数理解析研究所講究録
第27巻 1967年 31-43

形式的ベイズ解の許容性について

大阪市大　橋本　勲

序論　これは[1]を厳密にしたものである．どの点がそうなっているかをいう．i) prior measureが improper prior measure に近ずく意味をはっきりさせた．ii) [1]の§3以下の仮定と剰余項の吟味をはっきりさせた．また[1]には次のような難点があった．i) Lebesgue measureに対する形式的ベイズ解の許容性は§4で述べる普通に考えられる例では[1]のある条件が成立せず示されない．それがどの点にあり，どう改良したかは§4の終りで述べる．ii) [1]の次の定理はまちがいである．任意のコンパクトな閉包をもつ開集合Sと任意の$\varepsilon>0$に対して，$\delta>0$と prior probability measure ξが存在し，1° ξが Lebesgue measure lに関して絶対連続．2° $\xi(S)\geq\delta$．3° $\int\rho(\omega,d^0)d\xi\leq\inf_{d\in D}\int\rho(\omega,d)d\xi+\varepsilon\delta$なる条件を$d^0$が満足するならば，$d^0$は$l$-almost admissibleである。その反例はH. Kudoによって与えられた．それを言うために定理を変形する．その変形は [0] p.6 (2)になる．もう少し変形して，

$$(1)\quad \liminf_{n\to\infty}\frac{\rho(\xi^{(n)},d^0)-\inf_{d\in D}\rho(\xi^{(n)},d)}{\xi^{(n)}(S)}=0$$

そこで，$\Omega=[0,1]$，$D=\{d_0, d_1\}$としρを次のように定義する．Ω_1をΩの中央部の巾$\frac{1}{3}$の開区間とし，Ω_2を残った二つの閉区間の中央部の巾$\frac{1}{2\cdot 3^2}$の

開区間とし，次に残った四つの閉区間の中央部の巾$\frac{1}{5}$の開区間とする。この操作を限りなく繰り返す．$E = \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots$ ，$E_n = \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots + \Omega_n$ とする．$\rho(\omega, d_0) \equiv 1$ ，$\rho(\omega, d_1) = \chi_E(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{if } \omega \in E \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ とする。明らかにすべての ω に対して，$\rho(\omega, d_1) \leqq \rho(\omega, d_0)$ かつ $\Omega - E$ 上で $\rho(\omega, d_1) < \rho(\omega, d_0)$．$l(\Omega - E) = \frac{1}{2}$ である．すなわち d_0 は *l-almost admissible* でない．しかるに，$\xi^{(n)}(F) = C_n \int_F \chi_{E_n}(\omega)\, d\omega$ （$C_n^{-1} = \int_\Omega \chi_{E_n}(\omega)\, d\omega$ ）とすれば，

$$\rho(\xi^{(n)}, d_0) - \inf_d \rho(\xi^{(n)}, d) = \rho(\xi^{(n)}, d_0) - \rho(\xi^{(n)}, d_1)$$
$$= C_n \int_\Omega \chi_{E_n}(\omega)\, d\omega - C_n \int_\Omega \chi_{E \cap E_n}(\omega)\, d\omega = 0.$$

任意のコンパクトな閉包をもつ開集合 S をとれば，$E \cap S \neq \phi$． 故に，

$$\xi^{(n)}(S) = C_n \int_S \chi_{E_n}(\omega)\, d\omega = C_n \int \chi_{E_n \cap S}(\omega)\, d\omega \longrightarrow 2 \int \chi_{E \cap S}(\omega)\, d\omega \neq 0.$$

すなわち(1)の条件がみたされることになり，d_0 が *l-almost admissible* であることになる．ところが d_0 はそうでなかった．

§1では[0]と少し違った記号を用いるので記号を説明する．§2では決定関数が許容的であるための1つの十分条件を上げる．その他のこの種の定理は[0]を参照．§3では[1]に従って距離 m，分離性を定義し，§2の定理を評価していく．そして§4では例をあげる．

§1．（$\mathfrak{X}$, $\mathcal{B}$, λ, Ω, $\mathcal{C}$, p, D, L）を統計的決定問題とよぶ．ただし，$\mathfrak{X}$ はある集合，$\mathcal{B}$ は $\mathfrak{X}$ の部分集合からなる σ 体，λ は $\mathcal{B}$ 上の σ 有限測度，Ω は R^k，$\mathcal{C}$ はボレル集合からなる σ 体，p は $\mathfrak{X}$ 上の λ に関する分布密度関数，D は $\mathfrak{X}$ から A（ある集合）への対応全体とし，L は $\Omega \times A$ 上で定義された非負関数である．危険関数は $\rho(\omega, d) = E_\omega L(\omega, d(x)) = \int_{\mathfrak{X}} L(\omega, d(x))\, p(x|\omega)\, d\lambda$ である．以後，決定問題を単に (Ω, D, ρ) とかく．

と上に $\int_\Omega p(x|\omega)\,d\xi<\infty$ a.e. λ なる非負測度 ξ を考える．ξ を prior measure という．Ξ を有限 prior measures の全体とする．また $\xi(\Omega)=\infty$ のとき ξ を improper (or unfounded) prior measure という．H を σ 有限 improper prior measures の全体とする．以後 ξ と書けば Ξ の元であり，η と書けば H の元である．平均危険関数は $\rho(\xi,d)=\int_\Omega \rho(\omega,d)\,d\xi$ とかく．事後確率分布を $\eta_x(\omega)=\dfrac{p(x|\omega)\,\eta(\omega)}{\int_\Omega p(x|\omega)\,d\eta}$ とかく．

形式的ベイズ解の定義は [0] P.14 を参照．

§2．[0] P.5 定理 3.2 の必要性の証明は次の定理の証明と同様にして出来る．また次の定理は定理2.2を証明するのに用いる．

定理 2.1 μ を Ω 上の σ 有限測度とし，$\mathcal{K}=\{\Omega_0\subset\Omega:\ \mu(\Omega_0)>0\}$ とする．そのとき，d^0 が，任意の $\Omega_0\in\mathcal{K}$ に対して，$\{\xi^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在し，

$$(2)\quad \liminf_{n\to\infty}\xi^{(n)}(\Omega_0)>0$$

$$(3)\quad \liminf_{n\to\infty}\left[\rho(\xi^{(n)},d^0)-\inf_{d\in D}\rho(\xi^{(n)},d)\right]=0$$

なる条件を満足するならば，d^0 は μ-almost admissible である．

証明 d^0 が μ-almost admissible でないとすると，ある $d^*\in D$ が存在してすべての $\omega\in\Omega$ に対して $\rho(\omega,d^*)\leq\rho(\omega,d^0)$ かつ $\Omega_0'\in\mathcal{K}$ が存在して，Ω_0' 上で真の不等号が成り立つ．故に適当に十分小さい $\varepsilon>0$ をとって，$\Omega_\varepsilon=\{\omega:\ \rho(\omega,d^0)-\rho(\omega,d^*)>\varepsilon\}\in\mathcal{K}$ ならしめうる．この Ω_ε に対して (2),(3) をみたす $\{\xi^{(n)}\}$ が存在する．(2) から十分大きい n に対して，$\xi^{(n)}(\Omega_\varepsilon)\geq\delta>0$．ところが，$\rho(\xi^{(n)},d^0)-\inf_d\rho(\xi^{(n)},d)\geq\rho(\xi^{(n)},d^0)-\rho(\xi^{(n)},d^*)>\varepsilon\delta>0$．これは(3)に矛盾する．(終)

次にここで用いる主要定理を述べる．

<u>定理</u>2.2 l を E 上の Lebesgue 測度とし，$\Lambda=\{S\subset\Omega:$ open sets with compact closure$\}$ とする．そのとき d° が，任意の $S\in\Lambda$ に対して，$\{\xi^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在して

(4) すべての n に対して $\xi^{(n)}$ は l に関して絶対連続である．($\xi^{(n)}\ll l$ とかく．) その Radon-Nikodym derivative $\frac{d\xi^{(n)}}{dl}$ を $g^{(n)}$ とする．

(5) すべての n に対して $|g^{(n)}(\omega)|\leqq Q(\omega)$ ($\omega\in S$) となる，可積分関数 Q が存在する．

(6) $\lim_{n\to\infty} g^{(n)}(\omega)=c$ (定数) for $\omega\in S$ $(c>0)$

(7) $\liminf_{n\to\infty}[\rho(\xi^{(n)},d^\circ)-\inf_{d}\rho(\xi^{(n)},d)]=0$

を満足していれば，d° は l- almost admissible である．

証明 $\Omega=R^k$ であった．$\Omega=R^1$ のとき示せば十分である．定理2.2の仮定から定理2.1の仮定がでることを示す．密度定理から任意の $\Omega_0\in\mathfrak{F}$，任意の $\omega\in\Omega_0$ に対して，$I_h=(\omega-h,\omega+h)\in\Lambda$ が存在し，$l(\Omega_0\cap I_h)>0$．この I_h に対して (4)～(7) をみたす $\{\xi^{(n)}\}$ が存在する．この $\{\xi^{(n)}\}$ を定理2.1の $\{\xi^{(n)}\}$ と考えれば，Fatou の Lemma を用いて，

$$\liminf_{n\to\infty}\xi^{(n)}(\Omega_0)\geqq\liminf_{n\to\infty}\xi^{(n)}(\Omega_0\cap I_h)=\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega_0\cap I_h}g^{(n)}(\omega)\,dl$$
$$\geqq c\cdot l(\Omega_0\cap I_h)>0$$

故に (2) がでる． (3)は(7)と同じである．(終)

<u>§3</u>．(Ω,D,ρ) と $\xi\in\Xi$ とが与えられているとする．従って ξ に対する形式的ベイズ解 d° は決まる．以後この d° が許容的(殆んど)であるかどうかを判定する見易い定理を定理2.2に基づいて出すのが目的である。

そのためにまず，Ξ に<u>距離</u> m を次のように定義する(by Matusita)．

(8) $m(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) = \int_\Omega \left[\sqrt{\frac{d\xi^{(1)}}{d\xi}} - \sqrt{\frac{d\xi^{(2)}}{d\xi}}\right]^2 d\xi$ for $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} \in \Xi$

ただし，$\frac{d\xi^{(i)}}{d\xi}$ $(i=1,2)$ は Radon-Nikodym derivative である．

次に，Ξ と H との<u>分離</u>m^*を次のように定義する．$\xi \in \Xi$，$\eta \in H$ に対して，

(9) $m^*(\xi, \eta) = E_{P_\xi} m(\xi_x, \eta_x)$

ただし，P_ξ は $\int_\Omega p(x|\omega) d\xi$ で，E_{P_ξ} は P_ξ での平均を表わす．ξ_x，η_x が有限測度（実は確率測度）であるから，$m(\xi_x, \eta_x)$ が定義できることに注意．

定理2.2を用い易い形にするというのはそれに含まれている条件(7)をm^*で表現すること（第I段階），m^*を評価すること（第II段階）である．

I．$\{\xi^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$ に対応するベイズ解の列を $\{d_n^*\}$ とする．nを1つ固定して，$L(\omega, d^0(x))$ と $L'(\omega, d^0(x))$ を d_n^* のまわりでテーラー展開する．

(10) $L(\omega, d^0(x)) = L(\omega, d_n^*(x)) + (d^0(x) - d_n^*(x)) L'(\omega, d_n^*(x)) + \frac{1}{2}(d^0(x) - d_n^*(x))^2 L''(\omega, d_n^*(x))$
$\qquad + o(\omega, |d^0(x) - d_n^*(x)|^2)$

(11) $L'(\omega, d^0(x)) = L'(\omega, d_n^*(x)) + (d^0(x) - d_n^*(x)) L''(\omega, d_n^*(x)) + o(\omega, |d^0(x) - d_n^*(x)|)$

ただし，L'，L'' はそれぞれ $L(\omega, a)$ の a に関する1，2回微分を表わす．

$\varepsilon_1 = o(\omega, |d^0(x) - d_n^*(x)|)$，$\varepsilon_2 = o(\omega, |d^0(x) - d_n^*(x)|^2)$ とおく．

<u>補題</u> 3.1

(12) 各$\omega \in \Omega$ に対して，$L(\omega, a)$ は a に関して2階連続的微分可能．

(13) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} P_{\xi^{(n)}}(x) \int_\Omega \varepsilon_2 \, d\xi_x^{(n)} \, d\lambda = 0$

(14) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} P_{\xi^{(n)}}(x) \frac{\int_\Omega \varepsilon_1^2 \, d\xi_x^{(n)}}{\int_\Omega L''(\omega, d_n^*(x)) d\xi_x^{(n)}} \, d\lambda = 0$

(15) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} P_{\xi^{(n)}}(x) \frac{\left[\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) d\xi_x^{(n)}\right]\left[\int_\Omega \varepsilon_1 \, d\xi_x^{(n)}\right]}{\int_\Omega L''(\omega, d_n^*(x)) d\xi_x^{(n)}} \, d\lambda = 0$

$$M^{(n)}(x)=\frac{\int_\Omega L'^2(\omega,d^0(x))\,d(\xi_x^{(n)}+\eta_x)}{\int_\Omega L''(\omega,d_n^*(x))\,d\xi_x^{(n)}}\ ,\quad N^{(n)}(x)=p_{\xi(n)}(x)\cdot m(\xi_x^{(n)},\eta_x)$$ とおく.

(16) $\lim_{n\to\infty} M^{(n)}(x)=K$ (xと無関係) $<\infty$ a.e. λ

(17) $\lim_{n\to\infty} N^{(n)}(x)=J(x)<\infty$ a.e. λ.

(18) 各nに対して $|M^{(n)}(x)\cdot N^{(n)}(x)|\leqq F(x)$ となる，可積分関数Fが存在する.

そのとき，

(19) $\liminf_{n\to\infty}\,[\rho(\xi^{(n)},d^0)-\inf_{d\in D}\rho(\xi^{(n)},d)]\leqq K\cdot\lim_{n\to\infty} m^*(\xi^{(n)},\eta)$

(損失関数Lが quadratic ならば (12)〜(15) は明らかに成立する.)

証明 $\rho(\xi^{(n)},d)-\inf_{d\in D}\rho(\xi^{(n)},d)=\rho(\xi^{(n)},d)-\rho(\xi^{(n)},d_n^*)$

$$=\int_{\mathcal{X}} p_{\xi(n)}(x)\left\{\int_\Omega[L(\omega,d^0(x))-L(\omega,d_n^*(x))]\,d\xi_x^{(n)}\right\}d\lambda(x)$$

(10) から, $L(\omega,d^0(x))-L(\omega,d_n^*(x))=(d^0(x)-d_n^*(x))L'(\omega,d_n^*(x))+\frac{1}{2}(d^0(x)-d_n^*(x))^2L''(\omega,d_n^*(x))$

$+\varepsilon_2$

(仮定(12)により (10), (11)式は成り立つ). d_n^*が$\xi^{(n)}$のベイズ解であるから,

$\int_\Omega L'(\omega,d_n^*(x))\,d\xi_x^{(n)}=0$. この事実を用いると,

$$\int_\Omega[L(\omega,d^0(x))-L(\omega,d_n^*(x))]\,d\xi_x^{(n)}=\frac{1}{2}(d^0(x)-d_n^*(x))^2\int_\Omega L''(\omega,d_n^*(x))\,d\xi_x^{(n)}$$
$$+\int_\Omega\varepsilon_2\,d\xi_x^{(n)} \quad\cdots\cdots\cdots ①$$

(11) から, $(d^0(x)-d_n^*(x))\cdot\int_\Omega L''(\omega,d_n^*(x))\,d\xi_x^{(n)}=\int_\Omega L'(\omega,d^0(x))\,d\xi_x^{(n)}-\int_\Omega\varepsilon_1\,d\xi_x^{(n)}$

$$d^0(x)-d_n^*(x)=\frac{\int_\Omega L'(\omega,d^0(x))\,d\xi_x^{(n)}-\int_\Omega\varepsilon_1\,d\xi_x^{(n)}}{\int_\Omega L''(\omega,d_n^*(x))\,d\xi_x^{(n)}} \quad\cdots\cdots\cdots ②$$

$\int_\Omega L''(\omega,d_n^*(x))\,d\xi_x^{(n)}=0$ のとき, $\rho(\xi^{(n)},d^0)-\inf_{d}\rho(\xi^{(n)},d)\equiv 0$ となり (7) は trivial になる. だから $\int_\Omega L''(\omega,d_n^*(x))\,d\xi_x^{(n)}\neq 0$ のときだけを考える.

②を①に代入して

$$\int_\Omega [L(\omega, d^0(x)) - L(\omega, d_n^*(x))] d\xi_x^{(n)} = \frac{1}{2} \frac{[\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) d\xi_x^{(n)} - \int_\Omega \varepsilon_1 d\xi_x^{(n)}]^2}{\int_\Omega L''(\omega, d_n^*(x)) d\xi_x^{(n)}} + \int_\Omega \varepsilon_2 d\xi_x^{(n)}$$

故に，$\liminf_{n\to\infty} [\rho(\xi^{(n)}, d^0) - \inf_d \rho(\xi^{(n)}, d)]$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} P_{\xi^{(n)}}(x) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \frac{[\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) d\xi_x^{(n)} - \int_\Omega \varepsilon_1 d\xi_x^{(n)}]^2}{\int_\Omega L''(\omega, d_n^*(x)) d\xi_x^{(n)}} + \int_\Omega \varepsilon_2 d\xi_x^{(n)} \right\} d\lambda$$

(13)を用いると

$$= \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{X}} P_{\xi^{(n)}}(x) \frac{[\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) d\xi_x^{(n)}]^2 - 2[\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) d\xi_x^{(n)}][\int_\Omega \varepsilon_1 d\xi_x^{(n)}] + [\int_\Omega \varepsilon_1 d\xi_x^{(n)}]^2}{\int_\Omega L''(\omega, d_n^*(x)) d\xi_x^{(n)}} d\lambda$$

(14)，(15)を用いると

$$= \frac{1}{2} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} P_{\xi^{(n)}}(x) \frac{[\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) d\xi_x^{(n)}]^2}{\int_\Omega L''(\omega, d_n^*(x)) d\xi_x^{(n)}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

d^0がηに対する形式的ベイズ解であるから，$\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) d\eta_x = 0$．この事実を用いて③の分子を変形すると

$$[\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) d\xi_x^{(n)}]^2 = [\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) (d\xi_x^{(n)} - d\eta_x)]^2$$

$$= [\int_\Omega L'(\omega, d^0(x)) (\sqrt{d\xi_x^{(n)}} + \sqrt{d\eta_x})(\sqrt{d\xi_x^{(n)}} - \sqrt{d\eta_x})]^2$$

Schwarzの不等式から

$$\leqq \int_\Omega L'^2(\omega, d^0(x)) (\sqrt{d\xi_x^{(n)}} + \sqrt{d\eta_x})^2 \cdot \int_\Omega (\sqrt{d\xi_x^{(n)}} - \sqrt{d\eta_x})^2$$

$\frac{d\xi_x^{(n)} + d\eta_x}{2} \geqq \sqrt{d\xi_x^{(n)} \cdot d\eta_x}$ を用いると

$$\leqq 2 \int_\Omega L'^2(\omega, d^0(x)) d(\xi_x^{(n)} + \eta_x) \cdot m(\xi_x^{(n)}, \eta_x)$$

故に③式は $\liminf_{n\to\infty} [\rho(\xi^{(n)}, d^0) - \inf_d \rho(\xi^{(n)}, d)]$

$$\leqq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} P_{\xi^{(n)}}(x) \frac{\int_\Omega L'^2(\omega, d^0(x)) d(\xi_x^{(n)} + \eta_x) \cdot m(\xi_x^{(n)}, \eta_x)}{\int_\Omega L''(\omega, d_n^*(x)) d\xi_x^{(n)}} d\lambda$$

$$= \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} M^{(n)}(x) \cdot N^{(n)}(x) d\lambda$$

(16), (17), (18) を用いれば

$$= K \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}} m(\xi_x^{(n)}, \eta_x) \cdot P_{\xi^{(n)}}(x)\, d\lambda$$

$$= K \lim_{n\to\infty} m^*(\xi^{(n)}, \eta) \qquad \text{(終)}$$

定理 2.2 を補題 3.1 を用いて述べると,

<u>定理</u> 3.1 仮定(12)の下で d^0 が, 任意の $S \in \Lambda$ に対して, $\{\xi^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在して, (4)〜(6), (13)〜(18) そして

$$(20) \qquad \lim_{n\to\infty} m^*(\xi^{(n)}, \eta) = 0$$

を満足するならば, d^0 はルベック測度に関して殆んど許容的である.

II. $m^*(\xi^{(n)}, \eta)$ を評価する. 各 n に対して, $\xi^{(n)} \ll \eta$ で, その Radon-Nikodym derivative $\frac{d\xi^{(n)}}{d\eta}$ を $\gamma^{(n)}$ とする. また,

$$\hat{\omega}(x) = \frac{\int_\Omega \omega\, p(x|\omega)\, d\eta}{\int_\Omega p(x|\omega)\, d\eta}$$

とする. n を1つ固定して, $\gamma^{(n)}(\omega)$, $\sqrt{\gamma^{(n)}(\omega)}$ を $\hat{\omega}$ のまわりでテーラー展開する.

$$(21) \qquad \gamma^{(n)}(\omega) = \gamma^{(n)}(\hat{\omega}) + (\omega^i - \hat{\omega}^i)\,\gamma_i^{(n)}(\hat{\omega}) + \frac{1}{2}(\omega^i - \hat{\omega}^i)(\omega^j - \hat{\omega}^j)\,\gamma_{ij}^{(n)}(\omega^*)$$

$$(22) \qquad \sqrt{\gamma^{(n)}(\omega)} = \sqrt{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})} + (\omega^i - \hat{\omega}^i)\frac{\gamma_i^{(n)}(\hat{\omega})}{2\sqrt{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})}} + \frac{1}{2}(\omega^i - \hat{\omega}^i)(\omega^j - \hat{\omega}^j)\left\{\frac{\gamma_{ij}^{(n)}(\omega^{**})}{2\sqrt{\gamma^{(n)}(\omega^{**})}} - \frac{\gamma_i^{(n)}(\omega^{**})\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega^{**})}{4[\gamma^{(n)}(\omega^{**})]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

ただし, $\gamma_i^{(n)} = \frac{\partial \gamma^{(n)}}{\partial \omega^i}$, $\gamma_{ij}^{(n)} = \frac{\partial^2 \gamma^{(n)}}{\partial \omega^i \cdot \partial \omega^j}$, $\omega = (\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^k)$

$\omega^* = \alpha\omega + (1-\alpha)\hat{\omega}$, $\omega^{**} = \beta\omega + (1-\beta)\hat{\omega}$, $0 < \alpha, \beta < 1$ である.

(21), (22) 式の右辺の第2項は i に関する和であり, 第三項は i, j に関する和であるが記号 Σ は除いておく.

$$(23) \qquad A^{(n)}(\omega, x) = \frac{1}{2}(\omega^i - \hat{\omega}^i)(\omega^j - \hat{\omega}^j)\,\gamma_{ij}^{(n)}(\omega^*)$$

$$(24) \qquad B^{(n)}(\omega, x) = \frac{1}{2}(\omega^i - \hat{\omega}^i)(\omega^j - \hat{\omega}^j)\left\{\frac{\gamma_{ij}^{(n)}(\omega^{**})}{2\sqrt{\gamma^{(n)}(\omega^{**})}} - \frac{\gamma_i^{(n)}(\omega^{**})\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega^{**})}{4[\gamma^{(n)}(\omega^{**})]^{\frac{3}{2}}}\right\}$$

$$(25)\quad R^{(n)}(\omega, x) = \frac{1}{2}(\omega^i - \hat{\omega}^i)(\omega^j - \hat{\omega}^j)\left\{ -\frac{1}{2}\frac{\gamma_i^{(n)}(\omega)\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega)}{\gamma^{(n)}(\omega)} + \frac{1}{2}\frac{\gamma_i^{(n)}(\omega^{**})\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega^{**})}{[\gamma^{(n)}(\hat{\omega})]^{-\frac{1}{2}}[\gamma^{(n)}(\omega^{**})]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\gamma_{ij}^{(n)}(\omega^{**})}{[\gamma^{(n)}(\hat{\omega})]^{-\frac{1}{2}}[\gamma^{(n)}(\omega^{**})]^{\frac{1}{2}}} + \gamma_{ij}^{(n)}(\omega^{*}) \right\}$$

とおく．また，

$$(26)\quad u_n(x) = \frac{\int_\Omega A^{(n)}(\omega, x)\, p(x|\omega)\, d\eta}{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})\cdot P_\eta(x)}$$

$$(27)\quad v_n(x) = \frac{\int_\Omega B^{(n)}(\omega, x)\, p(x|\omega)\, d\eta}{\sqrt{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})}\cdot P_\eta(x)}$$

とおく．

<u>補題</u> 3.2　(28)　すべての n に対して，$\xi^{(n)} \ll \eta$.

(29)　すべての n に対して，$\gamma^{(n)}(\omega)$ は ω に関して２階連続的微分可能．

(30)　すべての n に対して $|R^{(n)}(\omega, x)| \leqq G(\omega, x)$ となる，可積分関数 G が存在する．

$$(31)\quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} \gamma^{(n)}(\hat{\omega})\, P_\eta(x)\, u_n^2(x)\, d\lambda = 0.$$

$$(32)\quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathcal{X}} \gamma^{(n)}(\hat{\omega})\, P_\eta(x)\, v_n^2(x)\, d\lambda = 0.$$

$$(33)\quad \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\gamma_i^{(n)}(\omega)\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega)}{\gamma^{(n)}(\omega)} - \frac{\gamma_i^{(n)}(\omega^{**})\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega^{**})}{[\gamma^{(n)}(\hat{\omega})]^{-\frac{1}{2}}[\gamma^{(n)}(\omega^{**})]^{\frac{3}{2}}} \right\} = 0 \quad \text{a.e. } \lambda.$$

$$(34)\quad \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\gamma_{ij}^{(n)}(\omega^{**})}{[\gamma^{(n)}(\hat{\omega})]^{\frac{1}{2}}[\gamma^{(n)}(\omega^{**})]^{\frac{1}{2}}} - \gamma_{ij}^{(n)}(\omega^{*}) \right\} = 0 \quad \text{a.e. } \lambda.$$

ならば，

$$(35)\quad \lim_{n\to\infty} \left[m^*(\xi^{(n)}, \eta) - \frac{1}{4}\int_\Omega \frac{1}{\gamma^{(n)}(\omega)} \sum_{i,j} \gamma_i^{(n)}(\omega)\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega)\, g^{ij}(\omega)\, d\eta \right] = 0.$$

ただし，$g^{ij}(\omega) = E_\omega(\omega^i - \hat{\omega}^i)(\omega^j - \hat{\omega}^j)$ である．

証明　(29) から (21)，(22)式がでる．

$$m^*(\xi^{(n)}, \eta) = E_{P_{\xi^{(n)}}} m(\xi_x^{(n)}, \eta_x)$$

$$= 2\left\{\xi_n(\Omega) - \int_{\mathcal{X}} \frac{\left[\int_\Omega p(x|\omega)\gamma^{(n)}(\omega)\,d\eta\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_\Omega p(x|\omega)\sqrt{\gamma^{(n)}(\omega)}\,d\eta\right]}{\left[\int_\Omega p(x|\omega)\,d\eta\right]^{\frac{1}{2}}}\,d\lambda\right\} \quad \cdots\cdots ①$$

$\int_\Omega(\omega^i-\hat{\omega}^i)\,p(x|\omega)\,d\eta=0$ であることに注意して，(21) から

$$\int_\Omega p(x|\omega)\,\gamma^{(n)}(\omega)\,d\eta = \int_\Omega \gamma^{(n)}(\hat{\omega})\,p(x|\omega)\,d\eta + \int_\Omega A^{(n)}(\omega,x)\,p(x|\omega)\,d\eta$$

$$\therefore \left[\int_\Omega p(x|\omega)\,\gamma^{(n)}(\omega)\,d\eta\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})}\cdot(P_\eta(x))^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{\int_\Omega A^{(n)}(\omega,x)\,p(x|\omega)\,d\eta}{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})\cdot P_\eta(x)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})}\cdot(P_\eta(x))^{\frac{1}{2}}\,(1+u_n(x))^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots ②$$

(22) から，$\int_\Omega p(x|\omega)\sqrt{\gamma^{(n)}(\omega)}\,d\eta = \int_\Omega \sqrt{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})}\,p(x|\omega)\,d\eta + \int_\Omega B^{(n)}(\omega,x)\,p(x,\omega)\,d\eta$

$$= \sqrt{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})}\cdot P_\eta(x)\cdot(1+v_n(x)) \quad \cdots\cdots ③$$

②,③を①に代入して

$$m^*(\xi^{(n)}, \eta) = 2\left\{\xi_n(\Omega) - \int_{\mathcal{X}} \gamma^{(n)}(\hat{\omega})\cdot P_\eta(x)\,(1+u_n(x))^{\frac{1}{2}}\,(1+v_n(x))\,d\lambda\right\}$$

仮定 (31), (32) を用いると，

$$\lim_{n\to\infty} m^*(\xi^{(n)}, \eta) = 2\left\{\xi_n(\Omega) - \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{X}} \gamma^{(n)}(\hat{\omega})\cdot P_\eta(x)\left(1+\frac{1}{2}u_n(x)+v_n(x)\right)d\lambda\right\}$$

再び (21) を用いて，簡単にすると，

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\int_{\mathcal{X}} \gamma^{(n)}(\hat{\omega})\,P_\eta(x)\,u_n(x)\,d\lambda - 2\int_{\mathcal{X}} \gamma^{(n)}(\hat{\omega})\,P_\eta(x)\,v_n(x)\,d\lambda\right\}$$

$u_n(x)$, $v_n(x)$ を元に戻すと，

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{X}}\int_\Omega\left[A^{(n)}(\omega,x) - 2\sqrt{\gamma^{(n)}(\hat{\omega})}\,B^{(n)}(\omega,x)\right]p(x|\omega)\,d\eta\,d\lambda$$

$A^{(n)}(\omega,x)$, $B^{(n)}(\omega,x)$ を元に戻すと，

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathcal{X}}\int_\Omega \frac{1}{2}(\omega^i-\hat{\omega}^i)(\omega^j-\hat{\omega}^j)\left\{\gamma_{ij}^{(n)}(\omega^*) - \frac{\gamma_{ij}^{(n)}(\omega^{**})}{[\gamma^{(n)}(\hat{\omega})]^{-\frac{1}{2}}[\gamma^{(n)}(\omega^{**})]^{\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left. + \frac{\gamma_i^{(n)}(\omega^{**})\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega^{**})}{2[\gamma^{(n)}(\hat{\omega})]^{-\frac{1}{2}}[\gamma^{(n)}(\omega^{**})]^{\frac{3}{2}}}\right\}p(x|\omega)\,d\eta\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}}\int_{\Omega} (\omega^i - \hat{\omega}^i)(\omega^j - \hat{\omega}^j) \frac{\gamma_i^{(n)}(\omega)\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega)}{\gamma^{(n)}(\omega)} p(x|\omega)\, d\eta\, d\lambda$$
$$+ \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}}\int_{\Omega} R^{(n)}(\omega, x)\, p(x|\omega)\, d\eta\, d\lambda$$

仮定(30), (33), (34)から

$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{X}}\int_{\Omega} (\omega^i - \hat{\omega}^i)(\omega^j - \hat{\omega}^j) \frac{\gamma_i^{(n)}(\omega)\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega)}{\gamma^{(n)}(\omega)} p(x|\omega)\, d\eta\, d\lambda$$
$$= \frac{1}{4} \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \frac{\gamma_i^{(n)}(\omega)\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega)}{\gamma^{(n)}(\omega)} g^{ij}(\omega)\, d\eta \qquad \text{-(終)}$$

補題3.2と定理3.1から，最終目的の定理を得る．それは

<u>定理</u>3.2　仮定(12)の下でd^0が，任意の$S\in\Lambda$に対して，$\{\xi^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$ が存在して，(4)〜(6)，(13)〜(18)，(28)〜(34) そして

$$(36) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \frac{1}{\gamma^{(n)}(\omega)} \sum_{i,j} \gamma_i^{(n)}(\omega)\cdot\gamma_j^{(n)}(\omega)\cdot g^{ij}(\omega)\, d\eta = 0$$

をみたすならば，d^0はLebesgue測度lに関して殆んど許容的である．

<u>§4</u>　1つの例を与える．$\mathfrak{X}$はR^1，$\mathcal{B}$はボレル集合のなすσ体，λはルベック測度，ΩはR^1，$\mathcal{E}$はボレル集合のなすσ体，$p(x|\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-\omega)^2}{2}\right]$，損失関数は$L(\omega,a)=(a-\omega)^2$とする問題を考える．$d\eta(\omega)=d\omega$に対する形式的ベイズ解がルベック測度に関して殆んど許容的であることを定理2.2，定理3.1そして定理3.2から示されることを見る．

ηに対する形式的ベイズ解d^0を求める．$d\eta_x=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\omega-x)^2}{2}\right]d\omega$．従って，$\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-a)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(\omega-x)^2}{2}\right]d\omega = 1+(a-x)^2$．故に，$d^0(x)=x$．

先ず，定理2.2からd^0がl-almost admissibleであることが示されることをみる．一般性を失うことなくSを$(-a,a)$ $(a>0)$とできる．これに対して$\{\xi^{(n)}\}$として$\{\xi^{(\sigma)}\}$，$d\xi^{(\sigma)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}\right]$ $(\sigma^2\geqq 1)$，を考える．(4), (5)は自明である．(6)は$\lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ for $\omega\in(-a,a)$であるからよい．(7)は，$\rho(\xi^{(\sigma)},d^0)=\sigma$，$\inf_{d\in\mathcal{D}}\rho(\xi^{(\sigma)},d)=\frac{\sigma^3}{\sigma^2+1}$．従って

$\liminf_{\sigma\to\infty} [\rho(\xi^{(\sigma)}, \delta^0) - \inf_{\delta} \rho(\xi^{(\sigma)}, \delta)] = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{\sigma}{\sigma^2+1} = 0$．からみたされていることがわかる．結局，定理2.2から$\mathfrak{X}$のℓ-almost admissibleが示された。

次に，定理3.1から示されることをみる．$L(\omega, a) = (a-\omega)^2$であるから，(12)〜(15)はみたされている．

$$M^{(\sigma)}(x) = 2\left\{\frac{2\sigma^2+1}{\sigma^2+1} + \frac{x^2}{(\sigma^2+1)^2}\right\}$$

$$N^{(\sigma)}(x) = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1)}} \exp\left[-\frac{x^2}{2(\sigma^2+1)}\right] \cdot \left\{1 - \left(\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2\sigma^2}{2\sigma^2+1}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4(\sigma^2+1)(2\sigma^2+1)}\right]\right.$$

$\lim_{\sigma\to\infty} M^{(\sigma)}(x) = 4$．$\lim_{\sigma\to\infty} N^{(\sigma)}(x) = 0$ 従って，(16)，(17)はみたされている．(18)のFとして適当にV，Wをとって$\frac{W}{\sqrt{2\pi}V}\exp\left[-\frac{x^2}{2V^2}\right]$を考えればよい．そこで(20)は

$$m^*(\xi^{(\sigma)}, \eta) = 2\sigma\left\{1 - \left(\frac{4\sigma^2}{4\sigma^2+3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\sigma^2+1}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}}\right\} = 2\sigma\left\{1 - \left(1 - \frac{3}{4\sigma^2+3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}$$

$$= 2\sigma\left\{1 - \left(1 - \frac{3}{2(4\sigma^2+3)} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{4\sigma^2} + \cdots\right)\right\} \longrightarrow 0 \quad \text{as } \sigma \to \infty.$$

からみたされている．故に，定理3.1からも$\mathfrak{X}$のルベッグ測度に関しての殆んど許容性が示された．

最後に，定理3.2から示されることをみる．(28)，(29)は自明である．(30)，(33)，(34)は比較的簡単にみたされていることがわかるが，(31)，(32)は大変である．しかしみたされることはわかる．ここではそのcheckは除く．

(36)は，$\gamma^{(\sigma)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}\right]$．

$$\frac{d}{d\omega}\gamma^{(\sigma)}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{\omega}{\sigma^2}\right)\exp\left[-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}\right].$$

$$\hat{\omega}(x) = x. \qquad g(\omega) = 1.$$

従って，$\lim_{\sigma\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\gamma^{(\sigma)}(\omega)}\left[\frac{d}{d\omega}\gamma^{(\sigma)}(\omega)\right]^2 d\omega = \lim_{\sigma\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^4}\int_{-\infty}^{\infty}\omega^2\exp\left[-\frac{\omega^2}{2\sigma^2}\right]d\omega$

$= \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\sigma^2}{\sigma^3} = 0$．からみたされていることがわかる．

序論で述べた難点 i) は [1] では $M^{(n)}(x)$ が有界関数という仮定が少しきついことである。今述べた例では $M^{(n)}(x)$ が x の二次式であって有界関数にない。だからそれを止めて (16) に変えた。

参考文献

[0] 工藤弘吉：統計的決定関数の良さについて
これはこの研究会で発表される原稿である。

[1] Stein, C.: Approximation of improper prior measures by prior probability measures, Bernoulli, Bayes, Laplace. (Proc. Inter. Res. Sem.) 1965, Springer, Berlin.

[2] Stein, C.: A necessary and sufficient condition for admissibility, Ann. Math. Stat. 26 (1955) pp. 518–522.

[3] 竹内　啓：統計的推定論(II)，数学16 (1965) pp. 11–21

[4] Matusita, K.: On the theory of statistical decision functions, Ann. Inst. Stat. Math. (1952) pp. 17–35