

確率的動的計画における

一二の注意

東京女子大 小河原正巳

I. 確率的予測の利用について

§1.1 確率的予測論から.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ および z を正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさそれぞれ $n > 1$ および 1 の独立な標本とする. $\bar{x} = n^{-1} \sum x_i$, $s^2 = n^{-1} \sum (x_i - \bar{x})^2$ とする.

$$(1.1) \quad T = \frac{z - \bar{x}}{s} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

は $\theta = (\mu, \sigma^2)$ に無関係に, 自由度 $n-1$ の t 分布 $g_{n-1}(t)$ にしたかう.

$$\int_{-\infty}^{t_{n-1}(\alpha)} g_{n-1}(t) dt = \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

とすると

$$(1.2) \quad P\{t_{n-1}(\alpha) < T < t_{n-1}(\beta)\} = P\left\{\bar{x} + t_{n-1}(\alpha) s \sqrt{\frac{n+1}{n-1}} < z < \bar{x} + t_{n-1}(\beta) s \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right\} \\ = \beta - \alpha \quad (0 < \alpha < \beta < 1)$$

これは母数の信頼区間と同様の意味で, z の <信頼区間> を与える. x を固定し, $\alpha = 0$ ($t_{n-1}(\alpha) = -\infty$) とおけば (1.2) から z の

分布関数が導かれる。それは t_{n-1} と自由度 $n-1$ の t 分布に t_2 の
う確率変数とするときの

$$(1.3) \quad Z = \bar{x} + t_{n-1} S \sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$$

の分布と同じである。

次に (\bar{x}, S^2) は (μ, σ^2) に対する十分統計量系であるから (μ, σ^2) の信頼分布 (fiducial distribution) $\phi(\mu, \sigma^2 | \bar{x}, S^2)$ が存在する。一方 Z は正規分布 $f(Z | \mu, \sigma^2)$ に t_2 から

$$(1.4) \quad \psi(Z | \bar{x}, S^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} f(Z | \mu, \sigma^2) \phi(\mu, \sigma^2 | \bar{x}, S^2) d\mu d\sigma^2 \\ = \frac{1}{B(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2})} \{(n+1)S^2\}^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{(Z-\bar{x})^2}{(n+1)S^2} \right]^{-\frac{n}{2}}$$

これは (1.3) の分布にほかならない (1.3) の分布と Z の確率的予測とよぶのであろうか; この考えは一般の時系列に対しても、ある仮定のもとに拡張されるのである。(Ogawara [1])

定義 1. (か一種の確率的予測)

確率過程の確率法則は未知のパラメタの系 θ によって定まるものとする。 x, x' は観測値系列の部分集合で $x \cap x' = \phi$ とし、 Z を予測対象とする。ここで x' を固定するとき、統計量 $T = t(Z, x; x')$ の分布は θ に無関係と仮定する。このとき、さらに x も固定して、 T の (x を固定しないときの) 分布から、 Z の形式的分布 $\Psi(Z | x, x')$ を導く。これを Z のか一種の確率的予測 (stochastic prediction) という。

定義2 (第=種の確率的予測)

x' を与えたときの条件付密度函数が

$$L(x; \theta | x') = g(t; \theta | x') h(x | x'), \quad t = t(x), \quad \theta \in \Theta$$

と書けるとき, $0 < \int_{\Theta} g(t; \theta | x') d\theta < \infty$ ならば

$$\phi(\theta | t, x') = g(t; \theta | x') / \int_{\Theta} g(t; \theta | x') d\theta$$

とおく. x'' を与えたときの, Z の分布函数を $F(Z; \theta | x'')$ とするとき,

$$(1.5) \quad \Psi(Z | t, x', x'') = \int_{\Theta} F(Z; \theta | x'') \phi(\theta | t, x') d\theta$$

を第=種の確率的予測 (fiducial prediction) という.

以上2つの定義がはじめに示した例のように一致するためにはある条件が必要である (Ogawara [1]) これらの概念は結局 (条件付) 又標本理論に属するもので Kitagawa [2] の理論で述べられている予測の概念と同等ではあるが, 後者は十分統計量の予測を取扱うしており, 前者は一般には条件付独立性を導入している点で若干異なるように思われる. しかしいずれにしても十分統計量が重要な役割を演ずることは明かであり, 両者の関係についての考察は後日にゆずりたい.

定義1 (または定義2) による予測の精度は必ずしも最善とはいえない. すなわち Z の予測 (分布) の分散が常に最小であるとは保証されない. それが大標本の場合には

定義3 (近似的確率的予測)

x を与えられたとき Z の条件付分布を $f(Z; \theta | x)$ とする。 x による θ の推定を $\hat{\theta}$ とするとき、 $f(Z; \hat{\theta} | x)$ をもって、 Z の確率的予測とすることが出来る。

しかし、これと $f(Z; \theta | x)$ との差に関する精密な議論は一般には困難のようである。

なお、R.A. Fisher [3] は上記の定義1の考え方の方を *fiducial prediction* とよんでいる。

例1. 正規分布にしたがう単純マルコフ過程

$$x = \{x_{t-1}, x_{t-3}, \dots, x_{t-2N+1}\}.$$

$$x' = \{x_t, x_{t-2}, \dots, x_{t-2N}\}$$

$$Z = x_{t+1}$$

$$\text{と、 } \bar{x}_1 = N^{-1} \sum x_{t-2\nu+1}, \quad \bar{x}_2 = N^{-1} \sum x_{t-2\nu}$$

$$x'_\nu = x_{t-2\nu+1} - \bar{x}_1, \quad x''_\nu = x_{t-2\nu} - \bar{x}_2 \quad (1 \leq \nu \leq N), \quad x''_0 = x_t - \bar{x}_2$$

とおき、 $\hat{c} = \sum x'_\nu x''_\nu / \sum (x''_\nu)^2$ とおけば、定義1によつて

$$(1.6) \quad Z = \bar{x}_1 + \hat{c} x''_0 + t_{N-2} \left[\frac{1}{N-2} \sum (x'_\nu - \hat{c} x''_\nu)^2 \left(\frac{N+1}{N} + \frac{(x''_0)^2}{\sum (x''_\nu)^2} \right) \right]^{1/2}$$

ただし t_{N-2} は自由度 $N-2$ の t 分布にしたがう確率変数である

$$Z = \{x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_{t+k}\}$$

の場合も同様である。独立系列の場合は (1.3) となる。

例2. 多項分布

K 種の事象が n 回の試行中それぞれ t_1, \dots, t_K 回起きたとき、

さらに m 回の試行で起るべき回数 z_1, \dots, z_k とすると,

$$(1.7) \quad \psi(z_1, \dots, z_k | t_1, \dots, t_k) = \frac{(n+k-1)! m! \prod_{j=1}^k (t_j + z_j)!}{(n+m+k-1)! \prod_{j=1}^k t_j! \prod_{j=1}^k z_j!}$$

によって z_1, \dots, z_k の fiducial prediction が与えられる.

これは一般事前分布を仮定した場合の Bayesian prediction (Fisher [3]) と一致している.

とくに $m=1$ のときは

$$(1.8) \quad \psi(z_j | t_j) = \begin{cases} (t_j+1)/(n+k) & z_j=1 \text{ のとき} \\ 1 - (t_j+1)/(n+k) & z_j=0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (j=1, 2, \dots, k)$$

これは推定値 $\hat{p}_j = (t_j+1)/(n+k)$ を与えるものと考えてよい.

また, とくに二項分布 ($k=2$) の場合には

$$(1.9) \quad \psi(z_j | t_j) = \begin{cases} (t_j+1)/(n+2) & z_j=1 \text{ のとき} \\ 1 - (t_j+1)/(n+2) & z_j=0 \text{ のとき} \end{cases} \quad (j=1, 2)$$

状態 e_1, e_2, \dots, e_k のマルコフ連鎖 $x(t)$ の実現が $x(n-j) = x_{n-j}$ ($j \geq 0$) のとき, $y_j = x_{n-2j+1}$, $x'_j = x_{n-2j}$ ($j \geq 1$) とする. $\{x'_j\}$ の中で $x_n = e_r$ と同じもの個数を N_r , $(z'_j = e_r, y_j = e_s)$ なる組の数を N_{rs} ($s=1, 2, \dots, k$) とすれば $x(n+1)$ の fiducial prediction は

$$(1.10) \quad \hat{p}_{rs} = (N_{rs} + 1) / (N_r + k) \quad (s=1, \dots, k)$$

例3. ポアソン過程

過去 n 期間に t 回生起したとき, 次の 1 期に起る回数 Z と

すれば定義2によつて

$$(1.11) \quad \psi(z|t) = \binom{n}{n+1}^{t+1} \binom{t+z}{z} \left(\frac{1}{n+1}\right)^z \quad (z=0, 1, 2, \dots)$$

§1.2 初期決定問題

たとえば、多次元配分過程において、制約条件を

$$\sum_{j=1}^N a_{ij}(x_j) \leq c_i \quad i=1, 2, \dots, r.$$

とし、確率変数 z_j の分布関数を $\Psi_j(z)$ とすると

$$(1.12) \quad f_N(\{c_i\}) = \text{Max}_{x_1, \dots, x_N} \sum_{j=1}^N \int g_j(x_j, z) d\Psi_j(z) \\ = \text{Max}_{\{a_{iN}(z_N) \leq c_i\}} \left[\int g_N(z_N, z) d\Psi_N(z) + f_{N-1}(\{c_i - a_{iN}(z_N)\}) \right].$$

ここで z_j の分布関数が未知の場合に、過去において、 z_j の実現値が直接または間接に知られている存うけ、それによる確率的予測を $\Psi_j(z)$ とすればよい。

§1.3 適応制御過程

x_t : 状態変数, y_t : 制御変数, r_t : 定常確率過程 のとき
過程の構造を

$$x_{t+1} = g(x_t, y_t, r_t) \quad (t=0, 1, \dots, N)$$

効用関数 E .

$$u_t(x_t, y_t, x_{t+1}) = u_t(x_t, y_t, g(x_t, y_t, r_t)) \equiv v_t(x_t, y_t, r_t)$$

とする。 $x_0 = c$ から出発して、 $U_N = \sum_{t=0}^N v_t$ の期待値を最大にするのが目的である。 ここで $\{r_t\}$ は $\{x_t\}$, $\{y_t\}$ には無関係で、その率法則は未知であるが、 g の構造は、 x_t, y_t 及びその過去の値から、 r_t の実現値が求められるものとする。 その標本系列 $\{r_t, r_{t-1}, \dots, r_0, r_{-1}, \dots\}$ から r_t の確率的予測が求められるとし、これを $\Psi_t(r)$ ($t=0, 1, \dots, N$) とする。 この予測はデータが与えるに
 してかつ改善されてゆく。 この確率的予測による期待値を \tilde{E} で表わす。

$$f_N(c) = \text{Max}_{\{y_0, \dots, y_N\}} \tilde{E} U_N = \text{Max}_{\{y_0, \dots, y_N\}} \sum_{t=0}^N \int v_t(x_t, y_t, r) d\Psi_t(r) \quad (N \geq 1)$$

ここで

$$f_0(c) = \text{Max}_{y_0} \int v_0(c, y_0, r) d\Psi_0(r)$$

$$f_t(c) = \text{Max}_{y_0} \int [v_0(c, y_0, r_0) + f_0(g(c, y_0, r_0))] d\Psi_0(r_0)$$

$t = t-1$

$$f_0(g(c, y_0, r_0)) = \text{Max}_{y_1} \int v_1(g(c, y_0, r_0), y_1, r_1) d\Psi_1(r_1)$$

一般に

$$(1.13) \quad f_N(c) = \text{Max}_{y_0} \int [v_0(c, y_0, r_0) + f_{N-1}(g(c, y_0, r_0))] d\Psi_0(r_0)$$

例1. $r_t = \pm 1$ で独立の場合における、最終状態の函数

$u_N(x_N, y_N, x_{N+1})$ の制御の問題。 この場合には $u_t = v_t = 0$

($t=0, 1, \dots, N-1$). $t=0$ までは $r=+1$ が m 回, $r=-1$ が n 回起きたことが経験されているときは

$$(1.14) \quad f_N(c, m, n) = \underset{y_0}{\text{Max}} \left[\psi_{mn} f_{N-1}(c_+, m+1, n) + (1-\psi_{mn}) f_{N-1}(c_-, m, n+1) \right]$$

$$\text{ただし} \quad c_+ = g(c, y_0, +1), \quad c_- = g(c, y_0, -1)$$

$$\text{また (1.9) によって} \quad \psi_{mn} = (m+1)/(m+n+2).$$

r_t がマルコフ連鎖をなすときは (1.10) を用いればよい。

また r_t が一般的不未知の分布にしたがって独立のときは、近似的に多項分布の場合の (1.8) によることができる。

さらにまた, r_t が正規自己回帰過程のときは (1.6) またはこれを一般にした式が利用される。

例2 マルコフ決定過程.

マルコフ決定過程は推移確率行列は既知として論じられる場合が多いが, 実際にはこれを経験的に推定しなければならないであろう。

M 種類の決定に対応する推移確率行列を $(p_{ij}(y))$ ($i, j=1, 2, \dots, M$) とするとき, 情報の増加に応じて, その推定 $(\tilde{p}_{ij}(y))$ を (1.10) によって計算してゆけばよいわけである。

なお利得や割引率も確率変数と考えるべき場合もあるが, その取扱いは今まで述べた方法に準じてなされよう。

II. 分散の問題に関連して

確率的動的過程に対し、その目的函数の期待値を最適化することが普通に行われているが、その分散を求めることが必要であり、また多くの場合に可能でもある。しかし、目的函数の分布を制御変数の函数として求め、それを制御するのが理想的ではあるが、これは一般には困難である。ここでは、これに若干の関連をもつ、一二の特殊な場合をあげる。

§2.1 Bang-bang 制御

定数係数の確率的線形微分方程式 (形式的表現による)

$$(2.1) \quad \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_n x(t) = u(t) + \varepsilon(t)$$

において、 $\varepsilon(t)$ は Wiener 過程で $E(d\varepsilon(t))^2 = \sigma^2 dt$ 、 $u(t)$ は制御函数で

$$(2.2) \quad |u(t)| \leq 1$$

とする。

$$(2.3) \quad x(0) = x_0^1, x'(0) = x_0^2, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^n$$

から出発して、最短時間で $x(t) = x'(t) = \dots = x^{(n-1)}(t) = 0$ にく近づくように制御する場合には、形式的には期待値 $E x(t)$ の制御の場合と同様に作る、という意味において、 $\varepsilon(t)$ を \langle 直接に \rangle 制御することはできないが、 $\varepsilon(t)$ は点 $(x(t), x'(t), \dots, x^{(n-1)}(t))$ の位置

に影響を与え、 $u(t)$ はその点の位置に比例して $+1$ または -1 をとるようになる。

すなわち、 $x^1(t) = x(t)$ として ($x^0 = t, \frac{dx^0}{dt} = 1$)

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{dx^1}{dt} = x^2(t), \dots, \frac{dx^{n-1}}{dt} = x^n(t) \\ \frac{dx^n}{dt} = -a_1 x^n - a_2 x^{n-1} - \dots - a_n x' + u + \varepsilon' \end{cases}$$

Pontryagin [5] の記法で

$$(2.5) \quad H(\psi, x, u, \varepsilon) = \psi_1 x^2 + \psi_2 x^3 + \dots + \psi_{n-1} x^n + \psi_n (-a_1 x^n - \dots - a_n x' + u + \varepsilon')$$

随伴微分方程式は ($\frac{d\psi_0}{dt} = 0$)

$$(2.6) \quad \begin{cases} \frac{d\psi_1}{dt} = a_n \psi_n \\ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + a_{n-1} \psi_n \\ \dots \\ \frac{d\psi_{n-1}}{dt} = -\psi_{n-2} + a_2 \psi_n \\ \frac{d\psi_n}{dt} = -\psi_{n-1} + a_1 \psi_n \end{cases}$$

したがって

$$(2.7) \quad \frac{d^n \psi_n}{dt^n} - a_1 \frac{d^{n-1} \psi_n}{dt^{n-1}} + \dots + (-1)^n a_n \psi_n = 0$$

$$(2.8) \quad \psi_n = C_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n e^{\lambda_n t}$$

ただし $\lambda_j = \bar{\lambda}_n$ のときは $C_j = \bar{C}_n$, 重根がある場合も同様。

かくして、個々の標準函数 $\varepsilon(t)$ に対して

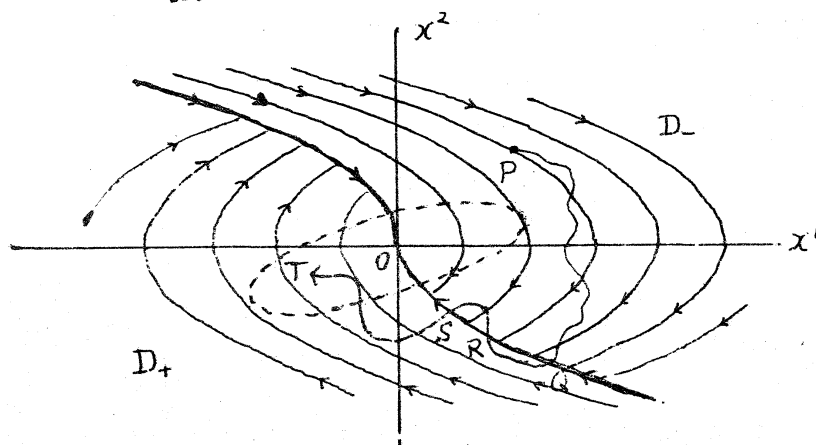
$$(2.9) \quad \sup_{|u| \leq 1} H(\psi, x, u, \varepsilon) = \psi_1 x^2 + \dots + \psi_{n-1} x^n \\ - \psi_n (a_1 x^m + \dots + a_n x' - \varepsilon') + \sup_{|u| \leq 1} \psi_n u$$

ゆえに

$$(2.10) \quad u(t) = \text{sign } \psi_n$$

例1 $n=2$ の場合

$$(2.11) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = u(t) + \varepsilon'(t) \quad (\text{形式的に})$$



解は Pontryagin [57] の例の如くに、領域 D_+ では $u(t) = +1$, D_- では $u(t) = -1$ とすればよい。実際には点 P から出発して、たとえば図の如くに $P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow S \rightarrow T \rightarrow \dots$ のような経路を辿るのである、そして原点 O に達することはない。実際吾々は $\int \varepsilon'(t) dt = 0$ とする最小時間 t と、そのための制御を求めたのと同じことをしたという結果になる。

$\varepsilon(0) = 0$ とすると、どこから出発しても、 t 時間後には

$$\int \sigma_1^2(t) dt = V(x') = \sigma^2 t^3 / 3$$

$$(2.12) \quad \begin{cases} \sigma_2^2(t) = \nabla(x^2) = \sigma^2 t \\ \text{cov}(x^1, x^2) = \sigma^2 t^2 / 2 \\ \rho = \rho(x^1, x^2) = \sqrt{3}/2 \end{cases}$$

上記の制御によつて $E x^1(t) = E x^2(t) = 0$ とする時間(最短時間)を t_0 とすると, t_0 時間後に楕円

$$(2.13) \quad \frac{(x^1)^2}{\sigma_1^2(t_0)} + \frac{(x^2)^2}{\sigma_2^2(t_0)} - \frac{2\rho x^1 x^2}{\sigma_1(t_0)\sigma_2(t_0)} = (1-\rho^2) \chi_2^2(\alpha)$$

の中に点が存在する確率は $1-\alpha$ である. ここに $\chi_2^2(\alpha)$ は自由度 2 の χ^2 分布の $100\alpha\%$ 点である. これがすなわち, はじめに述べた <近づく> の意味である.

§2.2 分散の制御

例 2. 確率的差分方程式

$$(2.14) \quad x_n - \rho x_{n-1} = u_n + \varepsilon_n \quad (n=0, 1, \dots)$$

において, $\{\varepsilon_n\}$ は直交確率変数列で $E\varepsilon_n = 0$, $V(\varepsilon_n) = \sigma_\varepsilon^2$ とする.

$\{u_n\}$ は制御変数列である. $x_0 = a$ とすれば

$$(2.15) \quad E x_n = \rho^n a + \rho^{n-1} u_1 + \dots + u_n$$

であつて, 期待値は適当に制御することができるが

$$(2.16) \quad \begin{aligned} V(x_n) &= \frac{1-\rho^{2n}}{1-\rho^2} \sigma_\varepsilon^2 & (\rho \neq 1) \\ &= n \sigma_\varepsilon^2 & (\rho = 1) \end{aligned}$$

であつて, 分散は制御できない. この点は例 1 と同様である.

次に ϵ の制御変数 u

$$(2.17) \quad u_n = c x_{n-1} \quad |c| \leq 1$$

とすれば

$$(2.18) \quad E x_n = (\rho + c)^n u$$

$$(2.19) \quad V(x_n) = \frac{1 - (\rho + c)^{2n}}{1 - (\rho + c)^2} \sigma_\epsilon^2 \quad (|\rho + c| \neq 1)$$

$$= n \sigma_\epsilon^2 \quad (|\rho + c| = 1)$$

おのれの n に対し、この分散を最小にする制御は

$$(2.20) \quad \begin{cases} \rho > 1 \text{ のとき} & c = -1 \\ \rho < -1 \text{ のとき} & c = 1 \\ |\rho| \leq 1 \text{ のとき} & c = -\rho \end{cases}$$

これはまた $|E x_n|$ を最小にする制御でもある。

$$(2.21) \quad x_n - \rho_n x_{n-1} = u_n + \epsilon_n$$

$$(2.22) \quad u_n = c_n x_{n-1}$$

の場合にも、 $E x_{n-1} \epsilon_n = 0$ のとき、 $V(x_n) = \sigma_n^2$ となる。

$$(2.23) \quad \sigma_n^2 = (\rho_n + c_n)^2 \sigma_{n-1}^2 + \sigma_\epsilon^2$$

であるから、

$$(2.24) \quad \begin{cases} \rho_n > 1 \text{ のとき} & c_n = -1 \\ \rho_n < -1 \text{ のとき} & c_n = 1 \\ |\rho_n| < 1 \text{ のとき} & c_n = -\rho_n \end{cases}$$

参考文献

- [1] M. Ogawara: *Time series analysis and stochastic prediction, II.*
Bull. Math. Statist. Vol. 8, No. 3~4, 55-72, Vol. 9, No. 1, 1-9
(1959)
- [2] T. Kitagawa: *Successive process of statistical inference associated
with an additive family of sufficient statistics.*
Bull. Math. Statist. Vol. 7, No. 3~4, 92-112 (1957)
- [3] R. A. Fisher: *Statistical methods and scientific inference* (1956)
- [4] 宮沢光一: 多段決定問題における情報構造.
季刊理論経済学, Vol. 17, No. 2, 62-74 (1966)
- [5] L. S. Pontryagin et al.: *The mathematical theory of optimal
processes* (1962).