数理解析研究所講究録
第27巻 1967年 73-87

Lagrange乗数法とAdmissibility

阪大 基礎工 石井恵一

§1. 序

ここでは，統計的決定関数と無限次元空間におけるラグランジュ乗数法との関係について報告し，その立場から決定関数の許容性の数学的構造を考察してみたい。いくつかの制約条件のもとに，目的関数の最大値や最小値を求めるとき，各制約条件にいわゆるラグランジュ乗数をかけて目的関数にくりこみ，制約条件のない場合に帰着するのが，よく知られているラグランジュ乗数法である．これを，制約条件が無限個で，変数や目的関数がなるべく一般の空間の値をとる場合に拡張することにより，抽象空間上のL.P.やNon-L.P.の理論を統一的に扱うことができる（[1], [2]）．ここでは，一般の空間上のラグランジュ乗数定理を援用して，ゲームの理論や統計的決定関数の基本的な問題を考えてみることにする．

まず，§2で抽象空間上のラグランジュ乗数法の基本的な事柄を紹介し，§3でゲームにおけるミニマックス定理への

応用を示し，§4で決定関数への応用を述べる．§4の事柄は，よく知られた事柄（たとえば[3]等）と大して異なるものではなく，やや一般的な立場から述べたものにすぎないが，ラグランジュ乗数法という簡明な手法によって機械的に結果が出てくるとともに，数学的構造も見通しよく分るので，この方法で整理してみた．

なお，ここでは，行動空間や損失関数の内部的構造と危険関数の構造とのつながりには立ち入らず，危険関数の構造が与えられた上での，いわば game theoretic な範囲に話を限ることにする。

§2. 線型空間上のラグランジュ乗数定理

最初にいくつかの言葉の定義をしておく．以下で線型空間というときには，常に実数体上のベクトル空間をさすものとする．

$\mathcal{X}$を線型空間，Xを$\mathcal{X}$の空でない凸部分集合とし，$\mathcal{Y}$を線型位相空間で，原点を頂点とする凸錐$\mathcal{C}$によって半準序が入っているものとする：すなわち，$y_1-y_2\in\mathcal{C}$のとき$y_1\geqq y_2$と定義する（ただし，反対称律："$y_1\geqq y_2$かつ$y_2\geqq y_1$なら$y_1=y_2$"は一般に成り立たない）．Xから$\mathcal{Y}$への写像φが<u>凹である</u>とは，任意のx, $x'\in X$と任意の$0\leqq\alpha\leqq 1$に対し，上の半準

序の意味で $\psi(\alpha x+(1-\alpha)x') \geqq \alpha\psi(x)+(1-\alpha)\psi(x')$（すなわち，左辺－右辺 $\in C$）が成り立つことをいう．また，Xが位相空間であるとき，$\mathcal{Y}$の任意の開集合Vに対して$\psi^{-1}(V-C)$がXの開集合となるような写像ψを，Xから$\mathcal{Y}$へのC－上半連続な写像という．特にCが原点だけから成る（これも凸錐である）ときは，普通の連続性になる．なお，ここで，記号$V-C$は，集合$\{y-y' : y\in V, y'\in C\}$の意味である．以下でも同様の記号を用いる．

定理1．Xを線型空間$\mathcal{X}$の空でない凸部分集合とし，$\mathcal{Y}$を局所凸な線型位相空間で閉凸錐Cにより半準序が定義されているものとする．ψをXから$\mathcal{Y}$への凹な写像で次の条件をみたすものとする：

（A1）．Xに適当な位相づけをすることによって，ψはXから$\mathcal{Y}$へのC－上半連続な写像にできる．

（A2）．$\mathcal{Y}$の原点の近傍Vが存在して，$\psi^{-1}(V+C)$の閉包が上の位相でcompact集合（Borel-Lebesgueの意味で）．（X自身compactならもちろんよい）．

このとき，次の関係（判定条件）がなり立つ：

（1）$x\in X$, $\psi(x)\in C$なるxが存在する $\Longleftrightarrow \inf\limits_{y^*\in C^+}\sup\limits_{x\in X} y^*(\psi(x))=0$

（2）$x\in X$, $\psi(x)\in C$なるxが存在しない $\Longleftrightarrow \inf\limits_{y^*\in C^+}\sup\limits_{x\in X} y^*(\psi(x))=-\infty$.

ここに，$\mathcal{C}^+$は，$\mathcal{Y}$上の連続線型汎関数のうち，$\mathcal{C}$上で非負値のみをとるものの全体である．

証明）．$x_0\in X$，$\psi(x_0)\in\mathcal{C}$なるx_0存在すれば，明らかに，$y^*(\psi(x_0))\geqq 0$，$\forall y^*\in\mathcal{C}^+$．故に，$y^*\equiv 0$が$\in\mathcal{C}^+$なることに注意して(1)の右辺をうる．逆に，このようなx_0が存在しないとする．集合$\mathcal{K}=\psi(X)-\mathcal{C}$を考えると，$\psi$の凹性から$\mathcal{K}$が凸集合であることが容易にわかる．仮定から$\mathcal{Y}$の原点$O_y\notin\mathcal{K}$．いま，$\overline{\psi^{-1}(V+\mathcal{C})}=X'$とおき，$\psi(X')-\mathcal{C}=\mathcal{K}'\,(\subseteq\mathcal{K})$とおくと，$\mathcal{C}$が閉なことと条件(A 1),(A 2)から，$\mathcal{K}'$が閉集合であることが容易にいえる．従って，$O_y$の近傍$V'$が存在して$V'\cap\mathcal{K}'=\phi$．$V\cap V'=V''$とおけば$V''\cap\mathcal{K}=\phi$．故に$O_y\notin\overline{\mathcal{K}}$．$\mathcal{Y}$は局所凸だから，Mazur-Bourginの定理により，強分離超平面が存在する，すなわち，$y^*\in\mathcal{Y}^*$が存在して$\sup\limits_{y\in\mathcal{K}} y^*(y)<y^*(O_y)=0$．

このy^*が$\in\mathcal{C}^+$なることは，$y^*(y)$が$\psi(X)-\mathcal{C}$上で<0かつ$\mathcal{C}$が凸錐なことから明らか．故に，このy^*に対し，$\sup\limits_{x\in X} y^*(\psi(x))<0$．$\mathcal{C}^+$は錐だから(2)の右辺をうる．（証明終り）

［注意 1］ Xの位相は，$\mathcal{X}$における線型演算とは無関係でよいので，$\mathcal{X}$が線型位相空間である必要はない．

［注意 2］．(A 1)をみたす一番弱い位相は，$\{\psi^{-1}(V-\mathcal{C})$: Vは$\mathcal{Y}$の開集合$\}$の全体をXの開基にとることであり，このとき，決定関数におけるProperty (W)は，条件(A 1),(A 2)に包含され

る.

[注意 3]. "Xが凸, ψが凹"という条件は, "任意のx, $x' \in X$と, 任意の$0 \leqq \alpha \leqq 1$に対し, $x'' \in X$が存在して$\psi(x'') \geqq \alpha\psi(x) + (1-\alpha)\psi(x')$ (Cによる半準序の意味で)"という条件 —— Xがψに関し上半凸 —— に弱めることができる. (この. とき, Xは線型空間の部分集合である必要はない). これは[3]をみて気がついた.

以上の諸注意は定理2以下においても同様にあてはまる.

定理2 (ラグランジュ乗数定理). Xを線型空間$\mathscr{X}$の空でない凸部分集合, $\mathscr{Y}$を局所凸な線型位相空間で閉凸錐Cにより半準序が定義されているものとする. ψを定理1の(A1)および(A2)をみたすXから$\mathscr{Y}$への凹写像とし, また, φをXで定義された上半連続((A1)の位相に関し)かつ凹な実数値汎関数とする. このとき, 条件$\psi(x) \in C$が空でないならば, 次の公式がなり立つ:

$$(3) \quad \sup\{\varphi(x) \mid x \in X, \psi(x) \in C\} = \inf_{y^* \in C^+} \sup_{x \in X} \{\varphi(x) + y^*(\psi(x))\}.$$

また, $\psi(x_0) \in C$なるx_0が左辺のsupをとるための必要十分条件は, $y_n^* \in C^+$なる列$\{y_n^*\}_{n=1,2,\cdots}$が存在して, $n \longrightarrow \infty$のとき

$$(4) \qquad y_n^*(\psi(x_0)) \longrightarrow 0 \qquad \text{かつ}$$

$$(5) \quad [\varphi(x_0) + y_n^*(\psi(x_0))] - \sup_{x \in X} [\varphi(x) + y_n^*(\psi(x))] \longrightarrow 0$$

となることであり，このような x_0 はかならず存在する．

証明）直積線型位相空間 $W = \mathcal{Y}\times R$ （R は実数空間，その位相は普通の Euclidean metric によるもの）を考えると，$\mathcal{Y}$，R 共に局所凸だから W も局所凸．非負実数全体を R_+ とかくと，$\tilde{C} = C\times R_+$ は W の閉凸錐．任意の実数 k に対して，写像 $h(x) = (\psi(x),\ \varphi(x)-k)$ は X から W への凹写像で，定理 1 の $\mathcal{Y}$，C，ψ をそれぞれ W，$\tilde{C}$，h と読みかえて仮定(A1)，(A2)がみたされる．故に $h(x)\in\tilde{C}$ なる x の存在条件は $\inf_{z^*\in\tilde{C}^+}\sup_{x\in X} z^*(h(x))=0$．すなわち，$\inf_{y^*\in C^+,\,\beta\geq 0}\left[\sup_{x\in X}\{y^*(\psi(x))+\beta\varphi(x)-\beta k\}\right]=0$．$\psi(x)\in C$ なる x の存在は仮定しているから，$\beta=0$ に対しては定理 1 により上の［　］内は $\geqq 0$．従って $\beta>0$ の場合を考えればよく，$\tilde{C}^+$ が錐だから $\beta=1$ としてよい．故に，条件は，

$k\leqq \inf_{y^*\in C^+}\sup_{x\in X}[\varphi(x)+y^*(\psi(x))]$．これが，$\psi(x)\in C$ かつ $\varphi(x)\geqq k$ なる x が存在するための条件だから，(3)を得るとともに，sup を実現する x_0 の存在もいえる．

さて，x_0 が $\psi(x_0)\in C$ かつ sup をとれば，(3)から任意の $\varepsilon>0$ に対して $y^*_\varepsilon\in C^+$ が存在して $\varphi(x_0)+\varepsilon > \sup_{x\in X}[\varphi(x)+y^*_\varepsilon(\psi(x))]$．特に，$\varphi(x_0)+\varepsilon>\varphi(x_0)+y^*_\varepsilon(\psi(x_0))$．故に，$0\leqq y^*_\varepsilon(\psi(x_0))<\varepsilon$．従って，また，上のことから，$\varphi(x_0)+y^*_\varepsilon(\psi(x_0))+\varepsilon>\sup_{x\in X}[\varphi(x)+y^*_\varepsilon(\psi(x))]$．故に(4)，(5)は必要である．逆に，(4)，(5)をみたす $\{y^*_n\}$ が存在すれば，$\varphi(x_0)=\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in X}\{\varphi(x)+y^*_n(\psi(x))\}\right]\geqq\inf_{y^*\in C^+}\sup_{x\in X}$

$[\varphi(x) + y^*(\psi(x))]$ だから，(3) により，x_0 は sup を実現する．

(証明終り)

この定理は，optimality に関する重要な定理ではあるが，後で直接は使わない．しかし，§4 で，目的関数が実数値でない場合に拡張した形で同様の議論を使う．その伏線としてあげておいた．

系．定理2において，$\varphi(x)$ が X 上で上に有界ならば，条件 $\psi(x) \in \mathcal{C}$ が空であってもなくても (3) が成立する．ただし，制約条件をみたす x の集合が空のときの関数の sup は $-\infty$ と規約する．

証明) $\psi(x) \in \mathcal{C}$ をみたす x の集合が空のとき，定理1から，$\inf_{y^* \in \mathcal{C}^+} \sup_{x \in X} y^*(\psi(x)) = -\infty$．故に，$\varphi(x) \leq M$ (定数) なら，(3) の右辺も $-\infty$ となる．

(証明終り)

§3．ラグランジュ乗数法によるミニマックス定理の証明

ここでは，ゲームの理論でよく知られているミニマックス定理を，一般な形で直接定理1から導いてみる．

定理3．X は線型空間 $\mathcal{X}$ の空でない凸部分集合，Y は線型空間 $\mathcal{Y}$ の空でない凸部分集合とし，$K(x, y)$ は $X \times Y$ 上の実数値関数で次の性質をもつものとする：

(i) X に位相を入れて，X が compact，かつ，固定した各 $y \in Y$ に対し，$K(x, y)$ は x の上半連続関数であるようにできる．

(ii) K は，各固定した y に対し，x の凹関数であり，x を固定したとき，y の凸関数（すなわち，$-K$ が凹）である．

このとき，次の式が成立する．

$$(6) \quad \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \inf_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y).$$

かつ，この値が有限ならば，左辺の sup をとる x が存在する．

証明）左辺 $\leqq$ 右辺は自明だから，逆を示す．右辺 $\geqq k$ なる任意の実数 k に対して左辺 $\geqq k$ を示せばよい．それには，"すべての $y \in Y$ に対して $K(x, y) \geqq k$" となる x の存在をいえば十分だし，同時に sup をとる x の存在もいえる．直積空間 R^Y の位相を R の直積弱位相で入れ，すべての y に対して $f(y) \geqq 0$ となる $f \in R^Y$ の全体を C とすれば，R^Y は局所凸で C はその閉凸錐．また，$\psi(x) = K(x, y) - k$ は X から R^Y への C-上半連続な写像（(i) による）．$f^* \in (R^Y)^*$ は，ある n; $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$（実数）; $y_1, \cdots, y_n \in Y$ に対して $f^*(f) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(y_i)$ と表現でき，$f^* \in C^+$ は $\alpha_1 \geqq 0, \cdots, \alpha_n \geqq 0$ と同値であることに注意して定理1を適用すれば，$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$，$\alpha_i / \alpha = \beta_i$ とかきなおして（$\sum \beta_i = 1$ である），

$$\inf_{f^* \in C^+} \sup_{x \in X} f^*(\psi(x)) = \inf_{\substack{n,\, \alpha,\, \{\beta_i\},\, \{y_i\} \\ \beta_i \geq 0,\ \sum \beta_i = 1}} \left\{ \alpha \sup_{x \in X} \left[\sum_{i=1}^{n} \beta_i K(x, y_i) - k \right] \right\}$$

$$\geqq \inf \left\{ \alpha \sup_{x \in X} \left[K\left(x, \sum_{i=1}^{n} \beta_i y_i\right) - k \right] \right\} \quad (\because\ K \text{ は } y \text{ に関し凸})$$

$\geqq 0$. 故に，定理1により，$\psi(x) \in \mathcal{C}$ なる x が存在する．

（証明終り）

§4. 決定関数の許容性

§2の応用として，次の問題を考える．Ⓗをパラメーター空間とし，$\mathcal{D}$を決定関数の　集合で凸とする．$r(\theta, \delta)$は危険関数をあらわす．また，Ωをある集合とし，$g(\omega, \delta)$を，$\Omega \times \mathcal{D}$上の実数値関数，$h(\omega)$を$\Omega$上の実数値関数とする．ここで考える問題は，制約 $g(\omega, \delta) \leqq h(\omega)$, $\omega \in \Omega$, のもとに，$r(\theta, \delta)$のとりうる値の範囲を考え，それにより，許容性の条件などを論じることである．

ここで，問題の構造に関し，次の仮定をおく．

(B1). $r(\theta, \delta)$は，θを固定したとき，$\mathcal{D}$上の凸関数である．

(B2). $g(\omega, \delta)$は，ωを固定したとき，$\mathcal{D}$上の凸関数である．

(B3). $\mathcal{D}$に位相を入れて，各θに対し，$r(\theta, \delta)$は$\mathcal{D}$上の下半連続関数，$g(\omega, \delta)$は$\mathcal{D}$上の下半連続関数であるようにできる

(B4). ある有限個の $\omega_1, \cdots, \omega_m \in \Omega$ と $\varepsilon > 0$ が存在して, $\{\delta : g(\omega_i, \delta) \leqq h(\omega_i) + \varepsilon,\ i = 1, \cdots, m\}$ が, (B3) の位相で $\mathscr{D}$ の compact 集合である. ($m = 0$ でもよい. このときは, 上の δ の集合は $\mathscr{D}$ 全体になる).

次に, 有限集合を台とする Ω 上の測度 (というためには, σ-集合族が必要だが, 1点集合をすべて含む σ-集合族なら何でもよい) η の全体を H, 有限集合を台とする Θ 上の測度 ξ の全体を Ξ とし, Ξ のうち確率測度 ($\xi(\Theta) = 1$) である ξ の全体を Ξ_1 とする. $\int g(\omega, \delta)\, d\eta(\omega)$ (実は有限和), $\int h(\omega)\, d\eta(\omega)$ を, 便宜上, それぞれ, $g(\eta, \delta)$, $h(\eta)$ とかいても混乱のおそれはないであろう. 同様に, $\int r(\theta, \delta)\, d\xi(\theta)$ を $r(\xi, \delta)$ とかく.

さて, $\varepsilon(\theta)$ が θ の関数で, $\varepsilon(\theta) \geqq 0$ とする. δ_0 が, 制約 $g(\omega, \delta) \leqq h(\omega)$, $\omega \in \Omega$, をみたすとし, 同じ制約をみたし, かつ $r(\theta, \delta) \leqq r(\theta, \delta_0) - \varepsilon(\theta)$ がすべての $\theta \in \Theta$ に対して成り立つような δ が存在するとき, δ_0 は制約 (g, h, Ω) のもとに $\varepsilon(\theta)$-改良可能であるという. (特に, Θ の部分集合 E に対し, $\varepsilon(\theta) = \varepsilon$ ($\theta \in E$), $\varepsilon(\theta) = 0$ ($\theta \notin E$) とおいたときが, いわゆる (E, ε)-改良可能という場合になる [4]).

定理 4. 仮定 (B1)〜(B4) が成り立つとき, δ_0 が制約 (g, h, Ω) のもとに $\varepsilon(\theta)$-改良可能であるための必要十分条

件は，δ_0 が制約 $(g,\ h,\ \Omega)$ をみたし，かつ，

$$(7)\quad \inf_{\eta\in H,\ \xi\in\Xi_1} \left[h(\eta) + r(\xi,\delta_0) - \varepsilon(\xi) - \inf_{\delta\in\mathcal{D}} \{ g(\eta,\delta) + r(\xi,\delta) \} \right] \geqq 0$$

が成り立つことである．

証明）問題は，$g(\omega,\delta) \leqq h(\omega)$ $(\omega\in\Omega)$ かつ $r(\theta,\delta) \leqq r(\theta,\delta_0) - \varepsilon(\theta)$ なる $\delta\in\mathcal{D}$ の存在条件だから，$\mathcal{Y} = R^{\Omega}\times R^{\Theta}$ とし，$\psi(\delta) = (h(\omega)-g(\omega,\delta),\ r(\theta,\delta_0)-r(\theta,\delta)-\varepsilon(\theta))$ により $\mathcal{D}$ から $\mathcal{Y}$ への写像 ψ を定義したとき，$\psi(\delta)\geqq 0$ なる δ の存在条件である．定理1の X として $\mathcal{D}$ を，$\mathcal{Y}$ として上のものを，C としてその非負錐をとれば，仮定（B1）～（B4）によって定理1の仮定がみたされることがわかる．従って，条件は，$\inf_{y^*\in C^+} \sup_{\delta\in\mathcal{D}} y^*(\psi(\delta)) = 0$．$y^*\in C^+$ の表現が，ある $\eta\in H$ とある $\xi\in\Xi$ に対して，$y^*(y) = \int y(\omega,\theta)\,d\eta(\omega) + \int y(\omega,\theta)\,d\xi(\theta)$ とかけることに注意すれば，上の条件は，

$$(8)\quad \inf_{\eta\in H,\ \xi\in\Xi}\ \sup_{\delta\in\mathcal{D}} \left[h(\eta) - g(\eta,\delta) + r(\xi,\delta_0) - r(\xi,\delta) - \varepsilon(\xi) \right] \geqq 0.$$

すなわち，

$$(9)\quad \inf_{\xi,\ \eta} \left\{ \left[h(\eta) + r(\xi,\delta_0) - \varepsilon(\xi) \right] - \inf_{\delta\in\mathcal{D}} \left[g(\eta,\delta) + r(\xi,\delta) \right] \right\} \geqq 0.$$

δ_0 が $(g,\ h,\ \Omega)$ をみたすことから，$\xi=0$ に対しては(9)が成り立つから，(9)の｛　｝内が ξ に関して線型なことに注意して

$\xi \in \Xi_1$ に限ってよい．故に (9) は (7) と同値である．(証明終り)

系1. 仮定 (B1)〜(B4) が成り立つとき，δ_0 が，制約 (g, h, Ω) のもとに許容的であるための必要十分条件は，δ_0 がこの制約条件をみたし，かつ，任意の $\theta \in \Theta$ に対し，$\xi_n \in \Xi_1$，$\eta_n \in H$ なる列 $\{\xi_n, \eta_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が存在して，$n \to \infty$ のとき，

$$(10)\qquad \frac{h(\eta_n) - g(\eta_n, \delta_0)}{\xi_n(\theta)} \longrightarrow 0 \qquad \text{および}$$

$$(11)\qquad \frac{[g(\eta_n, \delta_0) + r(\xi_n, \delta_0)] - \inf_{\delta \in \Omega}[g(\eta_n, \delta) + r(\xi_n, \delta)]}{\xi_n(\theta)} \longrightarrow 0$$

をみたすことである．なお，仮定 (B1)〜(B4) のもとに，許容的な δ の全体は最小完全類である．

証明). $\varepsilon_{\theta_0}(\theta) = \varepsilon \quad (\theta = \theta_0)$, $\varepsilon_{\theta_0}(\theta) = 0 \quad (\theta \neq \theta_0)$ とおくと，許容性の条件は，任意の $\theta_0 \in \Theta$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し，δ_0 が $\varepsilon(\theta)$-改良可能でないことだから，(7) の否定として，任意の θ と $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\inf_{\eta \in H,\ \xi \in \Xi_1} \frac{h(\eta) + r(\xi, \delta_0) - \inf_{\delta \in \Omega}\{g(\eta, \delta) + r(\xi, \delta)\}}{\xi(\theta)} < \varepsilon.$$

すなわち，

$$(12)\ \inf_{\eta \in H,\ \xi \in \Xi_1}\left[\frac{h(\eta) - g(\eta, \delta_0)}{\xi(\theta)} + \frac{g(\eta, \delta_0) + r(\xi, \delta_0) - \inf_{\delta \in \Omega}\{g(\eta, \delta) + r(\xi, \delta)\}}{\xi(\theta)}\right] < \varepsilon.$$

上の [ ] 内の第1，2項共に $\geqq 0$ だから，$\varepsilon > 0$ の任意性

に注意すれば，求める条件は，(10) と (11) をみたす $\{\xi_n, \eta_n\}$ の存在であることがわかる．許容的な δ の全体が完全類であることは，仮定（B4）と Zorn の補題から容易．　　（証明終り）

さて，δ_0 に対し，$\eta_n \in H$，$\xi_n \in \Xi_1$ なる列 $\{\xi_n, \eta_n\}$ が存在して，$n \longrightarrow \infty$ のとき

(13)　　$h(\eta_n) - g(\eta_n, \delta_0) \longrightarrow 0$

(14)　$[g(\eta_n, \delta_0) + r(\xi_n, \delta_0)] - \inf_{\delta \in \dot{\mathcal{D}}} [g(\eta_n, \delta) + r(\xi_n, \delta)] \longrightarrow 0$

をみたす δ_0 を，制約 (g, h, Ω) のもとにおける広義 Bayes 解と呼ぶことにすれば，系1から明らかに，

系2　定理5の仮定のもとにおいて，制約 (g, h, Ω) のもとにおける広義 Bayes 解の全体は完全類である．

[注意1]．この節でも，仮定(B1)～(B4)を弱めることができる．定理1のあとの注意1～3と同様な意味でである．

[注意2]．制約 (g, h, Ω) がないときは，Ω を空集合と考えることにより，(10) は不要で，(11) において g の項を除いたものが許容性の条件となる．同様に，(13) を除き，(14) において g の項を除いたものが広義 Bayes 解の定義になる．

[注意3]．決定関数の一般論において，先験分布として，特に有限集合を台とするものが，しばしば主役を演ずる構造上の理由は，本節の議論から明らかであろう．すなわち，重要

なのは，R^{Θ}における線型汎関数であり，それは有限集合を台とする測度だからである．

［注意4］ Bayes解の全体は，一般には完全類でなく，広義Bayes解を必要とすることの，構造上の理由について，最も本質的な点は次のことであろう．R^{Θ}のような，一般に無限次元の線型空間においては，閉凸集合とその外点を分離する線型汎関数は存在する（Mazur-Bourginの定理）が，境界点では駄目である．幾何的にいえば，境界点においては必らずしも支持超平面が作れない．許容的なδに対応するR^{Θ}の点は，境界点に相当するので，外点との分離超平面の極限のようなものを考えねばならない．それが，広義Bayes解や形式的Bayes解の現れる理由である．それでは，このような極限操作を行わないで許容点をとらえるには，どのような方法が考えられるか．2つの方向が考えられる．1つは，線型汎関数の範囲をふやすことであり，たとえば"連続性"を捨てれば境界点における支持汎関数が，場合によっては存在することもあるであろう．しかし，必らずしも連続でない線型汎関数の一般的な表現は具体的には困難であり，今のところはむずかしい．第2の方向は，この節では，$r(\theta,\delta)$は(B1)と(B3)を満足するだけの一般的なものであったが，更に他の制限をつけ加えることにより，R^{Θ}の位相をもっと強くできることが

できる．しかも，R^{Θ}全体でなく，その部分空間に，適当な位相を入れたものを考えればよい場合がある．こうすると，連続線型汎関数の範囲が広がるので，境界点で支持汎関数がとれる場合が出てくる．たとえば，$r(\theta,\delta)$がθの連続関数（Θに位相が入っていて）であるような場合には，R^{Θ}全体を考えなくともΘ上の連続関数全体の空間を考えて，それに適当な位相を入れて，その上の連続汎関数を考えることができる．

このように，$r(\theta,\delta)$につける条件に対応して各種の結果が出てくる筈であるが，本稿では，そのような個々の場合にはふれず，定理4のような一般な条件のもとにおける構造だけを扱った．

［文　献］

[1] Hurwicz, L., Programming in linear spaces, Studies in linear and nonlinear programming, Stanford Univ. Press, 1958

[2] Isii, K., Inequalities of the types of Chebyschev and Cramér-Rao and mathematical programming, Ann. Inst. Statist. Math. 16 (1964)

[3] Le Cam, L., An extension of Wald's theory of statistical decision functions, Ann. Math. Statist. 26 (1955)

[4] 工藤弘吉，本シンポジウムの報告