数理解析研究所講究録
第 26 巻 1967 年 28-45

[B] Resolvent にもとづく領域の完備化について

阪大理　渡辺　毅

前稿の福島の報告[A]（詳しくは論文[1]）の定理2（p.5）における D の compact 化 D^* として福島は $G_1(x,y)$ による Martin-金持型の completion を取っている（p.7）。しかしながらこの D^* について定理2の結果がいえるのは，定理1（p.3）において構成した resolvent density（あるいはそれから定まる transition density）の特殊な性質によるところが多い。また D^* 上の Markov 過程の強 Markov 性の証明などもいちじるしく複雑になる（[1], [3] を見よ）。

この報告では D^* として国田と筆者[5]が一般な resolvent にたいして導入した completion を取っても定理2の結果がそのまま成立つことを示す。

そうすればD*上の強Markov過程の構成の所迄は一般論の結果がそのまゝ使えるので都合がよい。更にD*上に拡張した resolvent はRay[6]のもとの条件を満足するので報告[A]で考えるものよりも扱い易い。

目　次

1. 報告[A]の completion の要約

[A]では反射壁 Brownian motion のもとの領域Dでの resolvent density $G_\alpha(x, y)$ と transition density $p(t, x, y)$ の構成が詳しく論じてある(p. 11以後)。ここでは $G_\alpha(x, y)$ と $p(t, x, y)$ はすでにあたえられていて(ただし $x, y \in D$)十分よい性質をもつことが示された所から始める。Completion と

Ray の Markov 過程の構成については pp. 7–8 で荒筋がのべてあるが（詳しくは [1, Section 3]），それをまとめてみると次の4つのことを行っている．

(a) 関数族 $\{G_1(\cdot, y),\ y \in D\}$ にもとずく領域 D の Martin—倉持型 completion D^* の定義

(b) 先ず $G_1(x, y)$ を $\xi \in D^*$, $y \in D$ に次に $G_\alpha(x, y)$, $\alpha > 0$, を同じ所に拡張する．

(c) Transition density $p(t, \xi, y)$ を $t > 0$, $\xi \in D^*$, $y \in D$ で定義

(d) $p(t, \xi, y)$ の定める transition function $P(t, \xi, dy)$ に対応する D^* 上の Ray の Markov 過程の構成．

ここで考えているよりも一般な（もの） resolvent にたいして Martin—倉持型 completion（Section 末の注意を見よ）を導入し，拡張された領域上の Ray の Markov 過程を構成する試みは，数年前国田と筆者が行っていて [3] でかいたが，(b) の段階の所で誤りがあった．それは一般には $\alpha > 1$ のところで $G_\alpha(\xi, y)$

が substochastic condition $\alpha G_\alpha 1(\xi) \leqq 1,\ \xi \in D^*$ をみたすことが証明できないことである。この難点は今の場合は内部での conservative 性 $\alpha G_\alpha 1(x)=1,\ x\in D$ によって救われているがよい解決とは思われない。第2の点は $G_\alpha(\xi, y)$ は D^* 上の連続関数の空間 C^* をそれ自身に移さないので、compact 空間上の resolvent に関する Ray の理論 [6] がそのままでは使えない。そのため対応する transition function $P(t, \xi, dy)$ の存在と([3] のこの部分は結局正しかったように記憶するがはっきりしない)、Ray の Markov 過程の構成の議論が Ray の原論文にくらべていちじるしく複雑になるのである。今の場合福島は直接 transition density $p(t, \xi, dy)$ を構成し、それを用いて $P(t, \xi, dy)$ を定めているが、Brownian motion に固有なこと柄をかなり使っているように思われる。強 Markov 性の証明は [3] または [1, Section 3] にある。

その後国田と筆者は以上の難点が F. Knight [2] の completion を多少修正したものを用いれば一般的に解決することを示した。その要約を次節でのべ、

最後に反射壁 Brownian motion の Knight completion に対して定理2が成立することを示す.

注意. 一般に resolvent kernel $G_1(x, y)$ が今の場合程よい性質をもたないときには, 報告 [A] のように $G_1(\cdot, y)$ をそのまゝ連続的に拡張できない場合がおこる. その場合の Martin－倉持 completion は次のようにおこなう.

$\underset{\sim}{C_0}$ を D 内で compact な台をもつ連続関数全体, $\{f_n\}$ を $\underset{\sim}{C_0}$ で uniform norm について dense な列として関数族 $\{G_1 f_n(x), n=1, 2, \cdots\}$ にもとづく completion (この意味については次節を見よ) を取る. たゞし $G_1 f$, $f \in \underset{\sim}{C_0}$ が連続であることは仮定する. このやり方では kernel がなく resolvent が $G_1(x, dy)$ となっているときでも差支えない. Kernel があって適当な条件をみたせば, それが $\xi \in D^*$, $y \in D$ に迄ある自然な仕方で唯一通りに拡張できる. また今の場合のように (通常関数論等であつかう場合はすべてそうであるが), $G_1(x, y)$ がよい性質をもてば [A] でえた拡張と同じものがえら

れる. これらについてはそのまゝの形ではないが, [4, p.509 Theorem 3, p.510 Proposition 9.3] にある.

2. F. Knight completion に関する一般的結果

D はもっと一般の空間でよいが, 簡単のために [A] と同じく R^N の有界領域としておく. まず D 上の連続関数の族に関する completion を説明する. Martin ー倉持のそれと区別する意味で completion を $\overline{D}$ とかく. これは Constantinescu – Cornea の本で Q-compactification と呼んでいるものと本質的に同じものである. $\underset{\sim}{C}$ を D 上の有界連続関数全体, $\underset{\sim}{E}$ を $\underset{\sim}{C}$ の部分族で D の各点を分離しかつ uniform norm で dense な可算列を含むものとする. $\mathcal{U}$ を pseudo metric の集まり $|f(x)-f(y)|$, $f\in\underset{\sim}{E}$ によって生成される一様構造, $\overline{D}$ を $\mathcal{U}$ に関する D の completion とする. これを $\underset{\sim}{E}$ にもとずく D の completion ということにする. 仮定から $\overline{D}$ は D の metric completion で次のことがいえる. $\overline{\mathcal{J}}$ を $\overline{D}$ の一様位相, $\mathcal{J}$ を D の

もとの位相とする。

<u>Lemma</u> (i) $\overline{D}$ compact, metric space. (ii) A が J-compact (J-Borel) なら $\overline{J}$-compact ($\overline{J}$-Borel). (iii) $\overline{f}$ が $\overline{J}$-連続なら $\overline{f}$ の D への制限 $f = \overline{f}|_D$ は J-連続。集合 $\overline{A}$ が $\overline{J}$-Borel なら $A = \overline{A} \cap D$ は J-Borel.

今 $\underset{\sim}{E}$ と定数 1 で張られる closed algebra $\underset{\sim}{B} = cl(\underset{\sim}{E} \vee 1)$ を考える。$\underset{\sim}{B}$ の元はすべて $\overline{D}$ 上に連続拡大できるが、その全体は $\overline{D}$ 上の連続関数の全体 $\underset{\sim}{\overline{C}}$ と一致する (Stone-Weierstrass の定理).

さて G_α を D 上の resolvent (density はなくてもよい。その場合は $G_\alpha = G_\alpha(x, dy)$) で次の条件をみたすものとする。

<u>D. Ray の条件</u> (1) G_α は $\underset{\sim}{C}$ をそれ自身にうつす。(2) $\underset{\sim}{C}$ の正の関数全体 $\underset{\sim}{C}^+$ の可算部分族 $\underset{\sim}{C_1}$ で D の点を分離し、$\underset{\sim}{C_1} \ni f$ に対して $\alpha G_{\alpha+1} f \leqq f$ をみたすものが存在する。

一般性を失わずに $\underset{\sim}{C_1} \ni 1$ とできるからこれも仮定する。上の条件の (2) はたとえばふつう仮定される

(2)′ $\alpha G_\alpha f(x) \longrightarrow f(x)$, $f \in \underset{\sim}{C}$.

よりもずっと弱い。

<u>Fundamental lemma</u> (F. Knight) G_α を Ray の resolvent とする。そのとき $\underset{\sim}{C}_1$ を含む $\underset{\sim}{C}$ の closed subalgebra $\underset{\sim}{A}$ で G_α に対して不変，かつ G_α による値域 $G_\alpha(\underset{\sim}{A})$ (α に無関係) がその中で dense な可算部分族を含むようなものが存在する。

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ を $(0,\infty)$ で dense な数列，$S_0 = \underset{\sim}{C}_1$ とおく。$S_0, \cdots, S_n$ が定義されたとして

$$S_{n+1} = S_n \vee G_{\alpha_1}(S_n) \vee \cdots \vee G_{\alpha_{n+1}}(S_n)$$

(但し $\vee$ は algebra を生成する記号)

とおく。$\underset{\sim}{A} = \mathscr{C}\left(\bigcup_n S_n\right)$ が求めるものの1つである。

<u>注意</u> 一般に $\underset{\sim}{A}$ は様々に取りうる。場合に応じて都合のよいものをえらべばよい。例えば滑らかな境界 ∂D (in R^N) をもつ吸収壁 Brownian motion の G^0_α については，$G^0_\alpha(\underset{\sim}{C}) \subseteq \underset{\sim}{C}_\infty$ (∞ で 0 になる連続関数全体) であるから，$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{C}$ にとれる。また反射壁 Brownian motion で ∂D が滑らかなら

$$\underset{\sim}{A} = \{\partial D \text{ に連続的に拡張できる } f \in \underset{\sim}{C} \text{ の全体}\}$$

にとれることは [1, Section 1] から分る。そのとき Δ 人

下にのべる Knight completion は $D \cup \partial D$ と同相になる。

今前の $\underset{\sim}{E}$ として $G_\alpha(\underset{\sim}{A}) \cup \underset{\sim}{C}_1$ をとり、それにもとづく completion を Knight completion とよぶ。このとき $\overline{f} \in \underset{\sim}{\overline{C}}$ にたいして $G_\alpha f$ ($f = \overline{f}|_D$) は $\overline{D}$ 上に連続的に拡張されることが容易に分る。それを $\overline{G_\alpha f}$ とかけば、Riesz の定理から measure $\overline{G}_\alpha(\xi, \overline{A})$, $\xi \in \overline{D}$, $\overline{A} \subset \overline{D}$ が定まって

$$\overline{G_\alpha f(\xi)} = \overline{G}_\alpha \overline{f}(\xi) \underset{(def)}{\equiv} \int_{\overline{D}} \overline{f}(\eta)\, \overline{G}_\alpha(\xi, d\eta).$$

証明は略するが、$\overline{G}_\alpha$ は G_α の拡張であって、$\overline{D}$ 上で Ray の条件をみたす resolvent であることが分る。（もとの G_α が (2)′ をみたしても $\overline{G}_\alpha$ は一般に (2) はなりたたない。これは [A] p. 8 の branching points がでてくることに対応する。）したがって Ray [6] の理論により、対応する transition function $\overline{P}(t, \xi, \overline{A})$ と Ray の Markov 過程が構成できる。詳しくは [5], [6] を参照されたい。

$\overline{P}(t, \xi, \overline{A})$ は次のようなものとして唯一つ定まる；

(1) $$\overline{G}_\alpha(\xi, \overline{A}) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}\,\overline{P}(t, \xi, \overline{A})\,dt,$$

(2) $\overline{\underline{C}} \ni \overline{f}$ にたいして、$\overline{P}_t \overline{f}(\xi)$ が t について右連続

さて $x \in D$ のとき $\overline{G}_\alpha(x, \overline{D} \setminus D) = 0$ であるから、ほとんどすべての (Lebesgue measure on R^1) の t について $\overline{P}(t, x, \overline{D} \setminus D) = 0$ である。しかし一般にこれから $\overline{P}(t, x, \overline{D} \setminus D) = 0$ for all t はいえないので、もとの G_α が D 上の transition function $P(t, x, A)$ の Laplace 変換になっているとは限らない。たとえば $[0, 1)$ (mod 1) 上の等速運動を $(0, 1)$ 上に制限したものの resolvent を考えればよい。

G_α にもう1つの仮定をおく。

<u>条件(P)</u> G_α は D 上のある transition function $P(t, x, dy)$ の Laplace 変換になっており、この $P(t, x, dy)$ は $f \in \underline{C}$ において $P_t f(x)$ が t について右連続になっているものとする。

この時

(i) $\overline{P}$ は P の拡張である。すなわち $x \in D$ ならば

$$\overline{P}(t, x, \overline{A}) = P(t, x, \overline{A} \cap D).$$

しかし $\xi \in \overline{D}$ については $\overline{p}(t, \xi, \overline{D} \setminus D) = 0$ は必ずしもいえない。これは Martin-今持 completion と異なる点である。その理由は一般に Martin-今持より強い metric で completion しているために、ある意味で余分な点がつけ加わったことによる。この点は次のように解決される。

$\overline{D}_R = \{ \xi \in \overline{D} \mid \overline{G}_\alpha(\xi, \overline{D} \setminus D) = 0 \}$ とおく。$\overline{D}_R$ は D を含むが更に次のことがいえる。

(ii) $\xi \in \overline{D}_R$ ならば、すべての $\alpha > 0$, $t > 0$ にたいして $\overline{G}_\alpha(\xi, \overline{D} \setminus D) = \overline{p}(t, \xi, \overline{D} \setminus D) = 0$.

(iii) $\overline{D}_R$ の点から出発したほとんどすべての paths は $\overline{D} \setminus \overline{D}_R$ を決して訪問しない。したがって特に D から出発する process にたいして $\overline{D} \setminus \overline{D}_R$ の点は全く影響がない。

3. 反射壁 Brownian motion の場合の Knight completion

$G_\alpha(x, y)$ を反射壁 Brownian motion の resolvent density とする。Ray の条件は明らかに満足されているから (p. 4, 定理 1 の (3))、この G_α にもとづく1つの

Knight completion を $\overline{D}$ とする。一般性を失わずに completion の base $\underset{\sim}{A}$ は $\underset{\sim}{C}_0$ を含むとしてよい（これは節尾，注意3にだけ関係する）。$\overline{G_\alpha}$ から定まる $\overline{P}$ とそれに対応する Ray の Markov 過程 $\underset{\sim}{X}$ を考える。定理1 (5) により条件 (P) がみたされるから $\overline{P}$ は内部での transition density $p(t,x,y)$ から定まる transition function の拡張になっていることを注意しよう。$\underset{\sim}{X}$ が定理2(2)の命題(a)(c)(d)をみたすことは一般論における結論である。ただし D_1^* の代りに $\overline{D_R}$ での non-branching point の全体 $\overline{D_1}$ をとる。(e) の証明は[1]のまゝである。

定理2(1)の前半は $\xi \in \overline{D_R}$ のとき，$A \subset D$ にたいして

$$\overline{P}(t+s, \xi, A) = \int_D \overline{P}(t, \xi, dy) \int_A p(s, y, z)\, dz$$

であるから，$\overline{P}$ が D 上の Lebesgue measure について絶対連続になることから出る。この場合 $T.3$) がすべての y で成立つような density $\overline{p}(t, \xi, y)$ をえらぶためには resolvent kernel を $\overline{D_R}\times D$ に拡張したうえ[1]で Martin 一全境の場合にした議論をくり返す必要があるが，そのことは重要でないと思う（注

章4を見よ)．定理2(1)の後半は一般論では右連続のみが主張されているが，(2)の命題(b)がいえれば明らかである。

結局定理2(2)の命題(b)が定理2の本質的部分(反射壁 Brownian motion についての)ということになるが，それには[1]における証明が Knight completion についてもそのまま保たれることを検証すればよい。[1]の証明で completion に関連する重要な事柄は次の3つである。

(a) $\overline{D}$ が内部での transition function P の拡張であること。

(b) $G_\alpha(x,y)$ が $\overline{D}_R \times \overline{D}_R$ に都合よく拡張されること。

(c) $\overline{P}$ に関して 1-excessive な関数が $D \cup \overline{D}_1$ 上の $\overline{G}_1$-potential として一意に表現されること([A, p.9, 定理4] または [1, Section 4, Theorem 3])。

(a) はすでに注意した。(C) は[1]と同様に証明される。以下 (b) についてのべる。

$G_\alpha(x,y)$ の $\overline{D}_R \times \overline{P}_R$ への拡張　前節末尾の(ii)または(iii)により，$\overline{G}_\alpha$ ($\overline{P}$) は $\overline{D}_R$ だけで考えても resolvent (transition function) になっているから，今後つねに $\overline{D}_R$ 上で考えることにして同じ記号を用いる．$\overline{P}$ が P の拡張になっていることから，$\overline{D}_R$ で [1] の Lemma 4.1 が成立する．すなわち

(i) D 上の関数 u が P に関して α-excessive ならば，$\overline{D}_R$ 上の $\overline{P}$ に関して α-excessive な関数 $\overline{u}$ に一意的に拡張できる．

(ii) $\overline{u}_1$，$\overline{u}_2$ が $\overline{P}$ に関して $\overline{D}_R$ 上で α-excessive で D 上で殆んどいたるところ (Lebesgue measure) 一致すれば，$\overline{u}_1$ と $\overline{u}_2$ は一致する．

これは

$$(*) \quad \overline{u}(\xi) = \lim_{t\to 0} e^{-\alpha t}\int_D \overline{P}(t,\xi,dz)\,u(z), \qquad \xi \in \overline{D}_R$$

で与えればよい。この右辺は $t\to 0$ のとき単調増加である．

さて $G_\alpha(x,y)$ が x に関し α-excessive (P) だから，$\overline{D}_R$ 上で $\overline{P}$ に関し α-excessive な $\overline{G}_\alpha(\xi,y)$ に拡

張できる。そのとき $A \subset D$ について $\overline{G}_\alpha(\xi, A)$ も α−excessive ($\overline{P}$) であるから

$$\int_A \overline{G}_\alpha(\xi, y)dy = \lim_{t \to 0} e^{-\alpha t}\int_D \overline{P}(t,\xi,dz)\int_A G_\alpha(z,y)dy$$

$$= \overline{G}_\alpha(\xi, A)$$

となって $\overline{G}_\alpha(\xi, y)$ は $\overline{G}_\alpha(\xi, A)$ の density であることが分る。また $\overline{G}_\alpha(\xi, y)$ が y に関し α−excessive ($\overline{P}$) も容易に分るから、再び (*) を用いて $\overline{G}_\alpha(\xi, \eta)$, ξ, $\eta \in \overline{D}_R$ がえられる。これが一方をとめたとき他方について $\overline{D}_R$ 上で α−excessive ($\overline{P}$) であること、ξ, η について対称なことおよび拡張の一意性が容易に知られる。

若干の注意を加える。

<u>注意1</u>　[A] では先ず resolvent kernel (G_1 つぎに一般の G_α) を $D^* \times D$ に拡張することから出発したが、われわれの場合は kernel の拡張は最後でかつ $\overline{D}_R \times \overline{D}_R$ にただちに拡張される。

<u>注意2</u>　上にのべた拡張は resolvent kernel がある場合にはいつでも成り立つ一般的なことである。しか

し kernel が対称でない場合に y についての拡張は別の completion (co-resolvent に関するもの) でえられた境界においておこなわれる。

注意 3　上の第一段階の拡張が連続的な拡張であるかどうかわからない。しかし $\underset{\sim}{A} \supset \underset{\sim}{C_0}$ の仮定から $\overline{G_\alpha}(\xi, y)$, $\xi \in \overline{D_1} \setminus D$ が y について α-harmonic なことが次のようにして示される。

$\overline{G_1}(\xi, y)$ $(, \xi \in \overline{D_1} \setminus D,)$ が 1-harmonic なことを示そう。D^* を (A) の Martin-倉持 completion とする。$x_n \longrightarrow \xi$ in $\overline{D}$ のとき部分列が $x_{n'} \longrightarrow \exists \xi'$ in D^* で $G_1^*(\xi', y)$ は y に関し 1-harmonic である。$f \in \underset{\sim}{C_0}$ とする。$G_1 f$ は $\overline{D}$ 上に連続拡張をもち、それを $\overline{G_1 f}$ でかくと

$$\overline{G_1 f}(\xi) = \lim_{n \to \infty} G_1 f(x_n)$$

である。ξ が non-branching なことと、$\overline{D_R}$ にぞくすることから次の式がしたがう。

$$\overline{G_1 f}(\xi) = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \overline{G}_{\alpha+1} \overline{G_1 f}(\xi)$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \alpha \overline{G}_{\alpha+1} G_1 f(\xi) = \overline{G}_1 f(\xi).$$

一方 $G_1^* f(\xi') = \lim_{n' \to \infty} G_1 f(x_{n'}')$ だから

$$G_1^* f(\xi') = \overline{G}_1 f(\xi), \quad f \in \underset{\sim}{C}_0.$$

これから殆んどすべての y にたいし $G_1^*(\xi, y) = \overline{G}_1(\xi, y)$ であるが，両辺が 1-excessive であるからすべての y でひとしい．∴ $\overline{G}_1(\xi, y)$ は 1-harmonic (in y) である．

任意の $\alpha > 0$ に対しては $\overline{G}_\alpha(\xi, y)$ に関する resolvent 方程式を用いるか，$G_\alpha(x, y)$ にもとずく α-次の Martin-倉持 completion を用いればよい．

<u>注意 4</u>　$\overline{P}(t, \xi, dy)$ の density $\overline{p}(t, \xi, y)$ がすべての y で T. 3) をみたすように定めるには次のように行えばよい．[1] の Section 3 で $G_\alpha^*(\xi, y)$ から $p(t, \xi, y)$ を定めるところで使うことは α-harmonic という性質と resolvent 方程式のみであるから，$\xi \in \overline{D}_1$ については注意 3 により同じように $\overline{p}(t, \xi, y)$ が定まる．$\xi \in \overline{D}_R \setminus \overline{D}_1$ については ξ における branching measure で平均すればよい．

<u>注意 5</u>　Martin-倉持 completion に関する G_1^*-potential による表現定理 [A, p.9, 定理4] の一意性と，Knight completion に対するそれ [p. 40, (c)] を合せると D_1^* と $\overline{D}_1$ が one-to-one に対応することが分る．注意 3 はこれから

も示される。

<u>注意 6</u>　$\eta \,(\in \overline{D}_R)$ を固定したとき $\overline{G}_\alpha(\xi,\eta)$ は $\overline{D}_R$ 上で ξ について下に半連続になる。これを使えば，$\overline{D}_1 \ni \xi$ のとき $\overline{G}_\alpha(\xi,\eta)$ は $\overline{D}_R \setminus \{\xi\}$ において η の関数として "$\underset{\sim}{X}$ に関して α-harmonic" なことが一般論として示される（[4, p.499] と同じにやればよい）。これは再び注意 3 の結果を含み，関数論における full-harmonic の概念を α 次で考えたものになっている。なおこの事実は Martin-倉持 の completion では $\alpha = 1$ についてのみいえると思われる。