数理解析研究所講究録
第23巻 1967年 79-89

VLASOV流体のエントロピーについて

名古屋大学プラズマ研究所　　中山壽夫

1 はじめに

H－定理の概念は，Nヶの粒子から成る系の非平衡統計力学を考へる時，系の時間的発展の方向を指定すると云ふことで，非常に大切な役割を演じて来た。ボルツマン以来，もし与へられた系に対応して一体分布函数が考へられ，その分布函数を支配する方程式が，系を記述するにふさわしいものであるならば，この一体分布函数で定義されたH－函数は，時間と共に非増加であると信じられて来た。一方微視的にこの系を眺めてみる時，系を支配する運動方程式は，時間に関して可逆であるから，非可逆性と云ふことは考へられない。即ち非可逆性と云ふ概念は，系の記述上我々が課する所の細分の粗さに密接に関係したものである。云い換へるならば，考へている系の知識を制限して，より不完全な知識で満足するならば，そしてその知識の制限が，妥当なものであるならば，巨視的非可逆性が期待されるのである。

さて，場合によっては，プラズマはブラッソフ方程式

$$\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial \vec{q}}-\int\frac{\partial \varphi(|\vec{q}-\vec{q}'|)}{\partial \vec{q}}f(\vec{x}',t)\frac{\partial f(\vec{x},t)}{\partial \vec{p}}d\vec{x}'=0 \qquad (1)$$

で充分よく近似される。但し$\vec{x}$は $\vec{x}\equiv(\vec{q},\vec{p})$，$\varphi$はクーロンポテンシャルを表している。このブラッソフ方程式は，B.B.G.K.Y.方程式に於いて

二体相関函数 $f_2(x_1,x_2,t)-f(x_1,t)f(x_2,t)=g(x_1,x_2,t)$ を無視することによって得られる。今(1)式の解 $f(x,t)$ を用いて、H−函数を

$$H(t)\equiv\int dx\, f(x,t)\log f(x,t) \tag{2}$$

と定義すると容易に分る様に $dH(t)/dt=0$ となる。[(1),(2),(3)] 今(1)式で記述される系（以後ブラッソフ流体と呼ぶことにする）に乱流状態があるとしよう。そして外界と何の接触もないものとすれば、系は平衡状態、少くとも定常状態に近づくであろうと想像される。その場合にも系は(1)式で記述され、そして(2)式で定義したH−函数は時間と共に一定である。果して(1)式は良い近似をした結果得られたものであろうか、それとも(2)式で定義するH−函数は、この場合ふさわしくないものなのであろうかと云う疑問が生じる。

この小論文では(2)式で定義されたH−函数の見方を変えて、(2)式の導き出されて来た論理を用いて、乱流を記述するにふさわしい形式化を行ってH−函数を導入して、その時間的変化を辿ることにする。

2. プラズマの弱い乱流——汎函数形式

詳しい内容は参考文献[(4)]にあるので、簡単に概略を述べることにする。ブラッソフ方程式(1)の時刻 $t=t$ に於ける解 $f(x,t)$ の作る空間 Ω_f を考へる。そしてこの空間に確率を考へる。その確率密度を $P(f,t)$ としよう。この様な確率密度 $P(f,t)$ を用いて、1体分布函数の平均、それらの積の平均を考へることによって、モーメント方程式が作られる。しかしこれらの

モーメント方程式は閉じていないので不便である。しかし、今次の様な特性汎函数 $\Phi(y,t)$（或は母汎函数と呼ぶ）

$$\Phi(y,t)=\int_{\Omega_f} e^{i\int y(\vec{x})f(\vec{x})\,d\vec{x}}\,P(f,t)\,d[f] \qquad (3)$$

を導入してこれの時間的変化を追うと、これからモーメントが、汎函数微分によって何次でも得られるから、非常に便利である。(3)式で導入した y は物理空間 $(\vec{x})$ に於ける任意の滑らかな函数である。汎函数 $\Phi(y,t)$ の運動方程式は、

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=-i\int y(\vec{x})\frac{\vec{p}}{m}\frac{\delta}{i\delta y(\vec{x})}\Phi(y,t)\,d\vec{x}$$

$$+i\iint y(\vec{x})\frac{\partial\varphi(|\vec{\xi}-\vec{\xi}'|)}{\partial\vec{\xi}}\frac{\delta}{i\delta y(\vec{x}')}\frac{\partial}{\partial\vec{p}}\frac{\delta}{i\delta y(\vec{x})}\Phi(y,t)\,d\vec{x}\,d\vec{x}' \qquad (4)$$

となる。ここで $\delta/i\delta y(\vec{x})$ は汎函数微分を示す記号である。(4)式から得られるモーメント方程式は、Pとして適当なものを考へると、ブラソフ方程式に対して、ベデノフ及ドラモンドーパイエンズが考へた準線形理論と同等である。(4)(5)

さて文献(6)で述べた様に、準線形理論に於いてモード間の相互作用をおとすと $\Phi(y,t)$ は次の様に近似される。

$$\Phi_{Q.L.}(y,t)=\exp\left\{i\int y(\vec{x})\langle f(\vec{x})\rangle_{Q.L.}\,d\vec{x}-\frac{\varepsilon}{2}\iint y(\vec{x})y(\vec{x}')\,G_{Q.L.}(\vec{x},\vec{x}',t)\,d\vec{x}\,d\vec{x}'\right\} \qquad (5)$$

但し ϵ は小さな数であり，$\langle f(\vec{x}) \rangle_{a.L.}$ 及 $G_{a.L.}(\vec{x},\vec{x}',t)$ は次の関係式で定義するものである。

$$\left.\frac{\delta \Phi_{a.L.}}{i\delta y(\vec{x})}\right|_{y=0} \equiv \langle f(\vec{x}) \rangle_{a.L.} \tag{6}$$

及

$$\left\{ \frac{\delta^2 \Phi_{a.L.}}{i\delta y(\vec{x})\, i\delta y(\vec{x}')} - \frac{\delta \Phi_{a.L.}}{i\delta y(\vec{x})} \frac{\delta \Phi_{a.L.}}{i\delta y(\vec{x}')} \right\}_{y=0} \equiv \epsilon\, G_{a.L.}(\vec{x},\vec{x}',t) \,。\tag{7}$$

$\langle f(\vec{x}) \rangle_{a.L.}$ 及 $G_{a.L.}(\vec{x},\vec{x}',t)$ に対する運動方程式は文献(4) にある通り，

$$\frac{\partial \langle f(\vec{x}_1) \rangle_{a.L.}}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial \langle f(\vec{x}_1) \rangle_{a.L.}}{\partial \vec{q}_1} + \vec{F}(\vec{q}_1) \frac{\partial \langle f(\vec{x}_1) \rangle_{a.L.}}{\partial \vec{p}_1}$$
$$- \int \frac{\partial \varphi(|\vec{q}_1 - \vec{q}_2|)}{\partial \vec{q}_1} \cdot \frac{\partial G_{a.L.}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t)}{\partial \vec{p}_1} d\vec{x}_2 = 0 \tag{8}$$

及

$$\frac{\partial G_{a.L.}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t)}{\partial t} + \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1,2} \vec{p}_i \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} \right) G_{a.L.}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t) - \left(\sum_{i=1,2} \vec{F}(\vec{q}_i) \frac{\partial}{\partial \vec{p}_i} \right) G_{a.L.}(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t)$$
$$- \sum_{i=1,2} \frac{\partial \langle f(\vec{x}_i) \rangle_{a.L.}}{\partial \vec{p}_i} \int \frac{\partial \varphi(|\vec{q}_i - \vec{q}_3|)}{\partial \vec{q}_i} G_{a.L.}(\vec{x}_j,\vec{x}_3,t)\, d\vec{x}_3 = 0 \tag{9}$$

但し $j=(1,2)(\neq i)$，そして $\vec{F}(\vec{q})$ と云うのは

$$\vec{F}(\vec{z}) \equiv \int \frac{\partial \varphi(|\vec{z}-\vec{z}'|)}{\partial \vec{z}} \left\langle f(\vec{x}') \right\rangle_{Q.L.} d\vec{x}' \tag{10}$$

である。

空間的に均一な系に於いては（$f(\vec{x})$ と云ふのは空間的に不均一でも）$\partial\langle f(\vec{x})\rangle_{Q.L.}/\partial\vec{z}$ 及 $\vec{F}(\vec{z})$ の因子をもった項は零となる。

3. ブラツソフ流体の乱流のエントロー（H－函数の符号を変へたもの）の一定義

ボルツマンによって導入されたエントロピーの概念を振り返ってみることにしよう。ボルツマン方程式は，B.B.G.K.Y.方程式に於いて2体の分布函数 $f_2(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t)$ に近似をすることによって得られる。従って，B.B.G.K.Y.方程式のよって立つ方程式，リユビユ方程式の解をもって，H－函数を $H(t)=\int f_N(\{\vec{x}_i\},t)\log f_N(\{\vec{x}_i\},t)\,d\{\vec{x}_i\}$ と定義したならば，$dH(t)/dt$ は0となる。このリユビユの方程式の出て来る過程は，汎函数方程式(4)の出て来る過程と良く似ている。なぜならば，Nケの粒子から成る系の性質は，ハミルトンの運動方程式で充分良く記述されるのであるが，これを解くことは不可能に近いので，ハミルトンの運動方程式の時刻 $t=t$ に於ける解の作る空間，Γ－空間を考へ，その空間に確率密度 $f_N(\{\vec{x}_i\},t)$ を導入し $f_N(\{\vec{x}_i\},t)$ の運動を追いかけるのが，リユビユの方程式であった。従ってこの段階でH－函数を考へると，f_Nは，すべての知識を含んでいるものであるから，非可逆性をあらわす $dH(t)/dt$ と云ふものは0となる。この事情は(4)式の解をもって来て $H(t)=\int_{\Omega_f} P(f,t)\log P(f,t)\,d[f]$ と定義

するならば $dH(t)/dt=0$ となることと良く似ているのである。[7] ボルツマンの導入したH−函数の成功は、与へられた初期条件のもとに、リユビル方程式が時間と共に発展し、初期段階を経た後にはボルツマン方程式で充分近似し得る系が存在して、その様な段階でH−函数を導入したことになっていたからである。云い換へると、f_Nが

$$f_N(\{\vec{x}_i\},t)=\prod_{i=1}^{N} f_B(\vec{x}_i,t) \tag{11}$$

と近似される f_B を用いてH−函数を定義するとH−定理が成立するのである。

さて準線形理論に相当する汎函数方程式(4)の解(5)を考へてみることにする。(5)式に現れた相関函数 $G(\vec{x},\vec{x}',t)$ は、(9)式の解であるから結局Gは一体の函数 $\langle f(\vec{x})\rangle$ で書きあらわされたことになっている。したがって、近似汎函数(5)は、古典統計に於ける f_B に対応したものとなっている。今(5)式をフーリエ逆変換した確率密度を $P_{Q.L.}(f,t)$（以後添字Q.L.は省略する）としよう。そしてH−函数を

$$H(t)=\int_{\Omega_f} P_{Q.L.}(f,t)\log P_{Q.L.}(f,t)\,d[f] \tag{12}$$

と定義する。

(12)式のPは

$$P(f,t)=\int_{\Omega_g} e^{-i\int g(\vec{x})f(\vec{x})d\vec{x}}\,\Phi_{Q.L.}(g,t)\,d[g]$$

で求められる量であり $\Phi_{Q.L.}$ がガウス形となっているから解析的に計算が

す能で，その結果は

$$P(f,t)=\frac{1}{Z(t)}\exp\left\{-\frac{1}{2\epsilon}\iint\left[f(\vec{x})-\langle f(\vec{x})\rangle\right]\left[f(\vec{x}')-\langle f(\vec{x}')\rangle\right]\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',t)\,d\vec{x}\,d\vec{x}'\right\} \quad (13)$$

となる。但し $Z(t)$ 及 $\tilde{G}$ は

$$Z(t)=\int_{\mathcal{D}_f}\exp\left\{-\frac{1}{2\epsilon}\iint\left[f(\vec{x})-\langle f(\vec{x})\rangle\right]\left[f(\vec{x}')-\langle f(\vec{x}')\rangle\right]\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',t)\,d\vec{x}\,d\vec{x}'\right\}d[f] \quad (14)$$

$$\int \tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',t)\,G(\vec{x}',\vec{x}'',t)\,d\vec{x}' = \delta(\vec{x}-\vec{x}'') \quad (15)$$

で与へられる。

さて，H－函数の時間変化は(13)式を(12)式に代入して時間微分をとるとよい。即ち

$$\frac{dH(t)}{dt}=\int_{\mathcal{D}_f}\frac{\partial P(f,t)}{\partial t}\left\{1+\log P(f,t)\right\}d[f]=\int_{\mathcal{D}_f}\frac{\partial P(f,t)}{\partial t}\log P(f,t)\,d[f] \quad (16)$$

Pの運動方程式は，(13)，(8)，(9)式から

$$\frac{\partial P}{\partial t}=P\left\{\frac{1}{\epsilon}\iint d\vec{x}\,d\vec{x}'\,\frac{\partial\langle f(\vec{x})\rangle}{\partial t}\left[f(\vec{x}')-\langle f(\vec{x}')\rangle\right]\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',t)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\epsilon}\iint d\vec{x}\,d\vec{x}'\left[f(\vec{x})-\langle f(\vec{x})\rangle\right]\left[f(\vec{x}')-\langle f(\vec{x}')\rangle\right]\frac{\partial\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',t)}{\partial t}\right\}$$

$$-P\int_{\Omega_f} P\left\{\frac{1}{\epsilon}\iint d\vec{x}\,d\vec{x}'\,\frac{\partial\langle f(\vec{x})\rangle}{\partial t}\left[f(\vec{x}')-\langle f(\vec{x}')\rangle\right]\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',t)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\epsilon}\iint d\vec{x}\,d\vec{x}'\left[f(\vec{x})-\langle f(\vec{x})\rangle\right]\left[f(\vec{x}')-\langle f(\vec{x}')\rangle\right]\frac{\partial\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',t)}{\partial t}\right\}d[f] \qquad (17)$$

確率密度の対数は(13)式から

$$\log P=-\frac{1}{2\epsilon}\iint\left[f(\vec{x})-\langle f(\vec{x})\rangle\right]\left[f(\vec{x}')-\langle f(\vec{x}')\rangle\right]\tilde{G}(\vec{x},\vec{x}',t)\,d\vec{x}\,d\vec{x}'-\log Z \qquad (18)$$

であり，又次の関係式も特性汎函数の定義から容易に分かる。

$$\left\langle\left[f(\vec{x})-\langle f(\vec{x})\rangle\right]\right\rangle=\int_{\Omega_f}\left[f(\vec{x})-\langle f(\vec{x})\rangle\right]P\,d[f]=0 \qquad (19)$$

$$\left\langle\prod_{i=1}^{3}\left[f(\vec{x}_i)-\langle f(\vec{x}_i)\rangle\right]\right\rangle=0 \qquad (20)$$

$$\left\langle\left[f(\vec{x}_1)-\langle f(\vec{x}_1)\rangle\right]\left[f(\vec{x}_2)-\langle f(\vec{x}_2)\rangle\right]\right\rangle=\epsilon\,G(\vec{x}_1,\vec{x}_2,t) \qquad (21)$$

$$\left\langle\prod_{i=1}^{4}\left[f(\vec{x}_i)-\langle f(\vec{x}_i)\rangle\right]\right\rangle=\epsilon^2\left[G(\vec{x}_1,\vec{x}_2)G(\vec{x}_3,\vec{x}_4)+G(\vec{x}_1,\vec{x}_3)G(\vec{x}_2,\vec{x}_4)\right.$$

$$\left.+G(\vec{x}_1,\vec{x}_4)G(\vec{x}_2,\vec{x}_3)\right] \qquad (22)$$

(17), (18)式を $dH(t)/dt$, (16)式, に代入し, (15)式, 及(19)~(22)式の関係式を用いて整理すると，結局

$$\frac{dH(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\iint \tilde{G}(\vec{x}_2, \vec{x}_1, t)\frac{\partial G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t)}{\partial t} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \tag{23}$$

を得る。

(23)式によると、H一函数の時間的変化の割合は、相関函数Gの時間変化の割合によって与へられている。今Gと云ふ量がどんなものであるかを(21)式とは別の観点から考へてみよう。電場$\vec{E}(\vec{\xi}, t)$は、$[f(\vec{x}) - \langle f(\vec{x}) \rangle]$と次の様な関係にある。

$$\vec{E}(\vec{\xi}, t) = -\int \frac{\partial \varphi(|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|)}{\partial \vec{\xi}} \left[f(\vec{x}') - \langle f(\vec{x}') \rangle \right] d\vec{x}' \tag{24}$$

であるから

$$\left\langle \vec{E}^2(\vec{\xi}, t) \right\rangle = \iint \frac{\partial \varphi(|\vec{\xi} - \vec{\xi}_1|)}{\partial \vec{\xi}} \frac{\partial \varphi(|\vec{\xi} - \vec{\xi}_2|)}{\partial \vec{\xi}} \; G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t) \, d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 \tag{25}$$

即ち、Gは電場のエネルギーに関係した量である。(23)式の主張は、従って電場のエネルギーが増大するならば、H一函数は時間と共に増大することを云っている。

4. 二～三の考察

前節に於いて、プラズマ流体の乱れのうち、ベデノフ、ドラモンド―パインズ流の準線形理論で取扱へる様な系のエントロピーの時間変化を考察した。(23)式からもし初期条件として任意の相関が与へられたとすると、(あくまでも準線形理論で取扱へる様なものに限らなければいけないが)

その相関の中には、安定なモードも不安定なモードも多数存在するであろう。しかし安定なモードは、$\langle f(\alpha)\rangle$ に特長的な或る時間の間に、殆んど無視出来るレベルに迄退化する。[8] ここで行った議論は、系が(8)式及(9)式で良く記述される様な場合のみに限る。それは古典統計のボゴリューボフ理論と良く似たものであって、(8)式及(9)式で系が良く記述されるということは、ある初期条件のもとに系が発展するとすると、ある初期段階を経過した後に(8)式及(9)式で記述出来る系があるであろうと云うことである。即ち安定なモードだけを含んだ系であるならば初期段階を経た後には、$\frac{d\xi}{dt} \sim 0$ となっているであろう。そして不安定なモードをもつ系では、初期段階を経た後に於いても $\frac{d\xi}{dt} > 0$ であろう。従ってその様な領域では、

$$\frac{dH(t)}{dt} < 0$$

である。$dH(t)/dt$ の下限の証明は、やゝ困難な問題である。何故ならば、成長率の時間変化を考へに取り入れなければいけないからである。成長率の時間変化は、ここの形式で云いならば $[\langle fff\rangle - \langle f\rangle\langle f\rangle\langle f\rangle - \Sigma\langle ff\rangle]$ と云う量に関係があって、今迄問題にして来た領域の外に出るからである。

最後にもっとも興味ある問題、強い乱れから、弱い乱れへの移り変わりの問題については、(8)式、(9)式を眺める限り、少くとも弱い乱れに移った後に於いては、ここでのべた方法論は可能でありそうである。しかしそれは数式の上だけのことであって、多くを云ふことは今の所むつかしい。

最後に、著者の興味を、乱れの汎函数形式化に導き、終始熱心な指導並及討論をして頂いた巽教授に心から感謝の意を表します。又この小論文について討論に参加して頂いた方々、中でもブリトン、ドーソン、寺本、オーバマンの各氏に感謝致します。

References

(1) Ira B. Bernstein, Phys. Rev. 109, 10(1958)

(2) D. C. Montgomery and D. A. Tidman, Plasma Kinetic Theory, McGraw-Hill (1964), N.Y., Also see the lecture note by Montgomery given at the Institute of Theoretical Physics, University of Colorado, summer 1966.

(3) E. Minardi and F. Santini, Physica 32, 497(1966). However, their definition of entropy is not same as the minus of H-function defined here by Eq.(2).

(4) Toshio Nakayama and John Dawson, PPL-AF-5, Princeton University Plasma Physics Laboratory, May 1966. J. Math. Phys. (To be published)

(5) A. A. Vedenov, J. Nucl. Energy Pt. C, 5, No. 3, 169(1963)
W. Drummond and D. Pines, Ann. Phys. (N.Y) 28, 478(1964)

(6) Toshio Nakayama, Phys. Fluids (to be published)

(7) T. Tatsumi and N. Ikeda, Private Communication (To be published)

(8) Ira B. Bernstein and Folker Engleman, Phys. Fluids 9, 937 (1966)