数理解析研究所講究録
第 28 巻 1967 年 49-60

動的在庫過程

都立工業短大　小田中敏男

§1. 緒言

納入に遅れを伴ふ場合の在庫管理問題は、既に S. Karlin, H. Scarf, R. Bellman 等によつて、費用関数に関する簡単な仮定のもとに、一変数の最適在庫方程式に帰着されることが示されている。[1,2] 又費用関数が不明の場合の在庫管理過程に、ある確率基準による制御過程の理論[3]が適用されることを T. Odanaka が示した。[4]

本研究に於てはこの確率基準による在庫管理過程の納入に遅れのある場合は、納入に遅れのない場合の数學的拡張として取扱われることを証明するものである。

この在庫過程のモデルとして次のように考えることにする。

離散的な時点 $0, 1, \cdots, N$ に於て統計的需要を有する単一品目の在庫問題を考える。各時点に於ける初期在庫量がある特定の境界を越える確率を最小にする政策を決定することが問題である。

ここで発注と納入との間に d 単位の時間遅れが存在すると

仮定する。多くの場合購入費用, 在庫費用等が仮定せられるが, その推定には困難なことがある。そこでこゝでは之等の費用は各段階に於て不明であるとし, 各段階に於ける需要の分布関数のみが仮定せられているとする。又次の量を設定する。

x_n = n段階に於ける初期在庫量。之はn段階に於ける発注量, 需要量に先立って知られるとする。($n=k, \cdots, N-1$)。

y_n = n段階に於ける発注量。($n=k-d, \cdots, N-1$)。

z_n = n段階に於ける需要量。($n=k, \cdots, N-1$)

こゝでy_nはx_nと既に発注せられた$y_{n-1}, \cdots, y_{n-d}$に依存するとする。又z_nが観測せられる前にy_nは決定せられねばならぬとする。この場合$y_n \geqq 0$の条件は当然仮定せられる。

そのときこの在庫系に関して次の関係が成立する。

$$x_{n+1} = x_n + y_{n-d} - z_n, \qquad x_k = x \qquad (1)$$

更に次の仮定を置く。

a) 需要$z_1, z_2, \cdots, z_n$は独立な同一分布をもつ非負な確率変数

b) 次の条件が1つの確率密度関数$\varphi(z)$に課せられている。

1) $\varphi(z) > 0, \quad z \geqq 0, \quad \int_0^\infty \varphi(z)\,dz = 1$

2) $$\int_{y}^{y+\Delta} \varphi(z)\,dz < a < 1, \quad y \geqq 0, \quad \Delta = \alpha - \beta. \qquad (2)$$

3) $\varphi'(z)$ が連続であって，$[0, \infty)$ で単峰である。

4) ある領域 $[y, y+\Delta]$ に於て $\varphi''(z) < 0.$

c) 過剰在庫は貯蔵される。

§2. 数学的定式化

2.1. 供給に於て一期の遅れがある場合

もし供給に於て一期間の遅れがある場合，過程の状態を記述するのに二変数を要する。すなはち次の x と y とである。

x = k 段階に於ける需要を満たすように貯積された在庫量。

y = $(k-1)$ 段階に於ける発注量。

このとき次の量を定義する。

$f_k(x, y)$ = 最適政策を用いて $(N-k)$ 期間に於て，各段階に於ける在庫量がある境界 α, β $(\alpha > \beta)$ を越える確率。

この定義より明らかに

$$\begin{aligned} f_{N-2}(x, y) &= 1, \quad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta) \\ &= L(x+y), \quad (\alpha > x > \beta) \end{aligned} \qquad (3)$$

ここに

$$L(x+y)=\int_{x+y-\beta}^{\infty}\varphi(z)dz+\int_{0}^{x+y-\alpha}\varphi(z)dz,\quad\left(\begin{array}{c}\alpha>x>\beta\\ x+y>\alpha\end{array}\right)$$

$$=\int_{x+y-\beta}^{\infty}\varphi(z)dz\qquad\left(\begin{array}{c}\alpha>x>\beta\\ \alpha>x+y>\beta\end{array}\right)\tag{4}$$

$$L'(x+y)=\varphi(x+y-\alpha)-\varphi(x+y-\beta)\quad\left(\begin{array}{c}\alpha>x>\beta\\ x+y>\alpha\end{array}\right)$$

$N-1>n$ に対する関数方程式は次のように書ける。

$$f_n(x,y)=1\qquad(x\geqq\alpha,\ x\leqq\beta)$$

$$=\min_{w\geqq 0}\left[L(x+y)+\int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta}f_{n+1}(x+y-z,w)\varphi(z)dz\right]\tag{5}$$

$$(\alpha>x>\beta)$$

2.2. 供給に d 期間の遅れのある場合

J を最小にする政策関数 $\{y_n\}$ を決定する。ここに

$$J=\mathrm{Prob.}\left\{\left(\max_{k\leq n\leq N}x_n\geqq\alpha\right)\mathrm{or}\left(\min_{k\leq n\leq N}x_n\leqq\beta\right)\right\}\tag{6}$$

$$x_k=x$$

このとき

$$f_n(x,y_{n-d},y_{n-d+1},\cdots,y_{n-1})=\min J\tag{7}$$

によって定義される関数列を定義しよう。記号 min はすべての政策関数上についての最小を意味する。

そのとき，$N-d \leq n \leq N-1$ に対して

$$f_n(x, y_{n-d}, \cdots, y_{n-1}) = 1, \qquad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta),$$
$$= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z,\ y_{n-d+1}, \cdots, y_{n-1})\varphi(z)dz, \qquad (\alpha > x > \beta). \tag{8}$$

この関数列は

$$f_{N-1}(x, y_{N-1-d}, \cdots, y_{N-2}) = 1, \qquad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta),$$
$$= L(x+y), \quad (\alpha > x > \beta), \tag{9}$$

更に一般には $k \leq n < N-d$ に対して

$$f_n(x, y_{n-d}, \cdots, y_{n-1}) = 1, \qquad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta),$$
$$= \min_{w \geq 0}\left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z,\ y_{n-d+1}, \cdots, y_{n-1}, w)\varphi(z)dz\right] \qquad (\alpha > x > \beta) \tag{10}$$

が成立する。

§ 3. 最適政策

最適政策の構造は次の定理によって示される。

<u>定理</u> 最適政策 $w_n^* = w_n^*(x, y_{n-d}, \cdots, y_{n-1})$ は

$$w_n^* = \max(0,\ \bar{x}_n - (x + y_{n-d} + \cdots + y_{n-1})) \tag{11}$$

の形である。

(証明) 方法を説明するために、一期間の遅れのある問題の解析より始める。一期間の遅れのある関数方程式は

$$
\begin{aligned}
f_{N-1}(x, y) &= 1, && (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta), \\
&= L(x+y), && (\alpha > x > \beta),
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

より始まり、

$$
\begin{aligned}
f_n(x, y) &= 1, && (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta), \\
&= \min_{w \geqq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z, w)\, \varphi(z)\, dz \right], && (\alpha > x > \beta).
\end{aligned}
\qquad (13)
$$

で示される。$n=N-2$ の場合は

$$
\begin{aligned}
f_{N-2}(x, y) &= 1, && (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta), \\
&= \min_{w \geqq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-1}(x+y-z, w)\, \varphi(z)\, dz \right], && (\alpha > x > \beta).
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

となり、括弧内の w に関する微分は

$$
\int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-1}(x+y-z, w)}{\partial w}\, \varphi(z)\, dz
$$

となる。これを零と置いて

$$
F_{N-2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} m_{N-2}(u-z)\, \varphi(z)\, dz = 0 \qquad (15)
$$

が得られる。こゝに

$$u = x + y + w$$

$$m_{N-2}(u-z) = L'(x+y+w-z), \qquad (\alpha > x+y+w-z > \beta),$$
$$= 0 \qquad (\text{otherwise}) \tag{15}$$

である。

函数 $F_{N-2}(u)$ は導関数

$$F'_{N-2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} m'_{N-2}(u-z)\varphi(z)\,dz \tag{16}$$

を有する。$[\alpha > x+y+w-z > \beta]$ に於て $m'_{N-2}(u-z) < 0$ であるから、$F_{N-2}(u)$ は単調減少函数で、又 $F_{N-2}(\infty) < 0$, $F_{N-2}(-\infty) > 0$ から、$F_{N-2}(u) = 0$ は根が存在しているに限る。この根を $\bar{x}_{N-2}$ と呼ぼう。

そのとき最適発注政策は次の形となる。

$$w^*_{N-2} = \bar{x}_{N-2} - x - y, \qquad (\bar{x}_{N-2} \geqq x+y),$$
$$= 0, \qquad (\bar{x}_{N-2} < x+y). \tag{17}$$

更に

$$f_{N-2}(x, y) = 1, \qquad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta),$$
$$= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-1}(x+y-z,\ w^*_{N-2})\,\varphi(z)\,dz, \qquad (\alpha > x > \beta). \tag{18}$$

で

$$\frac{\partial f_{N-2}(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta)$$

$$= \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-1}(x+y-z,\ w^{*}_{N-2})}{\partial y}\varphi(z)\,dz \qquad (\alpha > x > \beta) \tag{19}$$

となる。

ここで數學的歸納法をすゝめるために、f_{N-n}は次の性質を持っていると仮定しよう。

i) $f_{N-n}(x,y) = 1,\qquad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta)$

$$= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-n+1}(x+y-z,\ w^{*}_{N-n})\varphi(z)\,dz \qquad (\alpha > x > \beta) \tag{20}$$

ii) $w^{*}_{N-n} = \bar{z}_{N-n} - x - y,\quad (x+y < \bar{z}_{N-n}),$

$= 0,\qquad$ (otherwise).

$\bar{z}_{N-n}$は次の方程式の單一根である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_{N-n}(u-z)\,\varphi(z)\,dz = 0,$$

$$m_{N-n}(u-z) = \frac{\partial f_{N-n+1}(x+y-z,\ w^{*}_{N-n})}{\partial y},\quad (\alpha > x+y-z > \beta) \tag{21}$$

$= 0,\qquad$ (otherwise)

iii) $$\frac{\partial f_{N-n}(x,y)}{\partial y}=\int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta}\frac{\partial f_{N-n+1}(x+y-z,\ w_{N-n}^{*})}{\partial y}\varphi(z)dz,\quad(\alpha>x>\beta)$$

$$=0\qquad(x\geqq\alpha,\ x\leqq\beta)$$

之等の性質が $(N-n)$ から $(N-n-1)$ にすすんだ時にも保持されることを証明しよう。

$$f_{N-n-1}(x,y)=1,\qquad(x\geqq\alpha,\ x\leqq\beta),$$

$$=L(x+y)+\min\left[\int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta}f_{N-n}(x+y-z,w)\varphi(z)dz\right]\qquad(\alpha>x>\beta).\tag{22}$$

w に関しての括弧内の微分は

$$F_{N-n-1}(u)=\int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta}\frac{\partial f_{N-n}(x+y-z,w)}{\partial w}\varphi(z)dz$$

$$=\int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta}\int_{x+y+w_1^{*}-z-\alpha}^{x+y+w_1^{*}-z-\beta}\cdots\int_{u-z-z_1-z_2-\cdots+w_1^{*}+w_2^{*}+\cdots-\alpha}^{u-z-z_1-z_2-\cdots+w_1^{*}+w_2^{*}+\cdots-\beta}L'(u-z-z_1-\cdots+w_1^{*}+w_2^{*}+\cdots)\varphi(z)\varphi(z_1)\cdots dz\,dz_1\cdots\tag{23}$$

ここで $L'(x+y)$ は高々一根を有しているので $\bar{x}_{N-n-1}$ によって記せられた単一根を $F_{N-n-1}(u)=0$ は有することが証明せられる。
そこで最適政策は

$$w_{N-n-1}^{*}=\bar{x}_{N-n-1}-x-y,\qquad(x+y<\bar{x}_{N-n-1})$$

$$=0,\qquad(\text{その他の場合})\tag{24}$$

で，

$$f_{N-n-1}(x, y) = 1 \qquad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta)$$

$$= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-n}(x+y-z,\ w^{*}_{N-n-1})\,\varphi(z)\,dz \qquad (25)$$

$$(\alpha > x > \beta)$$

が得られ，更に

$$\frac{\partial f_{N-n-1}(x, y)}{\partial y} = 0 \qquad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta)$$

$$= \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-n}(x+y-z,\ w^{*}_{N-n-1})}{\partial y}\,\varphi(z)\,dz, \qquad (26)$$

$$(\alpha > x > \beta)$$

となる。之等から次のことが云えよう。

<u>定理 a</u>　（ 2 ）の仮定が満足せられ，遅れの長さが $d=1$ の場合，最適政策は (21)(ii) で示された形となる。

これで $d=1$ の場合は完全に証明せられた，更に一般に d だけ遅れのある場合を指摘しよう。この場合に帰納法が用いられる。

（10）式に於て，$n = N-d-1$ と置けば

$$f_{N-d-1}(x,\ y_{N-2d-1}, \cdots, y_{N-d}) = 1, \qquad (x \geqq \alpha,\ x \leqq \beta)$$

$$= L(x+y_{N-2d-1}) + \min_{w \geqq 0}\left\{\int_{x+y_{N-2d-1}-\alpha}^{x+y_{N-2d-1}-\beta} f_{N-d}(x+y_{N-2d-1}-z,\ y_{N-2d}, \cdots, w)\,\varphi(z)\,dz\right\} \qquad (27)$$

$$(\alpha > x > \beta)$$

(27)式の右辺のwに関する微分は

$$\int_{x+y_{N-2d-1}-\alpha}^{x+y_{N-2d-1}-\beta} \frac{\partial f_{N-d}(x+y_{N-2d-1}-z,\ y_{N-2d},\cdots,w)}{\partial w}\varphi(z)\,dz$$

となり、これを零と置いて

$$F_{N-d-1}(w)=\int_{-\infty}^{\infty} m_{N-d-1}(w;\ z)\ \varphi(z)\,dz=0$$

$$\begin{aligned} m_{N-d-1}(w;\ z) &= \frac{\partial f_{N-d}(x+y_{N-2d-1}-z,\ y_{N-2d},\cdots,w)}{\partial w} && (28) \\ & && (x+y_{N-2d-1}-\alpha>z>x+y_{N-2d-1}-\beta) \\ &= 0 && (\text{otherwise}) \end{aligned}$$

$m_{N-d-1}(w;z)$ は高々一根を有しているので、$F_{N-d-1}(w)=0$ は単一根を有することが証明出来る。従ってその最適政策は

$$\begin{aligned} w^{*}_{N-d-1}(x,\ y_{N-2d-1},\cdots,y_{N-d}) &= \bar{x}_{N-d-1}-(x+y_{N-2d-1}+\cdots+y_{N-d}) \\ & \qquad (x+y_{N-2d-1}+\cdots+y_{N-d}<\bar{x}_{N-d-1}) \qquad (29) \\ &= 0\ \ (\text{otherwise}) \end{aligned}$$

の形を有することが分かる。そこで一般の n $(N-k\geq n>d+1)$ に対しては次の結論が得られよう。

i) $$\begin{aligned} f_{N-n}(x,\ y_{N-n-d},\cdots,y_{N-n-1}) &= 1, && (x\geq\alpha,\ x\leq\beta) \\ &= L(x+y_{N-n-d})+\int_{x+y_{N-n-d}-\alpha}^{x+y_{N-n-d}-\beta} f_{N-n+1}(x+y_{N-n-d}-z,\ y_{N-n},\cdots,w^{*})\varphi(z)\,dz && (30) \\ & && (\alpha>x>\beta) \end{aligned}$$

ii) $$w_{N-n}^{*} = \bar{x}_{N-n} - x - y_{N-n-d} - \cdots - y_{N-n}.$$
$$(x + y_{N-n-d} + \cdots + y_{N-n} < \bar{x}_{N-n}) \quad (31)$$
$$= 0 \qquad (\text{otherwise})$$

iii) $$\frac{\partial f_{N-n}(x, y_{N-n-d}, \ldots, y_{N-n})}{\partial y_{N-n}} = \int_{x+y_{N-n-d}-\alpha}^{x+y_{N-n-d}-\beta} \frac{\partial f_{N-n+1}(x+y_{N-n-d}-z, \ldots, y_{N-n}, w)}{\partial y_{N-n}} \varphi(z)dz \quad (32)$$

これから次の重要な定理が得られる。

定理6　（2）の仮定が満足せられ，且つ遅れの長さがdである場合，最適政策の形は（31）(ii)で示される。

参考文献

1) Arrow, K. J., S. Karlin and H. Scarf ; Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production, Stanford, Cali., Stanford Univ. Pr., (1958).

2) Bellman, R., I. Glicksberg and O. Gross
On the optimal inventory equation ; Management Sci.,
(1955).

3) Odanaka, T., Control Processes with certain probability criterion. Journal

4) Odanaka, T., Some inventory control processes