*(z) + tw)| dw \leq C t^{-\frac{n+s-m}{p}} g(x + tz)$$

である. ただし, $g(x) = \left(\int_{\bar{\Omega}(x)} |f(x, y)|^p dy \right)^{1/p}$ である.

特に $m=0$ ならば $\varphi(t, x) \leq C t^{-\frac{n+s}{p}} \|f\|_{L^p}$ とし (7) が得られることになる. $m > 0$ のときは, 上の計算により, Jensen の不等式を使い,

$$\varphi(t, x) \leq (t^{\frac{n+s}{p}})^{-1} \int_{\Omega} g(x + tz) dz$$

結局、結局 $S=0$, $m=n$, $\chi(z)=x$ の場合に帰着される。

(A) の証明. Hölder の不等式により

$$\varphi(t, x) \leq C_1 t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p}$$

よって

$$\int \varphi(t, x)^p dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \int_Q |f(x+tz)|^p dz dx = C_2 \|f\|_{L^p}^p$$

逆に $q \geq p$ のとき,

$$\begin{aligned} \left(\int \varphi(t, x)^q dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\sup \varphi(t, x) \right)^{\frac{q-p}{q}} \cdot \left(\int \varphi(t, x)^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_1 t^{-\frac{n}{p} + \frac{n}{q}} \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

(B) の証明.

$\lambda = \lambda - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$ のときは, (A) により明白.

$\lambda = \lambda - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0$, $p < q < \infty$ とする. x_1 を固定し, $x = (x_1, x')$ とする. 変数 x', z' について, (A) の結果を用い, Jensen の不等式に代入すると, $g(x_1 + tz_1) = \|f(x_1 + tz_1, x')\|_{L^q(\Omega(x_1 + tz_1))}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \left(\int \varphi(t, x)^q dx' \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \int_{|z_1| \leq M_1} dz_1 \left[\int_{Q'} \left\{ \int |f(x, z)| dz' \right\}^q dx' \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C_2 t^{-\left(\frac{n-1}{p} - \frac{n-1}{q}\right)} \int_{|z_1| \leq M_1} g(x_1 + tz_1) dz_1 \end{aligned}$$

である. したがって, $n=1$, $\mu = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ のとき,

$$\left\| \int_0^\infty t^{\mu-1} dt \int_{|z| \leq M_1} |f(x+tz)| dz \right\|_{L^q} \leq C \|f\|_{L^p} \quad (9)$$

が成立することを「えいえい」. 任意の $f \in L^p$ ($q' = \frac{q}{q-1}$) について,

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1} dt \int_{|z| \leq M_1} |f(x+tz)| |g(z)| dx dz \quad (x+tz=y \text{ と変換})$$

$$= C_2 \iint \frac{|f(y)| |g(x)|}{|x-y|^{1-\alpha}} dx dy \leq C \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$$

([4] p. 288)

であるから (9) が示された。 証明終り。

補題 1 の証明 $m > 0, 1 > \alpha > 0$ の場合。

$$\psi(t, x) = \int K(x, \tilde{z}) f(\tilde{z}(x) + t\tilde{z} + t\tilde{\Psi}(\tilde{z}(x))) d\tilde{z}$$

とおく。

変数変換により,

$$\psi(t, y) = \int K(y, \tilde{z} + t^{-1}(\tilde{z}(x) - \tilde{z}(y)) + \tilde{\Psi}(\tilde{z}(x)) - \tilde{\Psi}(\tilde{z}(y))) \cdot f(\tilde{z}(x) + t\tilde{z} + t\tilde{\Psi}(\tilde{z}(x))) d\tilde{z}$$

となること, および, $K, \tilde{z}, \tilde{\Psi}$ が Lipschitz 連続であるから,

$$|K(x, \tilde{z}) - K(y, \tilde{z} + \frac{\tilde{z}(x) - \tilde{z}(y)}{t} + \tilde{\Psi}(\tilde{z}(x)) - \tilde{\Psi}(\tilde{z}(y)))| \leq C_1 \chi\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \quad (10)$$

$$\chi(s) = \min(1, s^{k+\epsilon}), \quad 0 < \epsilon \leq 1-\alpha, \frac{m}{2}$$

であることにより,

$$|\psi(t, x) - \psi(t, y)| \leq C_1 \chi\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \int |f(\tilde{z}(x) + t\tilde{z} + t\tilde{\Psi}(\tilde{z}(x)))| d\tilde{z}$$

を得る。ただし, 右辺の積分範囲は $Q \cup (Q + t^{-1}(\tilde{z}(y) - \tilde{z}(x)) + \tilde{\Psi}(\tilde{z}(y)) - \tilde{\Psi}(\tilde{z}(x)))$

である。第 2 の範囲: $z \rightarrow z + t^{-1}(\tilde{z}(y) - \tilde{z}(x)) + \tilde{\Psi}(\tilde{z}(y)) - \tilde{\Psi}(\tilde{z}(x))$ と変換

すれば, 右辺の積分は $\varphi(t, x) + \varphi(t, y)$ に等しい。ただし,

$$\varphi(t, x) = \int_Q |f(\tilde{z}(x) + t\tilde{z} + t\tilde{\Psi}(\tilde{z}(x)))| d\tilde{z}$$

と可変。ゆえに,

$$|F(x) - F(y)| \leq C_1 \int_0^T t^{k-1} \chi\left(\frac{|x-y|}{t}\right) \{\varphi(t, x) + \varphi(t, y)\} dt \quad (11)$$

となる。

$x, y \in \mathbb{R}^{n-m}$ を固定し、 $x = (x', x'')$, $y = (y', y'')$ とおくと、

$$\| |x-y|^{-\left(\frac{m}{\delta}+k\right)} \chi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \|_{L^p(\Omega(y''))} \leq C_2 t^{-k}$$

よって、

$$G(x, y) = \int_0^T t^{l-1} \chi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \varphi(t, x) dt$$

よって、

$$\| |x-y|^{-\frac{m}{\delta}-k} G(x, y) \|_{L^p(\Omega(y''))} \leq C_2 \int_0^T t^{l-k-1} \varphi(t, x) dt$$

よって、この右辺に補題 2 を適用して、

$$\| (x-y)^{-\frac{m}{\delta}-k} G(x, y) \|_{L^p(\Omega(x'') \times \Omega(y''))} \leq C T^\lambda \|f\|_{L^p(\tilde{\Omega})}$$

(1) により結論をうす。

$0 < k < 1$, $m=0$ の場合。 $\lambda=0$ としよ。不等式(10)におい $\varepsilon+k$ を 1 に置き、上の場合と同様にして、

$$|F(x) - F(y)| \leq C_1 (G(x, y) + G(y, x))$$

よって、補題 2.(A) により

$$\varphi(t, x) \leq C_2 t^{-\frac{n+s}{p}} \|f\|_{L^p}$$

よって、

$$\begin{aligned} |G(x, y)| &\leq C_2 \int_0^\infty t^{l-1} \chi\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) t^{-\frac{n+s}{p}} dt \cdot \|f\|_{L^p} \\ &\leq C |x-y|^k \|f\|_{L^p} \quad (\because l - \frac{n+s}{p} = k) \end{aligned}$$

証明終り。

文献

- [1] Besov, O. V. D.A.N. 126, No. 6 (1959), 1163-1165
- [2] Gagliardo, E. Ricerche di Mat. 7 (1958), 102-137

- [3] Gagliardo, E. Rend. Sem. Math. Univ. di Padova 7 (1957) 284-305.
- [4] Hardy, Littlewood & Polya: Inequalities. 1934.
- [5] Lions; Magnes. Ann. S. Norm. S. Pisa 15 (1961) 39-101
- [6] Nirenberg, L. Ann. S. Norm. Sup. Pisa 13 (1959) 115-161.
- [7] Peetre, J. Ann. Inst. Fourier Grenoble. 16 (1966) 279-317.
- [8] du Plessis, N. Trans. Amer. Math. S. 80 (1955) 124-134
- [9] Slobodetskii, L. I. D. A. N. 118 No. 2 (1958) 243-246
- [10] Sobolev, S. L. Mat. Sb. 4 (46), 3 (1938) 471-497
- [11] Sobolev, S. L. Some applications of functional analysis to mathematical physics (1950)
- [12] Uspenskii, S. V. D. A. N. 132 No. 5 (1960) 992-993
- [13] Uspenskii, S. V. D. A. N. 132 No. 1 (1960) 60-62.
- [14] Nikol'skii, S. M. Usp. Mat. N. 16 (1961) No. 5 63-114.