数理解析研究所講究録
第23巻 1967年 39-55

Hopf 方程式の直交関数展開による解法

東大 宇宙研 桑原 真二

I. 統計流体力学の基礎方程式

§1. はじめに

こゝでは縮まない粘性流体の乱流の問題，したがつて連続の方程式と Navier-Stokes の方程式によつて記述される力学系に話を限るものとする。

流体力学と統計流体力学との違いは，前者が一つの力学系を追跡するのに対し，後者は無限に多くの同じ力学系の集り（Gibbs 集合）の分布状態をしらべることにある。そのようなとりあつかいをするために，位相空間を導入する。

§2. 位相空間

位相空間として，我々は Hopf にしたがつて，$u(x)$-関数空間，あるいは $v(k)$-関数空間をとる。こゝで $u(x)$ は三次元速度ベクトルであり，$v(k)$ はそれの波数空間 k への Fourier 変換である。流体の運動は速度と圧力 p（こゝでは圧力／密度とする）あるいはそれらの Fourier 変換 $dv(k)$, $dq(k)$：

$$\left.\begin{aligned} u_\alpha(x) &= \int e^{ikx}\, dv_\alpha(k) = \int e^{ikx}\, v_\alpha(k)\, dk \\ p(x) &= \int e^{ikx}\, dq(k) = \int e^{ikx}\, q(k)\, dk \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{aligned} dv_\alpha(k) &= v_\alpha(k)\, dk = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\, u_\alpha(x) \prod_{\gamma=1}^{3} \frac{e^{-idk_\gamma x_\gamma} - 1}{-ix_\gamma} \\ dq(k) &= q(k)\, dk = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\, p(x) \prod_{\gamma=1}^{3} \frac{e^{-idk_\gamma x_\gamma} - 1}{-ix_\gamma} \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

によって記述される。 $u(x)$, $p(x)$ は一般に絶対値可積分でないから，Fourier 変換ができない。 $\int dv_\alpha(k)$, $\int dq(k)$ は Stieltjes 積分の意味である[1]。 あきらかに $v(k)$ は

$$v_\alpha(-k) = v_\alpha(k)^* \tag{2.3}$$

の性質をもつ。

一つの力学系の運動は，位相空間の一点の運動に対応する。 このような位相運動（phase motion）を T^τ で表わす。 すなわち

$$T^\tau u(x, t_0) = u(x, t_0 + \tau) \tag{2.4}$$

あきらかに T^τ は

$$T^\tau T^s = T^{\tau+s} = T^{s+\tau} \tag{2.5}$$

を満たす。

位相運動は Navier-Stokes の方程式と連続の方程式によって表わされる。

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = -u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\beta}, \qquad \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} = -i\int k_\beta\, v_\beta(k - k')\, v_\alpha(k')\, dk' - ik_\alpha q - \nu k^2 v_\alpha, \qquad k_\alpha v_\alpha = 0 \tag{2.7}$$

ここで ν は動粘性率，そして summation convention が使われている。 我々は以下 u, v を二種の意味に使う。 すなわち，第一に一つの力学系の運動を表わす位相量として，第二に位相空間座標として用いる。

これらは、流体力学における Lagrange の見方と Euler の見方に対応するもので、混同をおこすおそれはないので同一の文字を用いる。

§3. 分布汎関数と特性汎関数

統計力学における N体分布関数に対応するものとして、統計流体力学では $u(x)$-空間、あるいは $v(t)$-空間に基礎をおく分布汎関数 $P[\delta u(x)]$, $P[\delta v(t)]$ を導入する。P は正の実数で

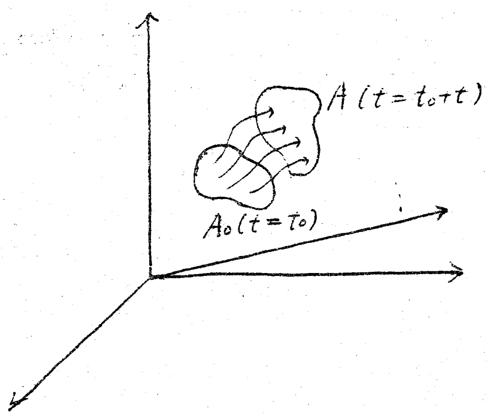
$$\left.\begin{aligned} \int P[\delta u] &= 1 \\ \int_{A_0} P[\delta u] &= \int_A P[\delta u] \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

$$\left.\begin{aligned} \int P[\delta v] &= 1 \\ \int_{A_0} P[\delta v] &= \int_A P[\delta v] \end{aligned}\right\} \qquad (3.1')$$

の性質をもっている。ここで Ω は全位相空間であり、A_0, A はその部分空間で

$$T^t A_0 = A$$

である。P は $u(x)$ あるいは $v(t)$ の汎関数、t の関数である。



第1図 $u(x)$-空間

我々は簡単のため

$$P[\delta u] = P[u]\,\delta u \;, \qquad P[\delta v] = P[u]\,\delta u \qquad (3.2)$$

のように書く。

$F = F(u)$ が位相関数であるとき

$$\overline{F} = \int_\Omega F(u)\,P[u]\,\delta u \qquad (3.3)$$

で統計平均（ensemble mean）を定義する。我々は"実験で測定される平均量（物理量の小時間平均）は近似的に統計平均とみなしうる"と仮定する。

$u(x)$ に対し dual な実関数 $y(x)$, $v(k)$ に対し複素関数 $z(k)$ を導入する：

$$y(x)=\int z(k)e^{ikx}dk, \qquad z(k)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int y(x)e^{-ikx}dx \tag{3.4}$$

但し $y(x)$ したがって $z(k)$ は $|x|$ あるいは $|k|$ が十分大きいとき、十分はやく 0 になるものとする。定義により

$$z(-k)=z(k)^* \tag{3.5}$$

である。

特性汎関数 $\Phi[y(x)]$, $\Phi[z(k)]$ は P の一種の Fourier 変換であり、

$$\left.\begin{aligned}\Phi[y,t]&=\overline{e^{i(y,u)}}=\int e^{i(y,u)}P[u]\delta u\\ \Phi[z,t]&=\overline{e^{i(z,v)}}=\int e^{i(z,v)}P[v]\delta v\end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

によって定義される。ここで

$$(y,u)=\int y_\alpha(x)u_\alpha(x)dx, \qquad (z,v)=\int z_\alpha(k)v_\alpha(k)^*dk \tag{3.7}$$

はスカラー積である。したがって

$$(y,u)=(2\pi)^3(z,v) \qquad (z,v)^*=(z,v) \tag{3.8}$$

である。

$$\left.\begin{aligned}&\Phi[0]=0\\ &|\Phi[y]|\leqq 1, \quad |\Phi[z]|\leqq 1\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

が成立つ。

乱流が stationary であるとは

$$\left.\begin{aligned} P[u;t_1+t] &= P[u;t] \\ \Phi[y;t_1+t] &= \Phi[y;t] \quad \text{etc.} \end{aligned}\right\} \text{任意の}t_1\text{に対し} \qquad (3\cdot10)$$

のことである。

§4. 汎関数微分

$F=F[u(x)]$ が $u(x)$ の汎関数であるとき, $u(x)$ を少しだけ変え $u(x)+\delta u(x)$ にしたとき; すなわち

$$u(x) \longrightarrow u(x)+\delta u(x) \qquad (4\cdot1)$$

の場合, F が

$$F[u(x)] \longrightarrow F[u(x)]+\delta F[u(x)] \qquad (4\cdot2)$$

に変ったと~~する~~する。 そのとき

$$\delta F = \int A\,\delta u\,dx \qquad (4\cdot3)$$

で表わされれば A を F の $u(x)$ による汎関数微分 (functional derivative) あるいは Volterra derivative といい,

$$A[u(x),x] = \frac{\partial F}{\partial u(x)\,dx} \qquad (4\cdot4)$$

とかく。 $u(x)=(u_\alpha(x))$ がベクトルであるときは, $(4\cdot1)-(4\cdot4)$ は

$$u_\alpha(x) \longrightarrow u_\alpha(x)+\delta u_\alpha(x) \qquad (4\cdot1')$$

$$F[u_\alpha(x)] \longrightarrow F[u_\alpha(x)]+\delta F[u_\alpha(x)] \qquad (4\cdot2')$$

$$\delta F = \int A_\alpha\,\delta u_\alpha\,dx \qquad (4\cdot3')$$

$$A_\alpha[u_\alpha(x);x] = \frac{\partial F}{\partial u_\alpha(x)\,dx} \qquad (4\cdot4')$$

となる。 A は一般に $u(x)$ の汎関数, x の関数である。 §3 における仮定と~~・~~ Φ の定義により

$$
\left.\begin{aligned}
i^n\,\overline{u_{\alpha_1}(x')\cdots u_{\alpha_n}(x^{(n)})} &= \left.\frac{\partial^n \Phi}{\partial y_{\alpha_1}(x')\,dx'\cdots\partial y_{\alpha_n}(x^{(n)})\,dx^{(n)}}\right|_{y=0}\\
i^n\,\overline{v_{\alpha_1}(k')^*\cdots v_{\alpha_n}(k^{(n)})^*} &= \left.\frac{\partial^n \Phi}{\partial z_{\alpha_1}(k')\,dk'\cdots\partial z_{\alpha_n}(k^{(n)})\,dk^{(n)}}\right|_{z=0}
\end{aligned}\right\}\qquad(4.5)
$$

は測定される平均量，速度相関，エネルギー・スペクトルを表わす。

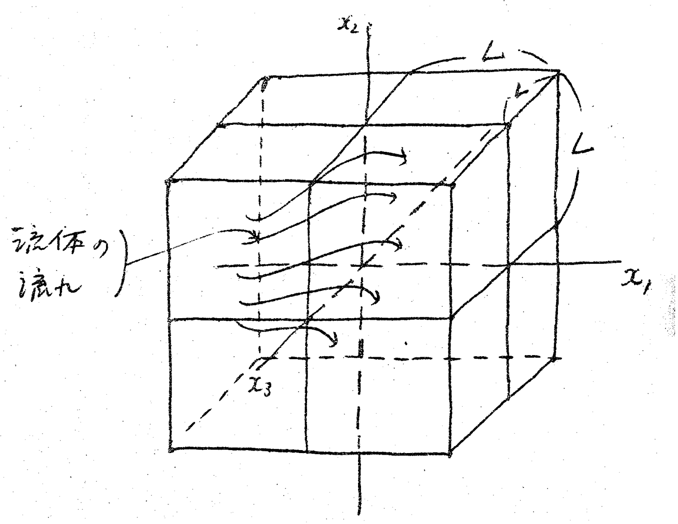
§5. 事象の保存則

一つの力学系を表わす位相運動は，位相空間から消えることも，発生することもない。このことを数学的に表わしてみよう。

先ず，流れの存在する x－空間に一稜 $2L$ の立方体を考え（第2図），各 L を n 等分する。格子各点の速度成分を適当に番号づけをし

$$u^j = u_\alpha(x^i)\quad \alpha=1,2,3$$
$$j=1,2,\cdots,(2n+1)^3\qquad(5.1)$$

とする。このようなとりあつかいにおいて，分布汎関数 $P[u(x)]$ は $N=(2n+1)^3$ 個の u^j の関数となる。



第2図　x－空間

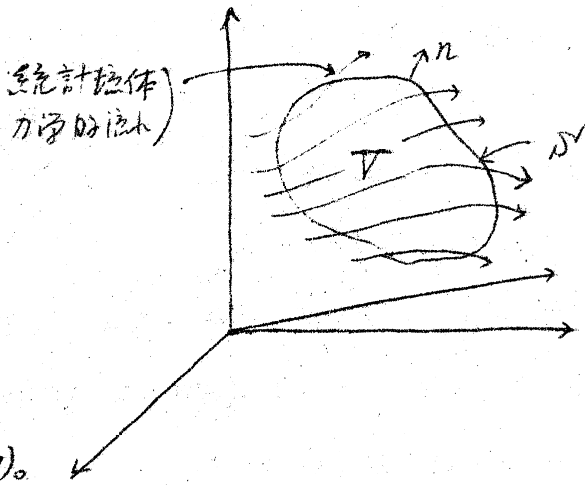
$$P[u(x)] = P(u^j)\qquad(5.2)$$

u^j－空間中に固定した N 次元部分空間 V を考え，その表面（$N-1$ 次元）を S，それに対する外向き法線を n^j（N 次元ベクトル）とする（第3図）。

V中の"事象の数"の増加はその表面を通して入ってくる事象の数に等しいことを式で表わすと

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V P\,\delta u + \int_S P\,\dot{u}^i n^i dS = 0$$

となる。こゝで $\dot{u}^i$ は u^i の時間的変化である(Euler的)。



第3図 u^i-空間

Gauss の定理を適用して

$$\int_V \left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u^i}(P\dot{u}^i)\right)\delta u = 0 \qquad (5.3)$$

となる。Vは任意であるから

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u^i}(P\dot{u}^i) = 0 \qquad (5.4)$$

となる。こゝで $n \longrightarrow \infty$, それから $L \longrightarrow \infty$ の極限移行を行うと

$$\frac{\partial}{\partial t}P[u(x);t] + \int \frac{\partial}{\partial u_\alpha(x)dx}\left(P[u(x);t]\,\dot{u}_\alpha(x)\right)dx = 0 \qquad (5.5)$$

となる。これは事象の保存を表わす汎関数微分方程式である。

§6. Φにおける非圧縮の条件，一様性の条件

連続の方程式に $\int P e^{i(y,u)}\delta u_x$ の演算をほどこすと

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha(x)dx} = 0 \qquad (6,1)$$

となる。$\Phi[z(k)]$ については

$$k_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z_\alpha(k)dk} = 0 \qquad (6.1)$$

となる。

一様性から，我々は任意の a について

$$(y(x+a), u(x)) = \int y(x+a)\,u(x)\,dx$$
$$= \int y(x)\,u(x-a)\,dx = \int y(x)\,u(x)\,dx = (y(x), u(x))$$

をうる。そこで

$$\Phi[y(x+a)] = \int e^{i(y(x+a),\,u(x))} P[\delta u]$$
$$= \int e^{i(y(x),\,u(x))} P[\delta u] = \Phi[y(x)]$$

次一空間においても同じような演算を行えば，結局一様性の条件として

$$\left.\begin{aligned} \Phi[y(x+{}^{t}a)] &= \Phi[y(x)] \\ \Phi[e^{ik\,{}^{t}a}\,z(k)] &= \Phi[z(k)] \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

をうる。

§7. Hopfの方程式

$u(x)$-空間における，事象保存の方程式：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial P}{\partial t} + \int \frac{\partial P \dot{u}_\alpha}{\partial u_\alpha(x)\,dx}\,dx = 0 \\ &\dot{u}_\alpha = -u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial p}{\partial x_\alpha} + \nu \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

に $\int e^{i(y,u)}\,\delta u \times$ の演算をほどこすと

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \int y_\alpha \left[i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\alpha dx\, \partial y_\beta dx} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha dx} - \frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha} \right] dx \qquad (7.2)$$

をうる。こゝに

$$\Pi = i \int p\, e^{i(y,u)} P\, \delta u$$

solenoidal vector $\tilde{y}$

$$\left.\begin{aligned} &y = \tilde{y} + \mathrm{grad}\,\varphi, \quad \frac{\partial \tilde{y}_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \\ &\tilde{y}_\alpha,\ \varphi = 0 \quad \text{境界面上で} \end{aligned}\right\} \qquad (7.3)$$

を導入すると，Π-項を消去できて

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \int \tilde{y}_\alpha \left[i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\alpha dx\, \partial y_\beta dx} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial y_\alpha dx}\right] dx \qquad (7.4)$$

をうる。非圧縮の条件から

$$(y, u) = (\tilde{y}, u)$$

そこで，Φは$\tilde{y}$だけの汎関数と考えることができる。

k-空間における保存則：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial P}{\partial t} + \int \frac{\partial P \dot{v}_\alpha^*}{\partial v_\alpha^* dk}\, dk = 0 \\
&\dot{v}_\alpha = -i\int k_\beta' v_\beta(k-k') v_\gamma(k') \Delta_{\alpha\gamma}(k')\, dk' - \nu k^2 v_\alpha \\
&\Delta_{\alpha\gamma}(k) = \delta_{\alpha\gamma} - k_\alpha k_\gamma / |k|^2
\end{aligned}\right\} \qquad (7.5)$$

から上と同様の演算を行えば

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial t} = &\iint \tilde{z}_\alpha(k'+k'') k_\beta'' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z_\alpha' dk'\, \partial z_\beta'' dk''}\, dk' dk'' \\
&- \nu \int k^2 z_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z_\alpha dk}\, dk \\
&\tilde{z}_\alpha = \Delta_{\alpha\beta} z_\beta
\end{aligned}\right\} \qquad (7.6)$$

がえられ，非圧縮の条件より $\Phi = \Phi[\tilde{z}; t]$ をうる。

ここで，Hopfの方程式 (7.4)，(7.6) を無次元の形に表わそう。代表的な速度u_0，波数k_0で

$$\left.\begin{aligned}
&k_0^3 y / u_0 \longrightarrow y, \quad k_0 x \longrightarrow x, \quad u_0 k_0 t \longrightarrow t \\
&u_0 z \longrightarrow z, \quad k/k_0 \longrightarrow k, \quad \bar{\nu} = \frac{\nu k_0}{u_0} \equiv \frac{1}{R}
\end{aligned}\right\} \qquad (7.7)$$

のように無次元として，非圧縮性を考慮して

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \int \tilde{y}_\alpha \left[i \frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{y}_\alpha dx\, \partial \tilde{y}_\beta dx} - \bar{\nu} \frac{\partial^2}{\partial x_\beta \partial x_\beta} \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{y}_\alpha dx}\right] dx \qquad (7.8)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial t} = &\iint \tilde{z}_\lambda(k'+k'') k_\mu'' \Delta_{\alpha\mu}(k') \Delta_{\beta\lambda}(k'') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tilde{z}_\alpha' dk'\, \partial \tilde{z}_\beta'' dk''}\, dk' dk'' \\
&- \bar{\nu} \int k^2 \tilde{z}_\lambda \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}_\lambda dk}\, dk
\end{aligned} \qquad (7.8)$$

をうる。ここで R は Reynolds 数である。

II. 近似解法

§8. $\Phi[\xi(k)]$ の表式

1) Φ を ξ の中の汎関数によって展開する方法を考えよう。エネルギー・スペクトルが有限になること（ξ の正の整数中），一様性（δ-関数）および等方性（回転に対して不変な形）の性質から，Φ は

$$X_n[\xi] = \int a^{(n)}_{\alpha_1 \cdots \alpha_n}(k', \cdots, k^{(n)}; t)\, \delta(k' + \cdots + k^{(n)})\, \xi_{\alpha_1}(k') \cdots$$
$$\cdots \xi_{\alpha_n}(k^{(n)})\, dk' \cdots dk^{(n)} \qquad (8.1)$$

の関数と考えられる。これを

$$\Phi[\xi] = \Phi(X_n\,; n = 2, \cdots, \infty) \qquad (8.2)$$

とかこう。Hopf は

$$\Phi = 1 + \Phi^2 + \Phi^3 + \cdots \qquad (8.3)$$

の形の展開を考えた。Φ^n は

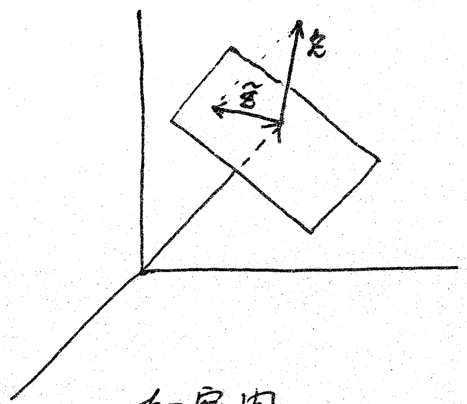
$$\Phi^2 = \frac{\partial \Phi}{\partial X_2}\bigg|_{X=0} X_2, \quad \Phi^3 = \frac{\partial \Phi}{\partial X_3}\bigg|_{X=0} X_3, \ etc \qquad (8.4)$$

である。

2) ξ を適当な直交関数系によって展開できるものと仮定しよう。Φ が ξ の汎関数とはその無限個の展開係数の関数と同じことである。三次元複素ベクトル ξ_α は k に対する垂直面への ξ の投影ベクトルである（第4図）。そこで ξ_α は結局二次元複素ベクトル ζ_α によって表わされる。すなわち

$$\xi_\alpha(k) = K_{\alpha\beta}(k)\, \zeta_\beta(k) \qquad \beta = 2, 3 \qquad (8.5)$$

$$K_{\alpha\beta}(k) = \frac{1}{|k|\sqrt{k_2^2+k_3^2}} \begin{pmatrix} -(k_2^2+k_3^2) & 0 \\ k_1 k_2 & -k_3|k| \\ k_1 k_3 & k_2|k| \end{pmatrix} \tag{8.6}$$



k-空間

第4図

$$\tilde{\zeta}_\beta = a_\beta^n \varphi_n(k) \qquad \beta = 2, 3$$

$$n = 0, 1, \cdots, \infty, \quad a_\beta^n : \text{実} \tag{8.7}$$

で表わされる。こゝで φ_n は

$$\varphi_n(-k) = \varphi_n(k)^* \tag{8.8}$$

の性質を満足する直交関数系である。逆変換は

$$\tilde{\zeta} = K_\alpha^{-1} \tilde{\zeta}_\alpha \tag{8.9}$$

$$K_\alpha^{-1} = \frac{1}{|k|\sqrt{k_2^2+k_3^2}} \left(-(k_2^2+k_3^2),\ k_1 k_2 - i k_3 |k|,\ k_1 k_3 + i k_2 |k| \right) \tag{8.10}$$

で表わされる。こゝで

$$\zeta = \tilde{\zeta}_2 + i\tilde{\zeta}_3 = a^n \varphi_n(k) \qquad a^n = a_2^n + i a_3^n \tag{8.11}$$

である。

こゝで

$$\langle fg \rangle = \int fg\, dk \tag{8.12}$$

とすれば，直交性は

$$\langle \varphi_n \varphi_m^* \rangle = \delta_{mn} A_n \tag{8.13}$$

で表わされる。さて a^n は ζ の汎関数とみなすことができる。すなわち

$$\langle \tilde{\xi} \varphi_m^* \rangle = a^n \langle \varphi_n \varphi_m^* \rangle = a^n \delta_{mn} A_n \tag{8.14}$$

であるから

$$a^n[\tilde{\xi}] = \frac{1}{A_n} \langle \tilde{\xi} \varphi_m^* \rangle \delta_{mn} \tag{8.15}$$

である。ここでA_nは規格化定数である。a_nの$\tilde{\xi}$による汎関数微分は

$$\frac{\partial a^n}{\partial \tilde{\xi}(k) dk} = \frac{1}{A_n} \varphi_m^* \delta_{mn} \tag{8.16}$$

で表わされる。

$\Phi[\tilde{z}(k)]$は無限個のa^nの関数とみなしうる：

$$\Phi[\tilde{z}(k)] = \Psi(a^n : n = 0, 1, \cdots, \infty) \tag{8.17}$$

Φの$\tilde{z}_\alpha$による汎関数微分は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{z}_\alpha dk} = \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{z}_\alpha} \frac{\partial a^n}{\partial \tilde{\xi} dk} \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} = \frac{1}{A_n} \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} K_\alpha^{-1} \varphi_m^* \tag{8.18}$$

となる。

二次元の乱流を考える場合には、二次元複素ベクトル$\tilde{z}_\alpha$を一次元複素ベクトル$\tilde{\xi}$によって表わすことができる．

$$\tilde{z}_\alpha = K_\alpha \tilde{\xi} \tag{8.5'}$$

$$K_\alpha = \frac{1}{|k|}(-k_2, k_1) \tag{8.6'}$$

$$\tilde{\xi} = a^n \varphi_n(k) \qquad a^n : \text{実} \tag{8.7'}$$

逆変換は

$$\tilde{\xi} = K_\alpha \tilde{z}_\alpha \tag{8.8'}$$

である。Φの$\tilde{z}_\alpha$による汎関数微分は

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\xi} dk} = \frac{1}{A_n} \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} K_\alpha \varphi_n^* \tag{8.19}$$

となる。

§9. 近似方程式の解

Hopfは近似方程式について二,三の厳密解,又物理的に興味のある近似解を出した。

1) 弱い乱流: この場合には,非線形項から生ずる項は落すことができて

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nu \int k^2 \tilde{\xi}_\alpha \frac{\partial \Phi}{\partial \tilde{\xi}_\alpha dk} dk = 0 \qquad (9.1)$$

となる。この方程式には,次のような特解がある。

$$\Phi = e^{-\frac{1}{2}X_2} \qquad X_2 = \int a^{(2)}_{\alpha\beta}(k,-k,t)\,\tilde{\xi}_\alpha(k)\,\tilde{\xi}_\beta(-k)\,dk$$

$$a^{(2)}_{\alpha\beta}(k,-k) = a_{\alpha\beta}(k)\, e^{-2\nu k^2 t} \qquad (9.2)$$

2) stationary turbulence (非粘性): この場合には,時間微分と,粘性項が落ちて,次の方程式がえられる。

$$\int k''_\gamma \Delta_{\alpha\gamma}(k') \Delta_{\beta\lambda}(k'') \xi_\lambda(k'+k'') \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi'_\alpha dk' \partial \xi''_\beta dk''} dk' dk'' = 0$$

$$(9.3)$$

この特解として

$$\Phi = e^{-\frac{1}{2}X_2} \qquad a^{(2)}_{\alpha\beta}(k,-k) = a\,\delta_{\alpha\beta} \qquad a = \mathrm{const.} \qquad (9.4)$$

がある。これは,白いスペクトル,すなわちk-空間でエネルギー密度一定を表わしている。HopfとTitt[4]は等方性のstationary turbulenceは白いスペクトルしかないことを示した。

Kolmogoroffのスペクトル $E(k) \propto k^{-5/3}$ は

$$\Phi = 1 - \frac{1}{2}X^2 + \cdots$$

$$a^{(2)}_{\alpha\beta}(k,-k) = a\,\epsilon^{2/3}|k|^{-11/3} \qquad a = \mathrm{const.} \qquad (9.5)$$

で表わされる(ϵは散逸エネルギー密度)。

§10. 直交関数展開による解法

§8で行ったような ξ の直交関数展開をすると, Hopf の方程式はその展開係数 a^n についての無限次元汎関数偏微分方程式に帰着され、次のように表わされる。

$$\Phi = \Psi(a^n,\ n=0,1,\cdot\cdot,\infty) \qquad (10.1)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = L_2(\Psi) - \nu L_1(\Psi) \qquad (10.2)$$

以下、個々の場合について示そう。

1) 一般の乱流の性質を十分とり入れた一次元モデルである, Burgers のモデル方程式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (10.3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + i\int k' v(k-k')\, v(k')\, dk' = -\nu k^2 v \qquad (10.4)$$

について考える。対応する Hopf 方程式は, 明らかである。この場合には, ξ 自身を展開し

$$\xi = a^n \varphi_n(k) \quad , \quad \varphi_n(-k) = \varphi_n(k)^* \quad a^n: 実 \qquad (10.5)$$

$$L_1(\Psi) = \frac{1}{A_m} a^n \frac{\partial \Psi}{\partial a^m}\int k^2 \varphi_m(k)^* \varphi_n(k)\, dk \qquad (10.6)$$

$$L_2(\Psi) = \frac{1}{A_l A_m} a^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^l \partial a^m}\int \varphi_l(k')^* k'' \varphi_m(k'')^* \varphi_n(k'+k'')\, dk' dk'' \qquad (10.7)$$

となる。

2) Navier-Stokes 乱流: 二次元乱流に対しては

$$\tilde{\xi}_\alpha = K_\alpha \tilde{\zeta}\ ,\quad \tilde{\zeta} = K_\alpha \tilde{\zeta}\ ,\quad \tilde{\zeta} = a^n \varphi_n \quad a^n: 実 \qquad (10.8)$$

$$L_1(\Psi) = \frac{1}{A_m} a^n \frac{\partial \Psi}{\partial a^m}\int k^2 \varphi_m(k)^* \varphi_n(k)\, dk \qquad (10.9)$$

$$L_2(\Psi) = \frac{1}{A_l A_m} a^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^l \partial a^m}\int K_\alpha(k')\, \Delta_{\alpha l}(k')\, \varphi_l(k')^*\, k''_\gamma\, K_\beta(k'')$$

$$\Delta_{\beta\lambda}(k'')\, \varphi_m(k'')^*\, K_\lambda(k'+k'')\, \varphi_n(k'+k'')\, dk' dk'' \qquad (10.10)$$

三次元乱流では

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\xi}_\alpha = K_{\alpha\beta}\tilde{\zeta}_\beta, \quad \tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_2 + i\tilde{\zeta}_3 = K_\alpha^{-1}\tilde{\xi}_\alpha \\ \tilde{\zeta} = a^n\varphi_n \qquad a^n：複素数\end{aligned}\right\} \qquad (10.11)$$

$$L_1(\Psi) = \frac{1}{A_m} a^n \frac{\partial \Psi}{\partial a^n} \int k^2 K_{\alpha\lambda}(k) K_\alpha^{-1}(k) \varphi_m(k)^* \varphi_n(k) dk \qquad (10.12)$$

$$L_2(\Psi) = \frac{1}{A_l A_m} a^n \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^l \partial a^m} \int K_\alpha^{-1}(k') \Delta_{\alpha\gamma}(k') \varphi_l(k')^* k_\delta'' K_\alpha^{-1}(k'')$$

$$\Delta_{\beta\lambda}(k'') \varphi_m(k'')^* K_{\lambda\mu}(k'+k'') \varphi_n(k'+k'') dk' dk'' \qquad (10.13)$$

初期値問題を考える場合には Laplace 変換の方法が有効である：

$$\hat{\Psi}(a^n; p) = \int_0^\infty \Psi(a^n; t) e^{-pt} dt \qquad (10.14)$$

$$L_2(\hat{\Psi}) - \nu L_1(\hat{\Psi}) - p\hat{\Psi} = -\Psi(a^n; 0) \qquad (10.15)$$

直交関数として，grad の（N次元の）一般化された Hermite の多項式 $H^{(n)}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x)$ を考えよう。それは密度関数 ω，

$$\omega = e^{-x^2/2} \qquad x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_N^2 \qquad (10.16)$$

によって作られる。すなわち

$$H^{(n)}_{\alpha_1\cdots\alpha_n} = \frac{(-1)^n}{\omega} \frac{\partial^n \omega}{\partial x_{\alpha_1} \cdots \partial x_{\alpha_n}} \qquad (10.17)$$

である。

$$\omega^{1/2} H^{(n)}_{\alpha_1\cdots\alpha_n}(x) \qquad (10.18)$$

は完全直交系をつくっている。それらを我々の場合に適した形で例示しよう

1）一次元（Hermite の多項式）：$\varphi_0 = e^{-x^2/4}$，$\varphi_1 = i x e^{-x^2/4}$

$\varphi_2 = (x^2-1)e^{-x^2/4}$，$\varphi_3 = i(x^3-3x)e^{-x^2/4}$，$\varphi_4 = (x^4-6x^2+3)e^{-x^2/4}$

etc. $\qquad A_n = n!\sqrt{2\pi} \qquad (10.19)$

2）二次元 ：$\varphi_0 = e^{-x^2/4}$，$\varphi_1, \varphi_2 = i(x_1, x_2)e^{-x^2/4}$

$$\varphi_3, \varphi_4 = (x_1^2-1,\ x_2^2-1)\,e^{-x^2/4},\quad \varphi_5 = x_1x_2e^{-x^2/4}\quad etc \qquad (10.20)$$

さて Burgersモデルにもどろう。ここで a^0, a^1, a^2 までをのこすと(10.2)は(10.6)，(10.7)を用いて

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{4i}{3^{3/2}}\left(a^0\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^0\partial a^1} - a^1\frac{\partial^2\Psi}{(\partial a^0)^2}\right) - \frac{2i}{3^{3/2}}\left(4a^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^0\partial a^1} - a^0\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^1\partial a^2}\right)$$
$$+\frac{2}{3^{5/2}}\left(a^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial a^1\partial a^2} - a^1\frac{\partial^2\Psi}{(\partial a^2)^2}\right) - \bar{\nu}\left(a^0\frac{\partial\Psi}{\partial a^0} + 3a^1\frac{\partial\Psi}{\partial a^1} + 5a^2\frac{\partial\Psi}{\partial a^2}\right.$$
$$\left.+2a^2\frac{\partial\Psi}{\partial a^0} + 2a^0\frac{\partial\Psi}{\partial a^2}\right) \qquad (10.21)$$

の形となる。

$$\Phi[z(k)] = e^{-\frac{1}{2}\int e^{-\frac{1}{2}k^2} z(k)\, z(k')\, \delta(k+k')\, dk\, dk'}$$

すなわちエネルギースペクトル $E(k) = e^{-\frac{1}{2}k^2}$ を初期値とする，初期値問題を考える。

a^0 だけのこした時は

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\bar{\nu}a^0\frac{\partial\Psi}{\partial a^0} \qquad (10.22)$$

となり，上の初期値に対する解は

$$\Psi = e^{-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(a^0)^2 e^{-2\bar{\nu}k^2 t}} \qquad (10.23)$$

である。これは弱い乱流の解である。

$a^1, a^2, \cdots$ をのこした解はまだみつかっていない。

文献：

1) Batchelor, G.K.: The theory of homogeneous turbulence, 1953 Cambridge Univ. Press.

2) Grad, H.: CPAM 2 (1949) 325.

3) Hopf, E.: J. Rat. Mech. Anal. 1 (1952) 87–123.

4) Hopf, E.: J. Rat. Mech. Anal. 2 (1953) 587–91.

5) 細川 巌：航空宇宙技術研究所報告 NAL TR-95 (1964) pp12

6) Hosokawa, I.: JPSJ 21 (1966) 538-41.

7) Rosen, G.: Phys. Fl. 3 (1960) 519-24, 525-8

8) 巽友正：乱流 1962, 槇書店