

複素多様体の変形について

京大数理解析研 中野 茂男

徳島大・工学部 江口 和男 記

§ 1. 問題の意義

微分多様体 X にどの程度複素構造をいれようかといふことについて考察する。即ち V を複素多様体、 M を微分多様体とすると、各点 $t \in M$ に複素多様体 V_t を対応させて、

(i) 各 V_t は微分多様体としては V の微分構造に同じ、

(ii) $t \rightarrow V_t$ の対応は t に可微分的に従属する、

ように出来るかという問題である。

$\dim_{\mathbb{C}} V = 1$ 即ち Riemann 面の複素構造の変形については、Riemann にまで遡ることが出来る。然しながら2次元以上、複素多様体の変形については非常に困難であった。

1957年 A. Frölicher 及び A. Nijenhuis は、 \mathcal{H} を V 上の holomorphic vector fields の germs の sheaf とするとき、 $H^1(V, \mathcal{H}) = 0$ ならば、 V の変形は存在しないことを示した [17]。以下、これに続く結果として、K. Kodaira 及び D.C. Spencer による基本的な結果を紹介する。なお、§ 2 については K. Kodaira 及び D.C. Spencer [34] (特に I, II)、§ 3 については K. Kodaira, D.C. Spencer [31]、及び K. Kodaira,

K. Kodaira, D.C. Spencer, L. Nirenberg [36]. § 4 については K. Kodaira, D.C. Spencer [37] を参照されたい.

§ 2. Formulation

以下では、微分可能というときには C^∞ の意味であるとする。また考える多様体は全て *paracompact* であるとする。

M は連結な微分多様体、 $\nu \xrightarrow{\omega} M$ は微分可能な M 上の *fibre bundle* で各 *fibre* $V_t = \omega^{-1}(t)$ 、 $t \in M$ は連結、*compact* な微分多様体 X に微分同型であるものとする、即ち写像 ω は次の性質を持つ。

- (1) M 上への微分可能写像。
- (2) *proper* 即ち K を M の任意の *compact* 集合とすれば、 $\omega^{-1}(K)$ は ν の *compact* 集合である。
- (3) ω の *Jacobian* は常に最大の *rank* を持つ。

この性質から、 $t_0 \in M$ を任意の M の点とするとき、 t_0 の近傍 U と

$$\begin{array}{ccc} \omega^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times X \\ \omega \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{id} & U \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{微分同型 } \phi: \omega^{-1}(U) \rightarrow U \times X \text{ で} \\ \text{左の図式を可換にするものがある} \end{array}$$

ことがいえる。但 id は恒等写像 $p: U \times X \rightarrow U$ は $(t, x) \rightarrow t$ で定義されるものとする。

定義 1. 微分可能な *fibre bundle* $\omega: \nu \rightarrow M$ が複素多様

体の可微分複素多様体であるというものは以下の条件を満足することである。

(1) 各点 $t \in M$ 上の fiber $V_t = \omega^{-1}(t)$ は複素多様体である。

(2) V の局所有限な開被覆 $\{U_j\}$ と、各 U_j で定義された微分可能な複素数値関数 Z_j^1, \dots, Z_j^n 及び実数値関数 t_j^1, \dots, t_j^m があり、以下の条件を満足する。

(a) $(t_j^\lambda) \quad \lambda = 1, \dots, m$ は M 上の C^∞ -局所座標。

(b) $(\operatorname{Re} Z_j^\alpha, \operatorname{Im} Z_j^\beta, t_j^\lambda) \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n,$

$\lambda = 1, \dots, m$ は U_j 上の C^∞ -局所座標。

(c) $t \in M$ を固定すると、 (Z_j^α) は $V_t \cap U_j$ で定義された V_t の複素構造を定義する解析的局所座標。

定義 2. $\omega: V \rightarrow M, \quad \omega': V' \rightarrow M'$ を二つの複素多様体の可微分族とするとき、

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Psi} & V' \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega' \\ M & \xrightarrow{\varphi} & M' \end{array}$$

を可換にする微分同型 Ψ, φ があり、各点 $t \in M$ に対して、 Ψ の V_t 上への制限は V_t から $V_{\varphi(t)} = \omega'^{-1}(\varphi(t))$ の上への解析的同型であるとき、 ω, ω' の族は同値であるという。

定義 3. 複素多様体の可微分族 $\omega: V \rightarrow M$ はある $t_0 \in M$

に対し

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\bar{\omega}} & V_{t_0} \\ \omega \downarrow & & \downarrow \omega \\ M & \xrightarrow{\text{const. map}} & t_0 \end{array}$$

を可換にする C^∞ -写像 $\bar{\omega} : \mathcal{V} \rightarrow V_{t_0}$ があって、 $\bar{\omega}$ を各 V_t 上に制限すると V_t から V_{t_0} の上への解析的同型であるとき、自明な族であるといわれる。

定義4. $\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} M$ は複素多様体の可微分族、 N は微分多様体 $f : N \rightarrow M$ は可微分写像とする。

N 上の複素多様体の可微分族 $\mathcal{W} \xrightarrow{\pi} N$ は、微分写像 $\bar{\omega} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ があって、以下の条件を満足するとき、写像 f によって、 $\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} M$ から誘導された族であるという。

条件(i)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \xrightarrow{\bar{\omega}} & \mathcal{V} & \text{は可換。} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \omega \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

(ii) 各点 $s \in N$ に対し、 $\bar{\omega}$ の $W_s = \pi^{-1}(s)$ 上への制限は W_s から $V_{f(s)} = \omega^{-1}(f(s))$ の上への解析的同型である。

以上の定義で $\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} M$ を複素解析多様体で、微分可能写像を正則な写像でおきかえると複素多様体の解析的変形族及びその同値、自明な族、誘導された族の概念が得られる。

$\mathcal{V} \xrightarrow{\omega} M$ を与えられた複素多様体の可微分族、 $\bar{\omega}$ は \mathcal{V} の

tangent bundle の sub bundle で V の各 fibre に沿う tangent vector のうち holomorphic なものからなるもの、または定義 1 の座標系による canonical basis $\frac{\partial}{\partial z_i^*}, \frac{\partial}{\partial t_i}$ の一次結合である V の tangent vector 全体からなる sub bundle とする。 M 上の tangent bundle $T(M)$ の π による逆像を $\pi^* T(M)$ とすると、vector bundles の exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \pi^* T(M) \rightarrow 0$$

が得られる。これを可微分族 $V \xrightarrow{\pi} M$ の vector bundles の fundamental sequence という。

\mathcal{F}, \mathcal{E} の C^∞ -cross-section で各 V_t 上に制限した時には V_t 上の holomorphic な cross-section を与えるもの \mathcal{F} の germs の sheaf をそれぞれ \mathcal{H}, \mathcal{E} で表わす。明らかに自然な injection 及び準同型写像によって sheaf の exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{j} \mathcal{E}/\mathcal{H} \rightarrow 0$$

が得られる。

$T(M)$ の C^∞ -cross-section の germs の sheaf を T_M , π により T_M から導かれる V 上の sheaf を \mathcal{T} とする $\mathcal{T} = \pi^* T_M$ すると \mathcal{T} は \mathcal{E}/\mathcal{H} の subsheaf とみることができる、 $\pi = j^{-1}(\mathcal{T})$ とおくことにより sheaves の exact sequence

$$0 \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{T} \rightarrow 0$$

が得られる。この sheaves の exact sequence に対応する

cohomology exact sequence

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \oplus) \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \pi) \rightarrow H^0(\mathcal{U}, T) \rightarrow H^1(\mathcal{U}, \oplus) \rightarrow \dots$$

において $H^0(\mathcal{U}, T)$ は $H^0(M, T_M) = T_M$ と π によって誘導される写像によって同一視される。従って、上の exact sequence における $H^0(\mathcal{U}, T)$ を $H^0(M, T_M)$ で置き換えた時の $H^0(M, T_M)$ から $H^1(\mathcal{U}, \oplus)$ への写像を ρ で表わす。

定義1で述べた \mathcal{U} の局所座標系 $\{\mathcal{U}_j, (z_j^\alpha, t_j^\alpha)\}$ に対し、

$$z_j^\alpha(p) = g_{jk}^\alpha(z_k(p), t) \quad t = \pi(p) \quad p \in \mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k \quad \alpha = 1, \dots, n$$

は z_k, t に関して C^∞ , z_k に関して holomorphic である。

$H^0(\pi(\mathcal{U}_j), T_M)$ の元 $v_j(t) = \sum v^\lambda(t) \frac{\partial}{\partial t^\lambda}$ が与えられたとき、写像 ρ は $\mathcal{U}_j \cap \mathcal{U}_k$ 上の \oplus に値を持つ 1-cocycle

$$\theta_{jk}(p) = \sum_{\alpha, \lambda} v^\lambda(t) \frac{\partial g_{jk}^\alpha(z_k(p), t)}{\partial t^\lambda} \frac{\partial}{\partial z_j^\alpha}$$

を代表する $H^1(\mathcal{U}, \oplus)$ の元を対応させるものである。

sheaves の exact sequence

$$0 \rightarrow \oplus \rightarrow \pi \rightarrow T \rightarrow 0$$

を点 $t \in M$ 上の fibre $V_t = \pi^{-1}(t)$ に制限して考えたもの

$$0 \rightarrow \oplus_t \rightarrow \pi_t \rightarrow T_t \rightarrow 0$$

に対応する cohomology の exact sequence から

$$\rho_t: (T_M)_t \rightarrow H^1(V_t, \oplus_t)$$

が得られる。これは $t \in M$ における tangent vector

$$v = \sum_{\lambda} v^{\lambda} \frac{\partial}{\partial t^{\lambda}} \quad | =$$

$$\theta_{jk}(t) = \sum_{\alpha, \lambda} v^{\lambda} \frac{\partial z_{jk}^{\alpha}(z_R, t)}{\partial t^{\lambda}} \frac{\partial}{\partial z_j^{\alpha}}$$

の属する *cohomology class*. を対応させるものである。

この P -写像について次の諸定理が成立つ。

定理1. *compact* な複素多様体の可微分族 $v \xrightarrow{\pi} M$ が *locally trivial* であるためには P が 0 写像であることが必要十分である。

定理2. $H^1(V_0, \mathbb{C}) = 0$ ならば V_0 を一つの *member* とする任意の *compact* 複素多様体の可微分族は点 $0 \in M$ の近傍で *locally trivial* である。

定理3. 可微分族 $v \xrightarrow{\pi} M$ は $\dim_{\mathbb{C}}(V_t, \mathbb{C})$ が t に無関係に一定であるとき (この時 $v \xrightarrow{\pi} M$ は *regular* であるといわれる) この $t \in M$ に対し $P_t = 0$ なることが、可微分族 $v \xrightarrow{\pi} M$ が *locally trivial* であるために必要十分である。

§ 3. 変形の存在

V_0 を与えられた複素解析多様体 V_0 を C^{∞} 可微分多様体とみなしたものを X で表わす。 X 上の *tangent bundle* を $T(X)$ とすると V_0 の複素構造は直和分解 $T(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = T(V) \oplus \overline{T(V)}$ を与える。 \mathbb{H}_0 を V 上の *holomorphic vector fields germs*

の sheaf, $\bar{\Phi}^k \in T(V)$ に値を持つ $(0, k)$ 型の differential forms の germs の sheaf とすれば外微分作用素 $\bar{\partial}$ と共に \mathbb{H}_0 の fine resolution

$$0 \longrightarrow \mathbb{H}_0 \longrightarrow \bar{\Phi}^0 \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\Phi}^1 \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \bar{\Phi}^n \longrightarrow 0$$

がある, $\bar{\Phi}^k$ の global sections の作る linear space $A^k = \Gamma(V_0, \bar{\Phi}^k)$ は $\bar{\partial}$ と共に cochain complex $\sum_{k=0}^n A^k$ を作り, その cohomology group は Dolbeault の定理によつて, $H^k(V_0, \mathbb{H}_0)$ と同一視される.

- $\sum_{k=0}^n A^k$ は bracket を次のように定義することにより

graded Lie algebra になる, 即ち $\varphi = \sum_x \varphi^x \frac{\partial}{\partial \bar{z}^x} \in A^p$,

$$\psi^x = \sum_{\beta} \psi^{\beta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}} \in A^{\beta}, \quad \varphi^x = \frac{1}{p!} \sum \varphi_{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_p}^x d\bar{z}^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\lambda_p},$$

$$\psi^{\beta} = \frac{1}{q!} \sum \psi_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_q}^{\beta} d\bar{z}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\mu_q} \quad \text{に對し}$$

$$[\varphi, \psi] = \sum_{\gamma} [\varphi, \psi]^{\gamma} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\gamma}} \in A^{p+q}$$

$$[\varphi, \psi]^{\gamma} = \frac{1}{2} \sum_x (\varphi^x \wedge \partial_x \psi^{\gamma} + (-1)^{p+1} \psi^x \wedge \partial_x \varphi^{\gamma})$$

$$\partial_x \psi^{\gamma} = \frac{1}{q!} \sum_{\alpha} \partial_x \psi_{\bar{\mu}_1 \dots \bar{\mu}_q}^{\beta} d\bar{z}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{\mu_q} \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^x}$$

この様に定義された bracket は graded Lie algebra の bracket の条件, 即ち $\varphi \in A^p, \psi \in A^q, \tau \in A^r$ に對し,

$$[\varphi, \psi] = (-1)^{pq+1} [\psi, \varphi]$$

$$\bar{\partial}[\varphi, \psi] = [\bar{\partial}\varphi, \psi] + (-1)^p [\varphi, \bar{\partial}\psi]$$

$$(-1)^{pr} [\varphi, [\psi, \tau]] + (-1)^{rp} [\psi, [\tau, \varphi]] + (-1)^{r\epsilon} [\tau, [\varphi, \psi]] = 0$$

を満足していることは容易に確かめられる.

いま V' を V_0 に込の意味で "近い" X に入りの複素構造とする。即ち $\{U_j\}$ を X の座標近傍系。 U_j における V_0 の複素構造を定める局所座標を (z_j^x) 、 V' の複素構造を定める局所座標を (z_j^x) とするとき、

$$(i) \quad z_j^x = f_j^x(z, \bar{z}) \quad \text{は微分可能函数,}$$

$$(ii) \quad \det \left(\frac{\partial f_j^x}{\partial z_j^\beta} \right) \neq 0 \quad \text{in } U_j.$$

いま U_j 上の $T(V_0)$ に値を持つ $(0,1)$ 型の differential form φ_j を次のように定義する。

$$\varphi_j^\beta = \sum_{\gamma=1}^n \varphi_{j\bar{\gamma}}^\beta d\bar{z}^\gamma, \quad \text{但 } \varphi_{j\bar{\gamma}}^\beta \text{ は方程式.}$$

(*) $\bar{\partial} z_j^\alpha = \sum_{\beta=1}^n \varphi_j^\beta(z, \bar{z}) \partial_\beta z_j^\alpha$ により、 $\bar{\partial}$ によって定められるものとす。

$$\varphi_j = (\varphi_j^1, \dots, \varphi_j^\beta, \dots, \varphi_j^n).$$

$U_i \cap U_j$ における V' の座標変換を

$$z_i^\alpha = h_{ij}^\alpha(z_j^x, \bar{z}_j^x)$$

とすると

$$\bar{\partial} z_i^\beta = \sum_{\mu} \frac{\partial h_{ij}^\beta}{\partial z_j^\mu} \bar{\partial} z_j^\mu \quad \partial_\gamma z_i^\beta = \sum_{\mu} \frac{\partial h_{ij}^\beta}{\partial z_j^\mu} \cdot \partial_\gamma z_j^\mu$$

から (*) を用いて、

$$\varphi_i^\beta(z, \bar{z}) = \varphi_j^\beta(z, \bar{z}) \quad \text{in } U_i \cap U_j$$

がいえる。従って、 V_0 上 global な $T(V_0)$ に値を持つ

(0.1) 型の differential form φ が得られた。一方 $\bar{\partial} \bar{\partial} \int_j^{\beta} = 0$ から (*) の積分可能条件は

$$\bar{\partial} \varphi^{\beta} - \sum_{\gamma=1}^n \varphi^{\gamma} \wedge \partial_{\gamma} \varphi^{\beta} = 0 \quad \beta = 1, \dots, n$$

で与えられる。ここで \wedge は forms の外積 $\partial_{\gamma} \varphi^{\beta} = \sum_{\nu=1}^n \partial_{\gamma} \varphi_{\nu}^{\beta} dx^{\nu}$ である。この積分可能条件はまた bracket を用いて書けば

$$\bar{\partial} \varphi - [\varphi, \varphi] = 0$$

である。

逆に $\varphi \in A^1$ は V に近い複素構造を定め $\bar{\partial} \varphi = [\varphi, \varphi]$ が満足されること φ が複素構造を定めるための必要十分条件である。

V_0 が与えられ、 $\mathbb{C} \xrightarrow{\omega} M$ は V_0 を一つの member とする可微分族とするとき、各 V_t に対し、上のような $\varphi(t)$ が定まり、 t に関して微分可能且初期条件 $\varphi(0) = 0$ を満たす。逆に V_0 が与えられ $T(V_0)$ に値を持つ (0.1) 型の differential form の family $\{\varphi(t)\}_{t \in M}$ で $\varphi(0) = 0$ 、 $\bar{\partial} \varphi(t) = [\varphi(t), \varphi(t)]$ 、 $\varphi(t)$ は t について differentiable なるものがあるとき、 V_t を一つの member とする可微分族 $\mathbb{C} \xrightarrow{\omega} M$ で各 V_t に $\varphi(t)$ が対応するものが存在する。いいかえると、与えられた複素構造に近い可微分族の存在はこのような $\{\varphi(t)\}$ の存在の問題に帰着することが出来る。

更に解析的変形族の存在については次の定理がある。

定理4. $H^1(V_0, \mathbb{C}) = 0$, $\dim_{\mathbb{C}} H^1(V_0, \mathbb{C}) = m$ ならば \mathbb{C}^m における原点の近傍 M と解析的変形族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\cong} M$ で

(i) $\pi^{-1}(0) = V_0$.

(ii) $\rho_0: (T_m)_0 \rightarrow H^1(V_0, \mathbb{C})$ は同型

(iii) $\mathcal{V} \xrightarrow{\cong} M$ は $t=0$ で complex analytically complete である.

(iii) の意味は, $U \xrightarrow{\cong} N \ni V_0$ を member とする解析的変形族とすると即ち $0' \in N$ に対し $W_{0'} = \pi^{-1}(0') = V_0$ とするとき, N における $0'$ の近傍から M の点 0 の近傍への正則な写像元があって, $\pi(0') = 0$. U は $W_{0'}$ の近傍では π によって \mathcal{V} から誘導される. (ということである.)

§ 4. Parameter space の複素構造

M が複素多様体 $\mathcal{V} \xrightarrow{\cong} M$ は複素解析的変形族の場合 M の holomorphic coordinates (t^1, \dots, t^m) を $(z_1^*, \dots, z_n^*, t^1, \dots, t^m)$ が \mathcal{V} 上の local holomorphic coordinates になるようにされるから当然 $\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t^k}\right) = 0$ である.

regular な可微分族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\cong} M$ の parameter space M の複素構造について次の諸定理が成立つ.

定理5. $\mathcal{V} \xrightarrow{\cong} M$: regular な compact 複素多様体の可微分族

各点 $t \in M$ に対し

(i) $P_t : (T_M)_t \rightarrow H^1(V_t, \mathbb{D}_t)$ は injective

(ii) P_t の像 $P_t((T_M)_t) \subset H^1(V_t, \mathbb{D}_t)$ は complex submodule

このとき, $P_t(\frac{\partial}{\partial t^\lambda}) = 0$ ($\lambda = 1, \dots, m$, $m = \dim_{\mathbb{C}} M$) を満足する M 上の複素解析構造が唯一存在する.

定理 6. $\pi \rightarrow M$: regular な compact 複素多様体の可微分族

M 上の複素構造で各 $t \in M$ に対し $P_t(\frac{\partial}{\partial t^\lambda}) = 0$ ($\lambda = 1, \dots, m$) なるものがあるば, 任意の $t_0 \in M$ に対し, t_0 の近傍 U と $\pi|_U$ (即ち $\pi^{-1}(U)$) 上の複素解析的変形族の構造で, 与えられた可微分族の構造及び M の複素構造に compatible なものが存在する.

注意 定理 6 の条件だけでは π 全体に複素解析的変形族の構造が入らない例があるが $H^0(V_t, \mathbb{D}_t) = 0$ を仮定すれば全体に入る.