数理解析研究所講究録
第28巻 1967年 105-143

動的計画法による配分過程

九大理　数学　　北川敏男

§I．はしがき

この報告の目的は，動的計画法による配分過程に関するいくつかの基本的な定理の拡張に関する結果を述べることである。問題は，次の関数方程式に関する。

「連続関数 $g(x)$, $h(x)$, $0 \leqq x < \infty$，定数 a, b, $0 \leqq a < b < 1$ が与えられるとき，$0 \leqq x < \infty$ において関数方程式

$$(A) \quad f(x) = \underset{0 \leqq y \leqq x}{Max}\left[g(y) + h(x-y) + f\left(ay + b(x-y)\right)\right]$$

を満足する解 $f(x)$ $0 \leqq x < \infty$ を求めること．」

そして，これに関する基本的定理というのは，次の四つをここでは意味する。

定理 I (Bellman [1] §9. Theorem 1, P.12) 次のことを仮定する。

a) $g(x)$ および $h(x)$ は，$x \geqq 0$ において x の連続関数とし，$g(0) = h(0) = 0$ とする．

b) $c = Max(a, b)$ としかつ

$$m(x) = \underset{0 \leqq y \leqq x}{\mathrm{Max}}\ \mathrm{Max}\left(|g(y)|, |h(y)|\right)$$

とするとき，すべての$x \geqq 0$に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty} m(c^n x) < \infty$$

とする．

c)　$0 \leqq a < 1$,　$0 \leqq b < 1$

以上の仮定a)－c)のもとにおいて，原点$x=0$において連続でありかつ0となる解は存在し，ただ一通りにきまる。この解は$x \geqq 0$において連続である．

定理II．(Bellman [1] § 12. Theorem 4, p 19)

定理Iの諸仮定に加えて，$x \geqq 0$において$g(x)$および$h(x)$はxの凸関数とする，すると上述の解$f(x)$は$x \geqq 0$においてxの凸関数であり，(A)右辺において最大値に到達するyは，0或はxに等しい。

定理III (Bellman [1] § 13 Theorem 5, p 20)

定理Iの諸仮定に加えて，$x \geqq 0$において$g(x)$および$h(x)$はxの狭義の凹関数とする。すると上述の解$f(x)$は，xの狭義の凹関数である．

定理IV (Bellman [1], § 14, Theorem 6, p.22)

次のことを仮定する．

(1)(a) $x \geqq 0$ において $g(x)$ および $h(x)$ は狭義の凹関数とし，単調増加とし，かつ連続な導関数をもつとする．また $g(0)=h(0)=0$ とする．

(b) $g'(0)/(1-a) > h'(0)/(1-b)$

$h'(0) > g'(\infty)$

$b > a$

すると最適政策，すなわち(A)の右辺の最大値に到達する $y(x)$ は次の形になる．

(2)(a) $0 \leqq x \leqq \bar{x}$ では，$y(x)=x$ ただしここに $\bar{x}$ は次の方程式の根である．

$$h'(0) = g'(x) + (a-b)g'(ax) + (a-b)ag'(a^2x) + (a-b)a^2g'(a^3x) + \cdots\cdots$$

(b) $x > \bar{x}$ では，$0 < y(x) < x$ であり，所与の x に対して，$y(x)$ は，次の y に関する方程式の根である．

$$g'(y) - h'(x-y) + (a-b)f'(ay + b(x-y)) = 0$$

さて，この報告では，§2において何故に拡張が望ましいと考えられるかについて，私見を述べる，§3においてそのような拡張のために，この報告で採用した方法について述べる．§4では拡張の方向を，§5では若干の具体的な結果を紹介する．

§2．動的計画法の基本定理に関して小文は，具体的な結

果としてあげるものは、専ら関数方程式 (A) 及びその拡張にあたるものであるが、この論文の意図からいうと、動的計画法全般の現状について，私どものもつ感想について，いくらか触れなければならないかと思う。これは次の三点にかかわっている。

(1°)動的計画法の主要な結果といわれるあるものについて、充分厳格には証明されていないといわれるものが少なくない。或いは少なくも証明に一般と洗錬すべきものがある。

(2°)最適性原理 *principle of optimality* の適用によって関数方程式を定立し、逐次近似法によって解くという方法が、動的計画法全般を通してよく用いられる。この点統一的でもあり、数値解法への結びつきからいっても電子計算機利用の便が大きいという利点がある。しかしその反面、解の性質を解析的に究明するのに役立つような、深味のある定理は割合少ないし，それらを与えうる場合でもその都度個別的な方法を利用しているという印象が免れがたい。体系的な方法論が要望される。

(3°) 動的計画法を計画論の視点に立ってみると、そこに得られた諸定理等は計画の場に移したとき、どのような場面において、どのようにして誰によって利用できるものであろうかという点から当然検討されるべきものである。動的計画法

はたしかに線型計画法につづいて，広く用いられている。応用面は広いし有効なことも認められている．しかし上述のような検討を綿密に行うときには，動的計画法の利用しうる前提としてどんな情報が仮定されているか，それが有効に役立つためにどんな制御列管理の実行可能性が予想されているかという点からふりかえってみる必要があるように思われる。

以上の一般的な感想を当面の四つの基本定理に関連して，より具体的に述べよう。

Ad (1°) 定理I, II及びIIIに関しては証明が厳格でないという非難はまずないと思う。しかし定理IVの証明は少なくも不親切である．これについては筆者などは講義のために，一歩一歩証明を埋めて推論のつながりの切れないように工夫したら Bellman 原著が二頁半弱のところを十数頁を必要とした経験がある。

Ad (2°) 定理II, IIIさらに進んで定理IVは，動的計画法の諸結果のなかでは，解の性質について，これでも多少は立入ったことを述べた方であるといえる。ただいったいこれだけの結果ならもう少し一般の場合にも拡張できないかという感想も当然起ってくる。定理IVの仮定があまりにも特殊であるというような印象をあたえないでもない．

Ad (3°) 各定理における仮定は既知情報として，計画主体

に与えられるとき、最適政策の形成の仕方がわかるというのであれば計画の方法が見出される。そういう点から見ると、計画論としては次のような問題が起る.

(i) 凸とか凹という関数 g, h については、最適政策の方も簡明なきまり方をする。ところで g, h のそういう性質は、どういう風にして前提しうるのであるか、x のある区間では凸、これにつづく区間では凹というような場合はどうなるであろうか。

(ii) 定数 a, b 従って c の値が確実に知られていないといという方がむしろ実際的ではないか。
これらに関する不確実情報のもとでは、いったいどういう風に最適政策をとればよいか、

(iii) 関数方程式 (A) について、$0 \leqq x < \infty$ なるすべての実数 x についての解を問題にしている。所与の関数 $g(x), h(x)$ に関しても、$0 \leqq x < \infty$ のすべての x に関して与えられているという前提に立っている。数値解法では離散的な x に関して先ず解を求めざるを得ない。これらは関数方程式の伝統からいっても数学解析の方法からいっても当然のように思う。しかし、実際にこのプログラムを関数方程式 (A) について行ってみると、所要の記憶量の膨大なのに驚くことが多いであろう。細分区間の巾を限りなく小さくというような極限操作よりも、まず何とか早く打切る論拠を求めたくなる。さらに動的計画

法の他の場面、例えば連続選択の過程などになると、実態はそもそも離散的な独立変数に対して構成されたものであるのに、これを数学型式に美しく書き上げるために連続変数をとり扱わなければならぬ羽目におち入ったのではないかと反省してみたくなる。

§3. 定理の拡張　　数学における定理は、「AならばBである。」という内容をもつ。しかし証明があっての定理であるから、証明ϕによって命題Aが

(3.1)
$$A \xrightarrow{\phi} B$$

によって、命題Bへ広義の意味で変換される。

命題 A, A', B, B'; 証明 ϕ, ϕ', ψ_1, ψ_2 があって、次のような *implication* の関係があるとしよう。

(3.2)
$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\phi'"] & B' \\ A \arrow[u, "\psi_1"] \arrow[r, "\phi"] & B \arrow[u, "\psi_2"'] \end{tikzcd}$$

いわゆる定理の拡張については、(3.2)におけるいろいろな場面がおこるであろう。

この小文で§4に述べるものは、$A \xrightarrow{\phi} B$ の代りに $A' \xrightarrow{\phi'} B'$ をとることであるが拡張の主眼を証明ϕと証明ϕ'とを同一のパターンにとるところにおくのである。二つの証明が同一のパターンということは、いまのところ、正確に定義したものがあるとも思われない。個々の定理の内容、その

基礎にある公理の内容を抽象して、公理群から定理群へ結んでゆく演繹機構そのものにおいてパターンの異同を調べるということは、興味のある課題と思う。報告者はまだ具体的な成案をもたないが、いったい何を言おうとするのかは、§ 6の記述から見ていただきたいと思う。

§ 4. 拡張の諸方向　ここでは、§ 1に述べた定理Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ及びⅣの何れかを拡張すべきいくつかの方向について、着眼点を述べる。それらのうちのいくつかを組合せて得られる結果については、§ 5にその結果を例示する。

〔1〕配分操作に関連する拡張　関数方程式(A)の右辺において、$y=u$, $x-y=v$, $ay+b(x-y)=au+bv=T(u,v)$とおき、$g(u)+h(v)=F(u,v)$とおいてみれば

$$(A')\qquad f(x)=\underset{\substack{u+v=x\\ u\geqq 0\\ v\geqq 0}}{Max}\left[F(u,v)+f(T(u,v))\right]$$

ということになる。Maxの下にかかれている(u,v)の範囲規定を一般化すると共に、$F(u,v)$に関する前提をおく。例えば

(i) $F(u,v)$は、uに関して単調増加

(ii) $F(u, v)$は、vに関して単調増加

(iii) $F(u, v)$は、(u, v)に関して連続

これに対して、$0 \leqq x < \infty$に対して領域$\mathcal{D}x$が定義され

(iv) $\mathcal{D}x \leqq \mathcal{D}x'$,　$x' \geqq x$のとき

(v) $\mathcal{D}x$の境界はJordan曲線

(vi) $\lim_{x' \to x} \mathcal{D}x' = \mathcal{D}x$

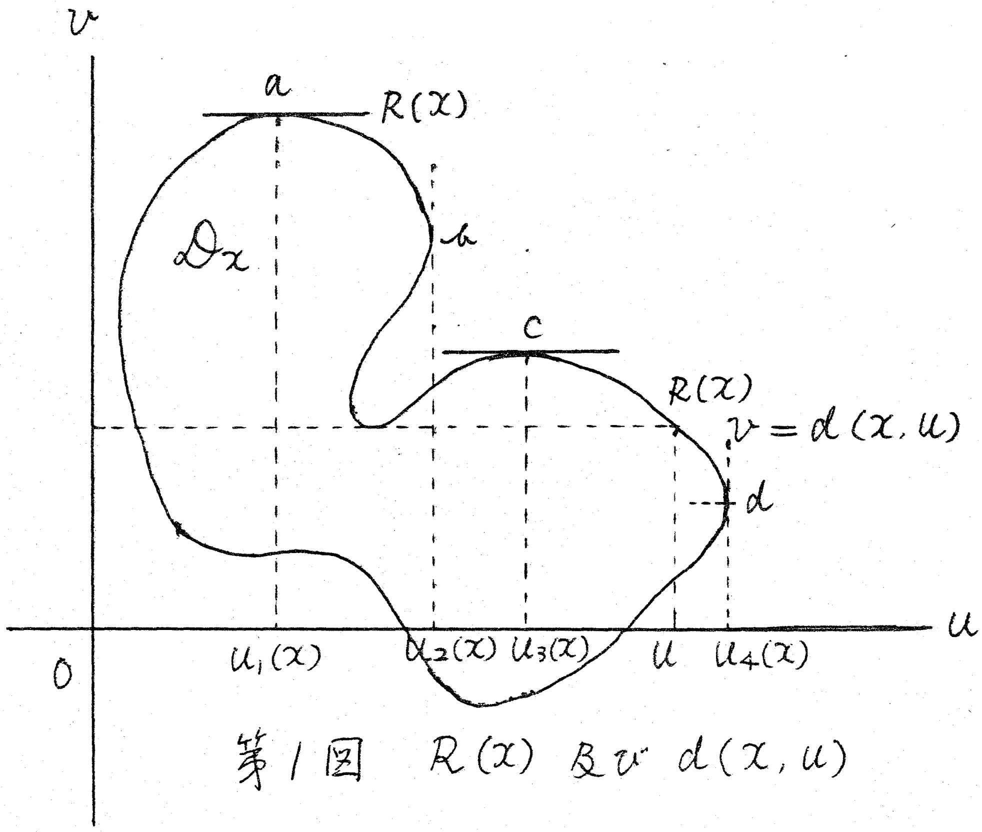
このような事情のもとにおいて

$$(A'')\qquad f(x) = \underset{(u,v)\in\mathcal{D}x}{Max}\left[F(u, v) + f(T(u, v))\right]$$

なる関数方程式を考えると、たしかに(A')従って(A)の拡張になっている。

ただ、ここに問題になるのは配分操作が関数方程式(A'')のなかには消えて見られないではないかということであろう。(A)においてxは所与の資材、資源、資金というような意味があったではないか、それが見当らないのではないか。(A'')の拡張は、配分過程の概念を越えているのではないか。それらの見方に対して、次の事情を注意したい。前述の(i)、(ii)、及び(iii)を前提するとき、(A'')の右辺におけるMaxを与える(u, v)は徒らに広漠たる閉領域$\overline{\mathcal{D}x}$においてこれを求める必要はなく、境界上の一部の集合に限定して求めればよい。この集合

を$R(x)$としよう。これは、$u \geqq u'$, $v \geqq v'$なる限り、$F(u, v) \geqq F(u', v')$という事実から由来することはいうまでもない。オ1図についていえば、弧$\widehat{ab}$及び弧$\widehat{cd}$の和集合が上述の$R(x)$である。このとき$(u, v) \in R(x)$ならば、uを与えるときvが一意にきまる。これを$v = d(x, u)$とおく。オ1図についていえば、$u_1(x) \leqq u \leqq u_2(x)$或いは$u_3(x) \leqq u \leqq u_4(x)$なる$u$に関しては、$v = d(x, u)$が一意にきまる。



第1図　$R(x)$ 及び $d(x, u)$

このような考察から関数方程式(A'')を拡張すると同時に、$R(x)$及び$d(x, u)$を導入して、次の関数方程式が導かれる。

$$(A^{(IV)}) \qquad f(x) = \underset{\substack{(u,v)\in R(x)\\ v=d(x,u)}}{\mathrm{Max}}\, F\bigl(u,\, d(x,u),\, f(T(u,v))\bigr)$$

ここまでくると，右辺 $F(u,v,w)$ の関数型について，どこまで拡張できるかが問題になる。

〔2〕利得の加法関係の拡張　関数方程式 (A) の $g(y)$, $h(x-y)$, $f(ay+b(x-y))$ の三者が相加算されている。上述の $(A^{(IV)})$ に関していうと、例えば定理I（§1）の証明のパターンを成立たせるための充分条件を検討するならば、次の解答が得られる。

$$(4.1) \qquad F(u,v,w) = \Phi^{-1}\bigl[\Phi\bigl(F_1(u,v)\bigr) + \Phi(w)\bigr]$$

この式の右辺は $F(u,v)$ と w との一般的な加算であるといえる。これらについては，J. Aczél〔1〕による成書がある。わが国では、数藤，南雲以来の組合せ関数方程式の伝統がある。いま当面の計画論に関連していうと、(4.1) の右辺のもつ加法関係と、関数 Φ に関する知識とが、分離して把握される。Φ 変換が導入されるとき、最適政策がいかに転換されるかという問題がおこる。

〔3〕関数の凸凹性　定理II及びIIIより見られるように、関数の凸凹性は最適政策の性質について重要な知見を与える。

しかし所与の関数 $g(x)$, 等について、たとえ凸凹性があきらかでなくとも次のような $g_1(x)$ 及び $g_2(x)$ が存在すれば最適政策に近似するものが求められはしまいかという問題が起る.

(i) $g_1(x) \leqq g(x) \leqq g_2(x)$

(ii) $|g_2(x) - g_1(x)| \equiv \delta(x) < \delta$

(iii) $g_i(x)\ (i=1,2)$ は共に連続凸関数(又は共に凹関数)

(iv) $g_i(x) = 0$

$h(x)$ に関しても同様としよう.

[4] 定理Ⅳの証明　動的計画法の諸結果のなかで、定理Ⅳは比較的に詳細な成果であるといえる。ただそれを成立させるための前提になっている定理Ⅳの前提がいかにも特殊的な感じが免れない. この制約を脱却するのには、定理Ⅳの証明を詳細に辿りながら、さきに述べた定理の拡張の起点を見出すのも一つの方法である. すでに述べたように、報告者は先ず定理Ⅳの証明を克明につみあげることから始めてみた。その細かい論証をここに述べることはやめて、重要なステップを述べる.

(10) 才1次近似解　関数方程式(A)の解の存在及び一意

性に関することは、定理Iによって保証される。そのような解$f(x)$に対する才1次近似解$f_1(x)$とは

(A₁)
$$f_1(x) = \max_{0 \leqq y \leqq x} \left[g(y) + h(x-y) \right]$$

を満足する$f_1(x)$を意味する．ここでyの関数として

(B₁)
$$D_1(y;x) \equiv g(y) + h(x-y), \quad 0 \leqq y \leqq x$$

ならびにyに関する導関数を考える：

(B₁′)
$$D_1'(y;x) = g'(y) - h'(x-y), \quad 0 \leqq y \leqq x$$

これに関して次の結果が得られる．

(i) 次のような$x > 0$が存在する．すなわち$0 \leqq y \leqq x$において、$D_1'(y;x) > 0$であり、従って

(4.2)
$$f_1(x) = \max_{0 \leqq y \leqq x} D_1(y;x) = D_1(x;x) = g(x)$$

(ii) 次の方程式の根は一つそしてただ一つ存在する．これをx_1であらわす．

(4.3)
$$g'(x) = h'(0)$$

(iii) $x > x_1$なる各xに対して、次のような$y_1 (= y_1(x))$が一つそしてただ一つ存在する．

(4.4)
$$g'(y_1) = h'(x - y_1)$$

(iv) $x > x_1$で定義された$y_1(x)$（(iii)参照）は、$x > x_1$で単調純増加かつ連結である．

(v) オ1次近似解 $f_1(x)$ は次の性質をもつ

(a) $0 \leqq x \leqq x_1$ において

$$f_1(x) = g(x), \qquad f_1'(x) = g'(x) \tag{4.5}$$

(b) $x \geqq x_1$ においては、$y_1(x_1) = x_1$ とおくとき

$$f_1(x) = g(y_1(x)) + h(x - y_1(x)) \tag{4.6}$$

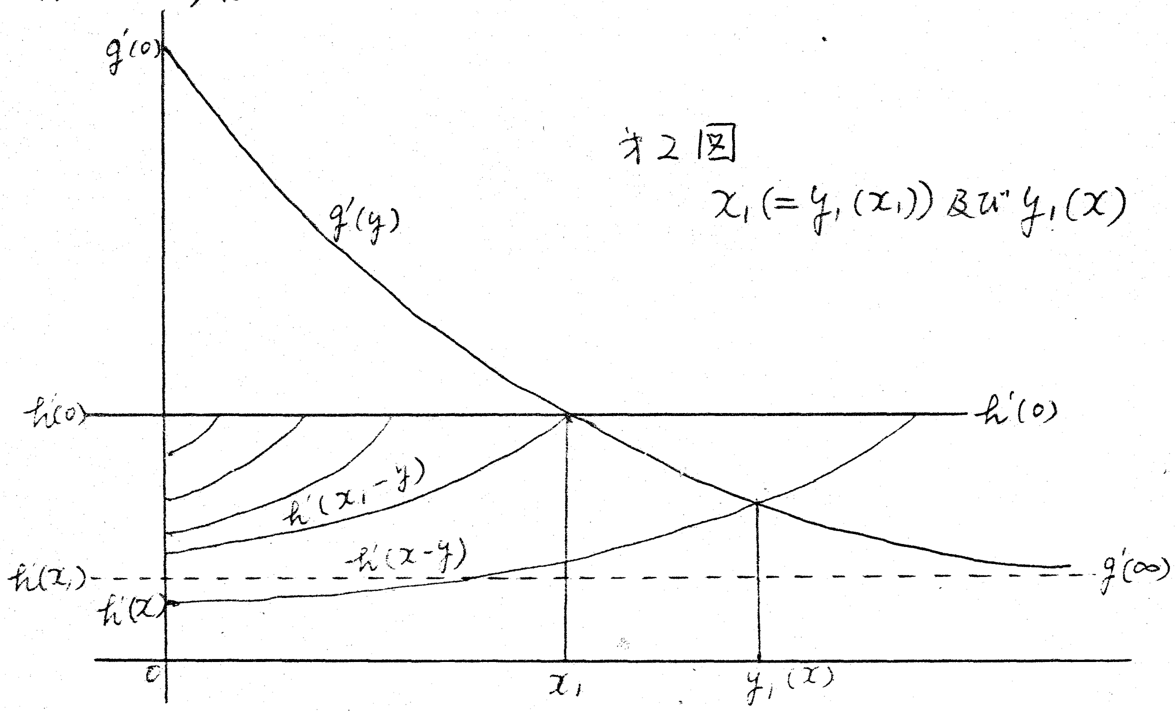
$$f_1'(x) = \frac{b g'(y_1(x)) - a h'(x - y_1(x))}{b - a} \tag{4.7}$$

$$= g'(y_1(x)) = h'(x - y_1(x))$$

(c) $x \geqq 0$ で $f_1'(x)$ は連続である．

(d) $x \geqq 0$ で $f_1(x)$ は単調増加で下に凹である．

以上の結果は次の図のような状況をあらわすことになる。（オ2図参照）



オ2図

$x_1 (= y_1(x_1))$ 及び $y_1(x)$

(2°) 才2次近似解　関数方程式(A)の解 $f(x)$ に対する才2次近似解 $f_2(x)$ によって

$$(A_2)\qquad f_2(x)=\underset{0\leqq y\leqq x}{\mathrm{Max}}\left[g(y)+h(x-y)+f_1(ay+b(x-y))\right]$$

を意味するものとする．ただしここに $f_1(x)$ は前述の才1次近似解とする．ここで y の関数として，$0\leqq y\leqq x$ で定義される．

$$(B_2)\qquad D_2(y;x)\equiv g(y)+h(x-y)+f_1(ay+b(x-y))$$

ならびにその y に関する導関数を考える：

$$(B_2')\qquad D_2'(y;x)=g'(y)-h'(x-y)$$
$$+f_1'(ay+b(x-y))(a-b)$$

これに関して次の結果が得られる．まず

$$D_2'(0;0)=g'(0)-h'(0)+f_1'(0)(a-b)>0$$

に注意しておこう．

(i) 次のような $x>0$ が存在する．すなわち $0\leqq y\leqq x$ において，$D_2'(y;x)>0$ であり従って

$$(4.8)\qquad f_2(x)=\underset{0\leqq y\leqq x}{\mathrm{Max}}\,D_2(y;x)=D_2(x,x)$$
$$=g(x)+f_1(ax)=g(x)+g(ax)$$

(ii) 次の方程式の根は一つそしてただ一つ存在する。これを x_2 であらわす．

(4.9) $$g'(x) = h'(0) + (b-a) f_1'(ax)$$

さらに $x \gtreqless x_2$ に対応して、それぞれ

(4.10) $$g'(x) \gtreqless h'(0) + (b-a) f_1'(ax)$$

また $x_2 < x_1$ である.

(iii) $x > x_2$ なる各 x に対して、次のような $y_2 (= y_2(x))$ が一つそしてただ一つ存在する.

(4.11) $$g'(y_2) = h'(x-y_2) + (b-a) f_1'(ay_2 + b(x-y_2))$$

さらに $0 < y_2(x) < x$ であり、かつ $y_2(x) < y_1(x)$ $(x_2 < x < \infty)$

(iv) $x > x_2$ で定義された $y_2(x)$((iii)参照) は $x > x_2$ において単調純増加でかつ連続である.

(v) オ2次近似解 $f_2(x)$ は次の性質をもつ

(a) $0 \leqq x \leqq x_2$ においては

(4.12) $$f_2(x) = g(x) + f_1(ax) = g(x) + g(ax)$$

従って

(4.13) $$f_2'(x) = g'(x) + a g'(ax)$$

(b) $x \geqq x_2$ においては、$g_2(x_2) = x_2$ とおくと、

(4.14) $$f_2(x) = g(y_2(x)) + h(x - y_2(x)) + f_1(ay_2(x) + b(x - y_2(x)))$$

(4.15) $$f_2'(x) = h'(x - y_2(x)) + b f_1'(ay_2(x) + b(x - y_2(x)))$$

$$= \frac{b g'(y_2(x)) - a h'(x - y_2(x))}{b - a}$$

(c) $x \geqq 0$ で $f_2'(x)$ は連続である.

(d) $x \geqq 0$ で $f_2(x)$ は単調純増加で下に凹である.

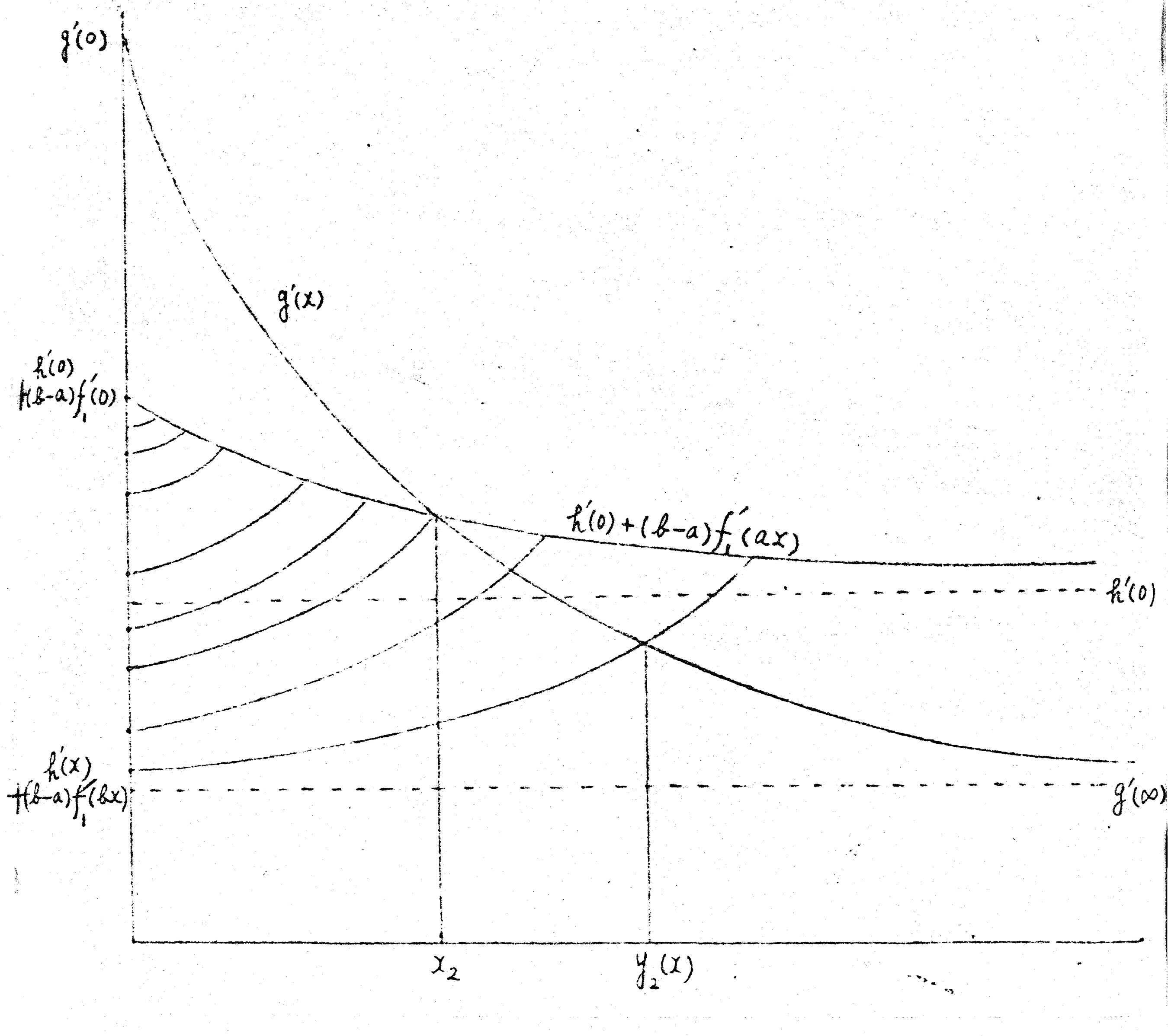
(vi) $0 < x < \infty$ において

$$0 < f_1'(x) < f_2'(x) \tag{4.16}$$

かつ $f_1(0) = f_2(0) = 0$. よってここで $0 < f_1(x) < f_2(x)$.

以上の結果は次の図のような状況もあらわすことになる.

（第3図参照）



第3図　$x_2 (= y_2(x_2))$ 及び $y_2(x)$

(3°) 第 $(N+1)$ 次近似解 $f_{N+1}(x)$ 数学的帰納法を適用するのに，次の補題を用意する．

補題 4.1. $k=1,2,\dots N$ に対して $\{f_k(x)\}$ 及び $\{Y_k(x)$ なる関数列は次の性質をもつと仮定しよう．

(a) $0\leqq x<\infty$ において，

$$(A_k)\qquad f_k(x)=\underset{0\leqq y\leqq x}{\mathrm{Max}}\left[g(y)+h(x-y)+f_{k-1}(ay+b(x-y)\right.$$

また $f_0(x)\equiv 0$ とする．

次のような正数 x_k が存在し，ただ一通りにさだまる．

$$(4.17)\qquad g'(x)=h'(0)+(b-a)f'_{k-1}(ax_k)$$

(c) 次の不等式が成り立つ：

$$(4.18)\qquad x_1>x_2>x_3>\cdots>x_{N-1}>x_N>0.$$

(d) $0\leqq x\leqq x_k$ に対して

$$(4.19)\qquad f_k(x)=g(x)+f_{k-1}(ax)=\sum_{h=0}^{k-1}g(a^h x)$$

(e) $x\geqq x_k$ に対して

$$(4.20)\qquad f_k(x)=g(y_k(x))+h(x-y_k(x))$$
$$+f_{k-1}(ay_k(x)+b(x-y_k(x)))$$

$$(4.21)\quad f_k'(x)=h'(x-y_k(x))+bf_{k-1}'(ay_k(x)+b(x-y_k(x))) = \frac{bg'(y_k(x))-ah'(x-y_k(x))}{b-a}$$

ここに $y_k(x_k)=x_k$，$x>x_k$ なる各 x に対して $y_k=y_k(x)$ は次の方程式の唯一の根である．

$$(4.22)\quad g'(y_k)-h'(x-y_k)+(a-b)f_{k-1}'(ay_k+b(x-y_k))=0$$

かつここで $0<y_k(x)<x$．

(g) $Y_k(x)$ は次のように定義される：$0\leqq x\leqq x_k$ においては $Y_k(x)=x$；$x_k<x<\infty$ においては $Y_k(x)=y_k(x)$．これに対して

$$(4.23)\quad x\geqq Y_1(x)\geqq Y_2(x)\geqq\cdots\geqq Y_{N-1}(x)\geqq Y_N(x)>0$$

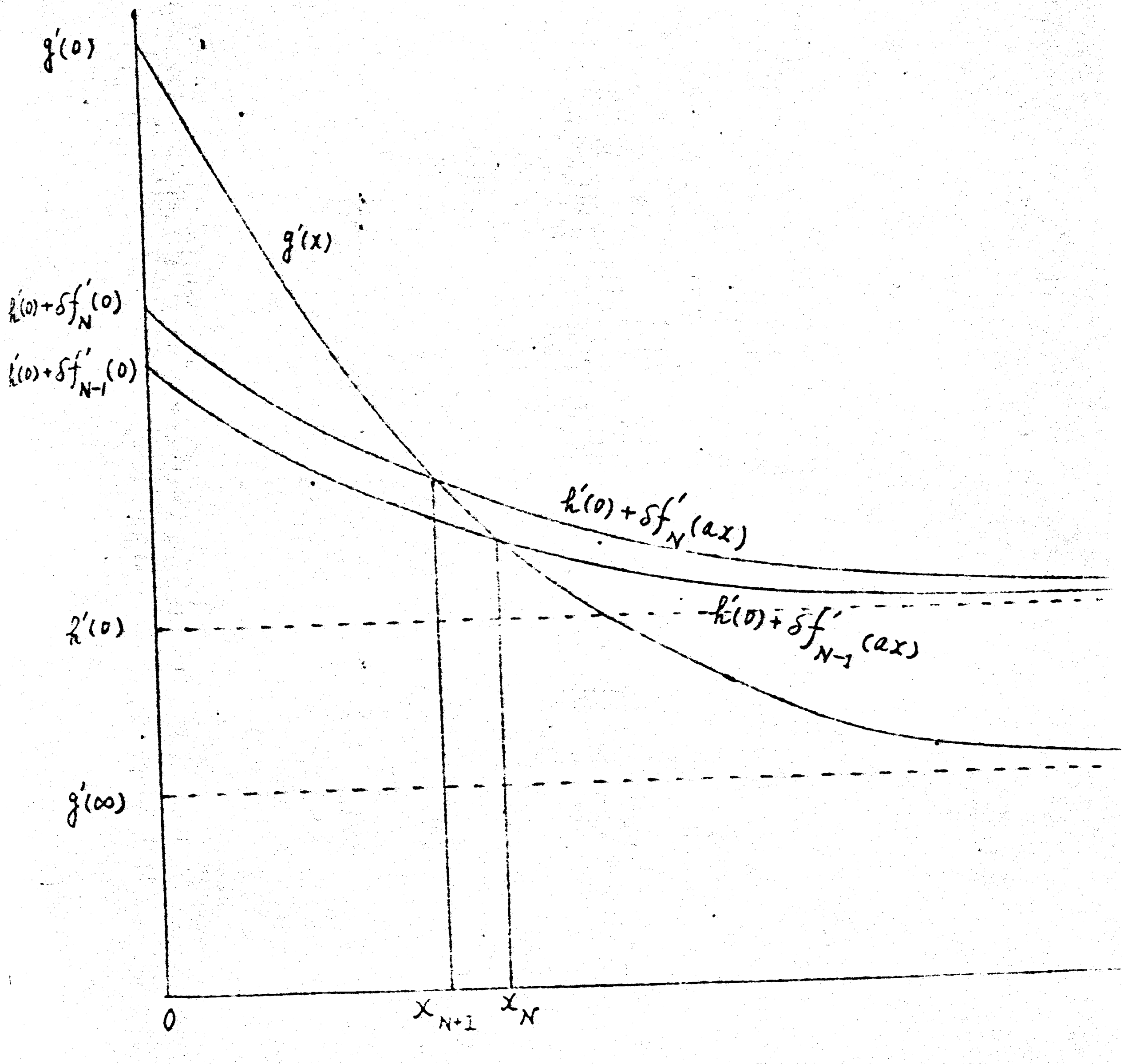
が成り立ち，かつ $x\geqq x_k$ ならば，$Y_k(x)<Y_{k-1}(x)$ $(k\geqq 2)$．

(h) $x\geqq 0$ に対して

$$(4.24)\quad 0<f_1'(x)<f_2'(x)<\cdots<f_{N-1}'(x)<f_N'(x)$$

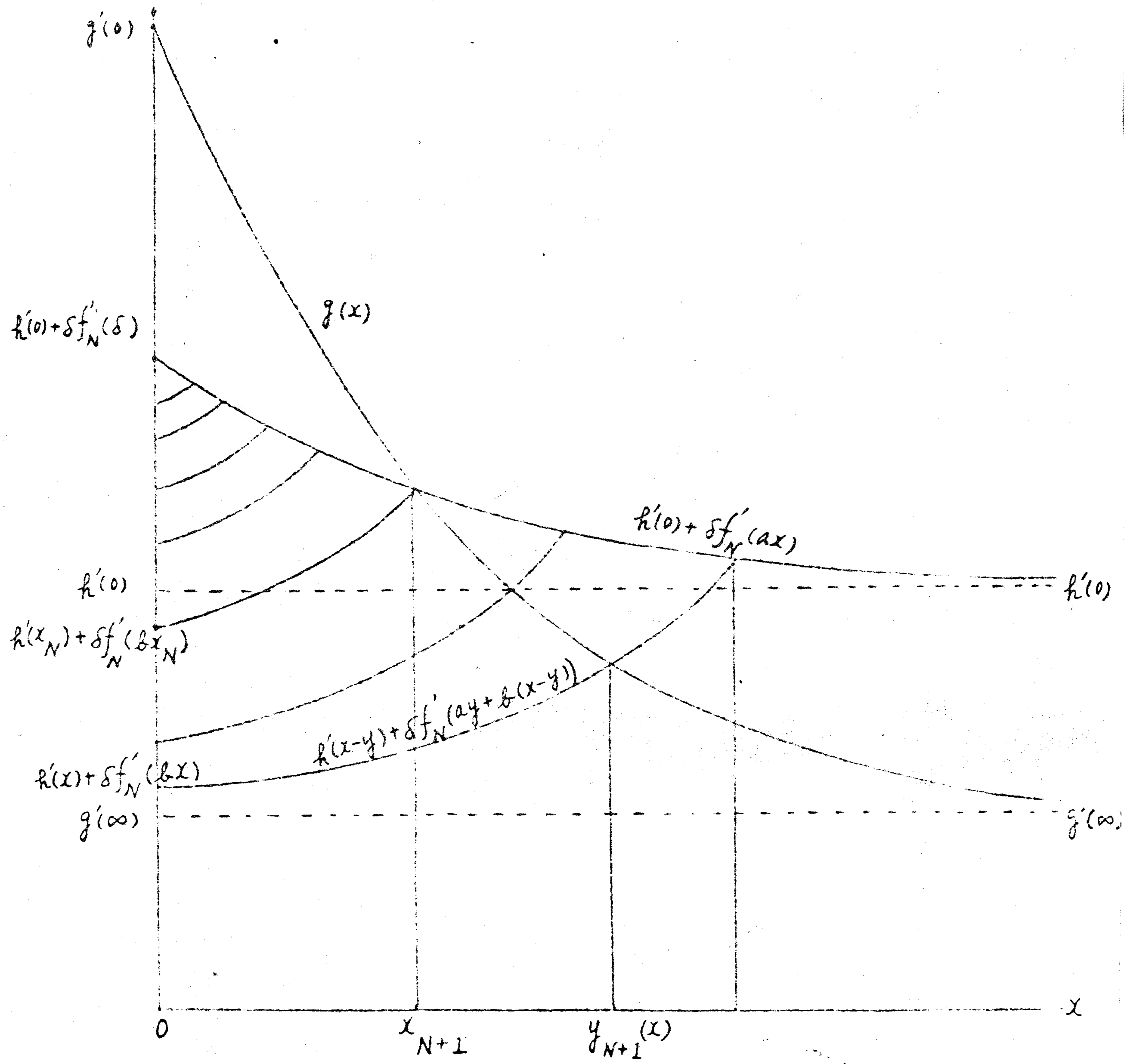
以上の仮定のもとにおいて，上述の命題 (a)−(h) は $k=N+1$ に対しても成立つ．したがって，すべての $k\geqq N+1$ に対しても成立つ．

この補題 4.1の内容に関連して，第4～第6図をあげておこう.

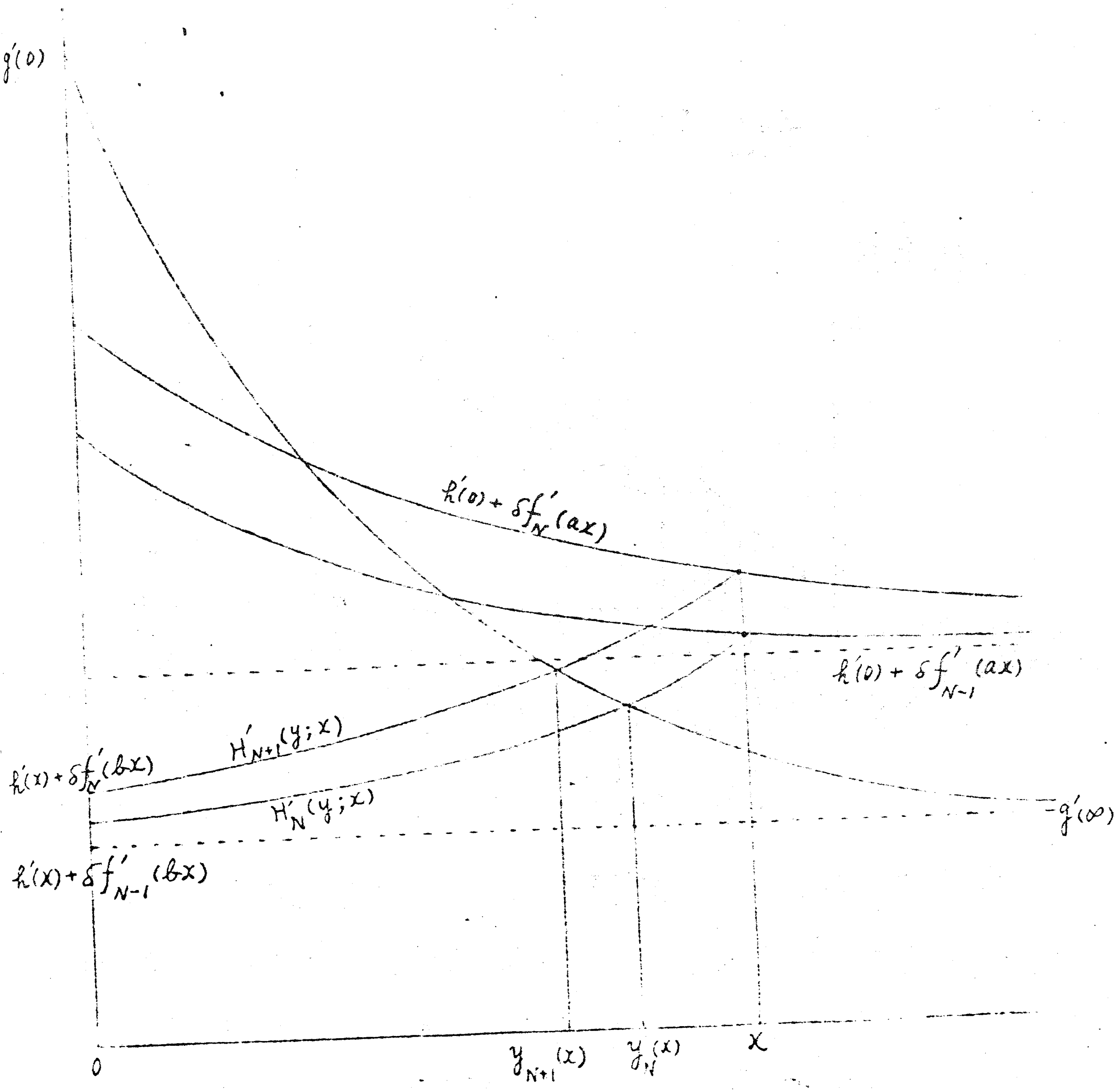


第4図　$x_{N+1} < x_N$ 及び

$$h'(0)+\delta f'_{N-1}(ax) < h'(0)+\delta f'_N(ax)$$



第5図　$x_{N+1}\,(=y_{N+1}(x_{N+1}))$ 及び $y_{N+1}(x)$



第６図　$0 < y_{N+1}(x) < y_N(x)$ の図示

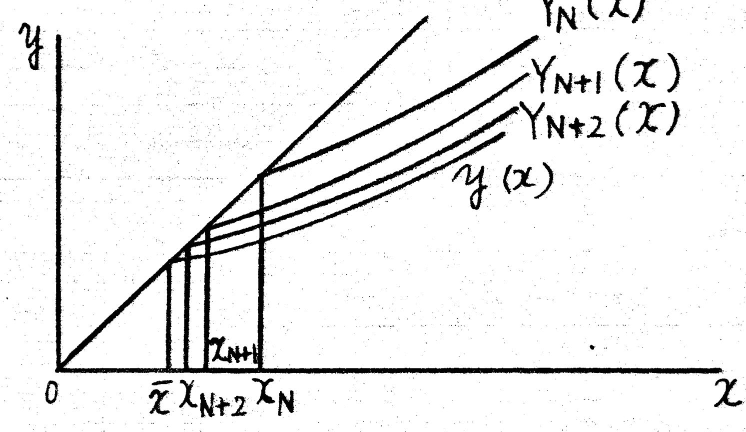
補題 4.2. 次のような関数 $f(x)$ および $y(x)$ ならびに $\bar{x}$ が存在する．

$$\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x) \tag{4.25}$$

$$\lim_{N\to\infty} y_N(x) = y(x) \tag{4.26}$$

$$\lim_{N\to\infty} x_N = \bar{x} \tag{4.27}$$

第7図参照



第7図　$\{x_N\}$ の $\bar{x}$ への収束
$\{Y_N(x)\}$ の $y(x)$ への収束

定理IV の証明　補題4.2.において得られた $f(x)$，$y(x)$ および $\bar{x}$ が定理IV で関数方程式 (A)の解，これに伴う最適政策 $y(x)$ および (2)(a) の $\bar{x}$ を与えることが示され，これによって定理 IV の証明が完結する。

§5. 諸定理の拡張　ここでは，§1に述べた定理Ｉ～IVの各々の拡張を，定理A～Dでそれぞれ与える．

〔1〕定理Ｉの拡張　この目的のために，いくつかの概念を導入する．これを次の定義5.1～5.4で述べる．

定義5.1.　$-\infty<u, v, w<\infty$ で定義された関数 $F(u, v, w)$ が次の形で表現されうるとき，$G(u, v)$ と w とによって Φ-加法により合成されているという．

$$(5.1)\quad F(u, v, w)=\Phi^{-1}[\Phi(G(u, v))+\Phi(w)]$$

ただし，ここに Φ および G に関しては，次のことを仮定しておく．

(1°)　$\Phi(y)$ は，$-\infty<y<\infty$ で定義され，純単調で連続，$\Phi(0)=0$ である．

(2°)　$G(u, v)$ は $-\infty<u, v<\infty$ で定義され，u および v の各々に関して，単調増加かつ (u, v) の関数として連続である．

定義5.2.　二次元ユークリッド空間の開集合 $\mathfrak{D}(x)$（径数 x は実数）に対して次のような性質をもつ (u, v) の集合を $R(x)$ であらわし，これを $\mathfrak{D}(x)$ の許容点境界集という．

(1°)　$(u, v)\in\overline{\mathfrak{D}(x)}$

(2°)　次の如き (u_1, v_1) は存在しない．

(i) $(u_1, v_1) \in \overline{\mathcal{D}(x)}$

(ii) $u_1 \geqq u,\ v_1 \geqq v,\ (u_1 - u) + (v_1 - v) > 0$

このとき $(u, v) \in R(x)$ に対して $v = d(x; u)$ とおく．この一価関数を $\mathcal{D}(x)$ の許容点境界関数という．

定義 5.3.

(a) 開集合の族 $\{\mathcal{D}(x)\}$, $0 \leqq x < \infty$, に関して，次の性質をもつとき，単調増加族という．

(1°) $x_2 > x_1$ ならば $\mathcal{D}(x_2) \geqq \mathcal{D}(x_1)$

(2°) $\lim\limits_{x' \downarrow x} (\mathcal{D}(x') - \mathcal{D}(x)) = \phi$

(b) 開集合の族 $\{\mathcal{D}(x)\}$, $0 \leqq x < \infty$ において，次の条件が満足されるとき，これを連続な許容点境界関数 $d(x; u)$ をもつという．

(1°) $R(x)$ は有界，閉，コンパクトかつ連結している．

(2°) $v = d(x; u)$ は $0 \leq x < \infty$, $u \in R(x)$ のとき，(x, u) に関して連続である．

定義 5.4. 関数 $\varphi(u, v)$ が $(u, v) \in \overline{\mathcal{D}(x)}$ に対して定義され，かつここで

(5.2) $\qquad 0 \leqq \varphi(u, v) \leqq c(x)$

ただし $c(x)$ は $x \geqq 0$ において連続，$\lim\limits_{n \to \infty} c^n(x) = 0$.

を満足するとき，$\varphi(u,v)$ は $\overline{\mathcal{D}(x)}$ において $C(x)$ を majorant にもつという．

以上の準備ののち，次の結果がえられる．

定理A．　関数方程式

$$(A_1) \qquad f(x)=\underset{(u,v)\in\overline{\mathcal{D}(x)}}{\mathrm{Max}} F(u,v,f(\varphi(u,v)))$$

において，次のことを仮定する．

(1°)　関数 $F(u,v,w)$ は，$-\infty<u,v,w<\infty$ で定義され $G(u,v)$ と w とによって Φ-加法により合成されている．

(2°)　開集合族 $\{\mathcal{D}(x)\}(0\leqq x<\infty)$ は単調であり連続な許容点境界関数 $d(x;u)$ をもつ．

(3°)　関数 $\varphi(u,v)$ は $\overline{\mathcal{D}(x)}$ において $C(x)$ を majorant にもつ．

(4°)

$$(5.3) \qquad \underset{(u,v)\in\overline{\mathcal{D}(x)}}{\mathrm{Max}} \Phi(G(u,v))\equiv M(x)$$

とおくとき　$C^n(x)=C(C^{n-1}(x))\ (n\geqq 2)$,

$$(5.4) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M(C^n(x))<\infty$$

然るとき原点 $x=0$ において連続でありかつそこで 0 となる解は存在し，ただ1通りにきまる．そしてこの解は $x\geqq 0$ において連続である．

証明は，すでに述べたように定理Ⅰのそれと本質的に全く同一である．それにも係らず，Φ, G, φ, C の諸関数に関する条件は極めて緩かであるのに注意されたい．定理Aにおいて，

$$\Phi(u)=u,\quad G(u,v)=g(u)+h(v)$$

$$\varphi(u,v)=au+bv,\quad c(x)=c\cdot x$$

とすれば定理Ⅰとなる．

［2］定理Ⅱ及び定理Ⅲの拡張　定理Aにおいて，$\Phi(f(x))$, $\Phi(G(u,v))$ をあらためて $f(x)$, $G(u,v)$ とかくことにすれば，(A_1) は

$$(A_2)\qquad f(x)=\underset{(u,v)\in\mathcal{D}(x)}{\mathrm{Max}}\left[G(u,v)+f(\varphi(u,v))\right]$$

という形になる．さて定理Ⅱおよび Ⅲのように，関数の凸凹性を問題にする段階に入るとき，上述の $d(x;u)$ の規準化が事柄を簡明するであろう．

定義5.5.　$0\leqq u\leqq x<\infty$ において定義された関数

$d(x;u)$ に対して,

$$(5.5)\qquad d(x;u)=\psi^{-1}(\psi(x)-\psi(u))$$

としてあらわされるとき，これを ψー減法という．ただし $\psi(0)=0$，$\psi(u)$ は $u\geqq 0$ にて純単調増加，連続とする．

補題5.1. $d(x;u)$ が ψー減法としてあらわされるとき，関数方程式 (A_2) は，次の形に書きあらためられる．

$$(A_3)\qquad f(x)=\operatorname*{Max}_{0\leqq u\leqq x}\left[G_1(u,x-u)+f(\varphi_1(u,x-u))\right]$$

ただしここに

$$(5.6)\qquad G_1(u,v)=G(\psi^{-1}(u),\psi^{-1}(v))$$

$$(5.7)\qquad \varphi_1(u,v)=\varphi(\psi^{-1}(u),\psi^{-1}(v)).$$

このような変換ののちにおいて，あらためて G_1 を G，φ_1 を φ とかいて，定理Ⅱ及びⅢの拡張を試みることができる．これにおいて，定理Aにおいて仮定した諸条件がすべて満足されているものとする．それらを一々列挙することは煩わしいから繰返さない．要は $\Phi(x)=x$，$d(x;u)=x=u$，$R(x):(u,x-u)(0\leqq u\leqq x)$ に注意すればよい．このような前提のもとにおいて，次の定理が得られる．

定理B　$G(u,v)$ 及び $\varphi(u,v)$ は，(u,v) に関して凸関数とする．すると関数方程式 (A_2) の解 $f(x)$ は，$x \geqq 0$ において x の 凸関数であり，(A_2) の右辺において最大値に達するには 0 或は x に等しい．

定理C　$G(u,v)$ 及び $\varphi(u,v)$ は (u,v) に関してそれぞれ狭義の凹関数及び広義の凹関数とする．すると関数方程式 (A_2) の解 $f(x)$ は狭義の凹関数である．

この証明も全く同様である．注意すべきことは，$\varphi(u,v) = au+bv$ ということは仮定しなくてもよい．もちろんその場合なら広義では凸でありかつ凹であるから定理B及びC両方が適用できる．

[3] 定理Ⅳ の拡張　この小節[3] は，上述の §1定理Ⅳの拡張として次の定理Dをあたえることである．

定理D．関数方程式

$$(A^*) \qquad f(x) = \max_{0 \leqq u \leqq x} \left\{ G(u, x-u) + f(\varphi(u, x-u)) \right\}$$

において，所与の関数 $G(\cdot,\cdot)$ 及び $\varphi(\cdot,\cdot)$ に関し次のことを仮定する．

仮定 1．関数 $G(u,v)$ は，$0 \leqq u, v < \infty$ で定義され，$G(0,0)=0$ であり，かつ次の条件を満足するものとする．

(a) u 及び v の各々に関して，$G(u,v)$ は単調純増加であり，(u,v) に関しては，連続でありかつ下に純凹である．すなわち $0<\lambda<1$，$0\leqq u_1, u_2, v_1, v_2<\infty$ なる任意の $\lambda, u_1, u_2, v_1, v_2$ の組に対して

$$G(\lambda u_1+(1-\lambda)u_2, \lambda v_1+(1-\lambda)v_2)$$

$$>\lambda G(u_1, v_1)+(1-\lambda)G(u_2, v_2)$$

(b) 偏導関数 $G_u(u,v)\equiv\dfrac{\partial G(u,v)}{\partial u}$，$G_v(u,v)\equiv\dfrac{\partial G(u,v)}{\partial v}$ が存在し，これらの関数が，u 及び v に関して連続微分可能である．

$$H(u,v)\equiv G_u(u,v)-G_v(u,v)$$

とおくとき，次の条件をみたす．

(i) $\dfrac{\partial H(u, x-u)}{\partial x}>0$，$0\leqq u<x$ に対して

(ii) $H(x,0)$ は x について純単調減少

(iii) $H(0,0)>0$

(iv) $H(\infty,0)<0$

仮定2．関数 $\varphi(u,v)$ は，$0\leqq u, v<\infty$ で定義され，$\varphi(0,0)=0$ であり，かつ次の条件を満足するものとする．

(a) u及びvの各々に関して，$\varphi(u, v)$は単調純増加であり、(u, v)に関しては，連続でありかつ下に凹である．

(b) 偏導関数 $\varphi_u(u, v) \equiv \dfrac{\partial \varphi(u, v)}{\partial u}$，$\varphi_v(u, v) \equiv \dfrac{\partial \varphi(u, v)}{\partial v}$ が存在し，これらの関数はu及びvに関して連続微分可能である。そのうえ

$$h(u, v) \equiv \varphi_u(u, v) - \varphi_v(u, v)$$

とおくとき，次の条件をみたす．

(i) $\dfrac{\partial h(u, x-u)}{\partial u} \leqq 0$ ，$(0 \leqq u \leqq x)$

(ii) $h(u, x-u) < 0$ ，$(0 \leqq u \leqq x)$

(c) $0 < u \leqq x$ のとき

$$0 \leqq \varphi(u, x-u) \leqq C(x)$$

となる$C(x)$が存在する、

ただし$C(x)$について，次のことを仮定する．

(i) $0 < C(x) < x$，（$0 < x < \infty$に対して）

(ii) $C(0) = 0$

(iii) $C(x)$はxの純単調増加関数

(iv) 各 $x \geqq 0$ に対して，$C_{(n)}(x) = C(C_{(n-1)}(x))$ は，$n \to \infty$ のとき，0に収束する．

仮定3．$G(u, v)$ と $\varphi(u, v)$ との間には，次の関係が成り立つ．

(a) $$\frac{G_v(0,0)}{G_V(0,0)} > \frac{1-\varphi_v(0,0)}{1-\varphi_V(0,0)}$$

(b) $\Delta(G, \varphi; u, x)$

$$\equiv \frac{\begin{vmatrix} G_v(u, x-u) & G_V(u, x-u) \\ \varphi_v(u, x-u) & \varphi_V(u, x-u) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \varphi_v(u, x-u) & \varphi_V(u, x-u) \end{vmatrix}}$$

は，$0 \leqq u \leqq x$ において正数でありかつ u の関数として，そこで純単調増加関数である．

仮定4.

$$\underset{0 \leqq y \leqq x}{\mathrm{Max}}\ \underset{0 \leqq u \leqq y}{\mathrm{Max}}\ G(u, y-u) = M(x)$$

とおくとき，$0 \leqq x < \infty$ なる各xに対して，

$$\sum_{n=0}^{\infty} M(c_{(\nu)}(x)) < \infty .$$

以上の仮定 1〜4 のもとにおいて，次のことが成り立つ。

終結(1)

関数方程式 (A^*) を満足し，かつ $x=0$ で連続で，$f(0)=0$ となる解が存在し，かつこのような性質をもつ解はただ一通りにきまる。この解は $x \geqq 0$ で連続である。

終結(2)

関数方程式 (A^*) の上述の解 $f(x)$ に対し，関数方程式 (A^*) の右辺の最大値に到達する $u=U(x)$ は，各xに対して，1つしかもただ1つ存在し，

$$f(x) = G(U(x), x-U(x)) + f(\varphi(U(x), x-U(x)))$$

となる。この $U(x)$ について次のことが成り立つ。

(a) 次の如き $\bar{x}$ が唯一通りにきまる。

$$H(\bar{x}, 0) + h(\bar{x}, 0) f'(a(\bar{x})) = 0 .$$

(b)　$0 \leqq x \leqq \bar{x}$ では，$U(x) = x$ であり，ここでは

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g\left(a_{(k)}(x)\right)$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g'\left(a_{(k)}(x)\right) \frac{d\,a_{(k)}(x)}{dx}$$

ただし，ここで

$$g(x) \equiv G_T(x, 0)$$

$$a(x) \equiv \varphi_U(x, 0)$$

$$a_{(k)}(x) \equiv a\left(a_{(k-1)}(x)\right)$$

(c)　$x \geqq \bar{x}$ では，$U(x) = u(x)$ であり，$u(x)$ は次の方程式の根 $u = u(x)$ として，1つただ1つ存在する。

$$H(u, x-u) + h(u, x-u) f'(\varphi(u, x-u)) = 0 .$$

〔4〕 関数方程式の具体的解法

前記の定理Dを用いると，関数方程式（A^*）の具体的解法として，次のような逐次的接近による解が求められる。

定理E． 定理Dの前提のもとにおいて，$0<x<\infty$ なる任意のxに対して，次のような逐次接近により，$f(x)$ を与えることができる。

(i)$_1$ $x \leqq \bar{x}$ ならば，$U(x)=x$ となり

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} g\left(a_{(k)}(x)\right)$$

(i)$_2$ $x>\bar{x}$ ならば $U(x)=u(x)$ となり

$x=u(x)+(x-u(x))$ とおいて

$$\text{利得}=G(u(x),\ x-u(x))$$

$$\text{新資源}=x^{(1)}=\varphi\left(u(x),\ x-u(x)\right)$$

次にこの新資源 $x^{(1)}$ について場合がわかれる。

(ii)$_1$ $x^{(1)} \leqq \bar{x}$ ならば，$U(x^{(1)})=x^{(1)}$ となり

$$f(x^{(1)})=\sum_{k=0}^{\infty} g\left(a_{(k)}(x^{(1)})\right)$$

よって

$$f(x)=G(u(x),\ x-u(x))+\sum_{k=0}^{\infty} g\left(a_{(k)}(x^{(1)})\right)$$

(ii)$_2$ $x^{(1)} \geqq \bar{x}$ ならば, $U(x^{(1)}) = u(x^{(1)})$ となり,

$x^{(1)} = u(x^{(1)}) + (x^{(1)} - u(x^{(1)}))$ とおいて

利得 $= \sum_{i=0}^{1} G(u(x^{(i)}), x^{(i)} - u(x^{(i)}))$

$(x^{(0)} = x)$

新資源 $= x^{(2)} = \varphi(u(x^{(1)}), x^{(1)} - u(x^{(1)}))$

次にこの新資源 $x^{(2)}$ について場合がわかれる。

(iii)$_1$ $x^{(2)} \leqq \bar{x}$ ならば, $U(x^{(2)}) = x^{(2)}$ となり,

$$f(x^{(2)}) = \sum_{k=0}^{\infty} g(a_{(k)}(x^{(2)}))$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{1} G(u(x^{(i)}), x^{(i)} - u(x^{(i)}) + \sum_{k=0}^{\infty} g(a_{(k)}(x^{(2)})))$$

$(x^{(0)} = x)$

(iii)$_2$ $x^{(2)} > \bar{x}$ ならば, $U(x^{(2)}) = u(x^{(2)})$ となり,

$x^{(2)} = u(x^{(2)}) + (x - u(x^{(2)}))$ とおいて

利得 $= \sum_{i=0}^{2} G(u(x^{(i)}), x^{(i)} - u(x^{(i)}))$

新資源 $= x^{(3)} = \varphi(u(x^{(2)}), x^{(2)} - u(x^{(2)}))$

以下同様に続ける。

一般には, $0 < x < \infty$ なる各 x に対して,

次のような自然数 $k (= k(x))$ がさだまる。

$$(k)\quad (1°)\quad x^{(i)} = \varphi(u(x^{(i-1)}), x^{(i-1)} - u(x^{(i-1)}))$$

$$(i = 1, 2, \cdots\cdots, k)$$

$$(2°)\quad x^{(0)} = x$$

$$(3°)\quad x^{(0)} > x^{(1)} > x^{(2)} > \cdots > x^{(k-1)} > \bar{x} \geqq x^{(k)}$$

$$(4°)\quad f(x) = \sum_{i=0}^{k-1} G(u(x^{(i)}),\ x^{(i)} - u(x^{(i)})) + \sum_{k=0}^{\infty} g(a_{(k)}(x^{(k)}))$$

この逐次方式の実際的な適用については，次の2つの注意を加えておかなければならない。

第1には，$u(x)$ を具体的に与えないと，上の逐次方式は役に立たない。実際には $u(x)$ の近似解 $u_n(x)$ をもとめて，これで代用するということになるであろう。したがって，第2にいかにして $u_n(x)$ をもとめるかという問題になる。

定理Dの証明は定理Ⅳの証明を逐一辿ってゆくことによって与えられる。定理Dにかかげられた諸条件は，そのために充分な条件としてえられたものである。すなわち，§2に述べたように，証明のパターンを保持するという方針を貫いたものである。この証明の途中において，$u(x)$の近似解 $u_n(x)$ が与えられる。ここに定理Eとの結びつきがでてくる。

この報告は，以上をもって，終りとし，証明の詳細は別の機会にしたい。