数理解析研究所講究録
第29巻 1967年 13-30

複素解析的バンドルの変形，射影空間への写像の拡張，部分多様体の変形，部分多様体のStabilityについての概説

京大数理解析研　中野茂男
京大 理学部　寺田俊明記

§0 前おき

先ず記号の説明を兼ねて複素多様体の変形についての大綱を述べる。

$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$をパラコンパクト複素多様体の可微分族（解析的族）$\mathcal{E}$をfibre V_tへの制限が解析的な$\mathcal{V}$の接バンドル（$\mathcal{V}$の解析的接バンドル），$\mathcal{F}$を$\mathcal{V}$のfibre V_tに沿う解析的接バンドル，τをMの（解析的）接バンドルとすると，ベクトルバンドルのexactな列

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{E} \to \varpi^*\tau \to 0$$

を得る．但し$\varpi^*\tau$は写像ϖによるバンドルτの引き戻しである．

Θ，Ψをそれぞれ$\mathcal{F}$，$\mathcal{E}$の可微分（解析的）かつfibre V_tへの制限が正則なsectionのgermの層とすると

$$0 \to \Theta \to \Psi \xrightarrow{\pi} \Psi/\Theta \to 0$$

がexactである．さらにT_MをτのC^∞-section（正則なsection）のgermの層，Tをϖによって$\mathcal{V}$上にT_Mよりinduceされた層と

すると，自然な injection によって $T \subset \Psi/\Theta$ と考えられるから，$j^{-1}(T) = \Pi$ とおくと

$$(0.1) \qquad 0 \to \Theta \to \Pi \xrightarrow{j} T \to 0$$

が exact である。

U を M の開集合とすると，exact な列 (0.1) に対応して exact な cohomology の列

$$0 \to H^0(\varpi^{-1}(U), \Theta) \to H^0(\varpi^{-1}(U), \Pi) \to H^0(\varpi^{-1}(U), T)$$
$$\xrightarrow{\delta} H^1(\varpi^{-1}(U), \Theta) \to \cdots$$

がえられ，inductive limit をとると M 上の cohomology module の germ の層の exact な列

$$(0.2) \qquad 0 \to \mathcal{H}^0(\Theta) \to \mathcal{H}^0(\Pi) \to \mathcal{H}^0(T) \xrightarrow{\rho} \mathcal{H}^1(\Theta) \to \cdots$$

が生ずる。初めからすべてのバンドルを $\mathcal{V}$ の fibre V_t に制限して考えると

$$0 \to \Theta_t \to \Pi_t \to T_t \to 0,$$
$$0 \to H^0(V_t, \Theta_t) \to H^0(V_t, \Pi_t) \to H^0(V_t, T_t)$$
$$\xrightarrow{\rho_t} H^1(V_t, \Theta_t) \to \cdots$$

が exact，そして $\mathcal{H}^0(T) \cong T_M$ だから

$$\begin{array}{ccc} T_M & \xrightarrow{\rho} & \mathcal{H}^1(\Theta) \\ \downarrow & & \downarrow \gamma_t \\ (T_M)_t & \xrightarrow{\rho_t} & H^1(V_t, \Theta_t) \end{array}$$

が可換となる。但し $(T_M)_t$ は $t \in M$ での接バンドル，γ_t は制

限写像である．

§1　複素解析的バンドルの変形

この§の定義及び結果は"可微分又は C^∞"を"解析的"でおきかえると定理1.2，定理1.3を除いて全て通用するので可微分な族についてのみ述べる．

定義 1.1　$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ をパラコンパクト複素多様体の可微分族とする．$\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ が複素解析的バンドルの可微分族であるとは，$\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V}$ が複素 Lie 群を構造群とする C^∞-fibre bundle であって，$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ の fibre V_t への制限 $B_t \xrightarrow{\pi_t} V_t$ が複素解析的バンドルとなっていることである．

$\mathcal{P}$ を $\mathcal{B}$ の主バンドルとし $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{V}$ の射影を p で表わす事にする．$\mathcal{E}(\mathcal{P})$ を fibre V_t に沿っては解析的な $\mathcal{P}$ の接バンドル，$\mathcal{F}(\mathcal{P}/M)$, $\mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V})$ をそれぞれ $\mathcal{P} \xrightarrow{\varpi\circ p} M$, $\mathcal{P} \xrightarrow{p} \mathcal{V}$ の fibre B_t, V_t に沿う解析的接バンドルとすると，

$$
(1.1)\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V}) & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P}/M) & \longrightarrow & \mathcal{E}(\mathcal{P}) & \longrightarrow & (\varpi\circ p)^*\tau & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & p^*\mathcal{F} & \longrightarrow & p^*\mathcal{E} & \longrightarrow & (\varpi\circ p)^*\tau & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

が exact，可換である．$\mathcal{P}$ は G を構造群とする主バンドルであ

るから，Gは$\mathcal{P}$に右から，$\mathcal{P} \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathcal{V}$の fibre 上では推移的に，作用している．そこで $\mathcal{E}(\mathcal{P}) \ni (x, u)$ ($x \in \mathcal{P}$, uはxでの接ベクトル)に対し，

$$(x, u) \sim (xg,\ g_* u)$$

($g_* u$はgの作用に伴う接空間の写像)によって同値関係を入れると，これによって商空間 $\mathcal{K} = \mathcal{E}(\mathcal{P})/G$ は$\mathcal{V}$上のベクトルバンドルとなる．$\mathcal{L} = \mathcal{F}(\mathcal{P}/\mathcal{V})/G$ $\mathcal{M} = \mathcal{F}(\mathcal{P}/M)/G$も同様に定義する．例えば$\mathcal{L}$は$\mathcal{P} \xrightarrow{\mathfrak{p}} \mathcal{V}$の fibre 上の右不変ベクトル野を fibre とする$\mathcal{V}$上のバンドルである．図式(1.1)のGによる商をとって，exact で可換な図式

$$(1.2)\qquad \begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{L} & \to & \mathcal{L} & \to & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{M} & \to & \mathcal{K} & \to & \varpi_* \tau & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{E} & \to & \varpi_* \tau & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

を得る．

Ξ，Σ，Φをそれぞれ$\mathcal{L}$，$\mathcal{M}$，$\mathcal{K}$の可微分かつ fibre V_tに沿っては正則な section の germ の層とすると

$$0 \to \Xi \to \Phi \xrightarrow{\mathfrak{k}} \Psi \to 0$$

が exact，そして，$\Pi \subset \Psi$だから$\Gamma = \mathfrak{k}^{-1}(\Pi)$とおくと

$$(1.3)\qquad 0 \to \Xi \to \Gamma \to \Pi \to 0$$

が exact となる．列(1.3) 及び 図式(1.2)より exact な可換図式

(1.4)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \Xi \arrow[r] \arrow[d] & \Xi \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Sigma \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Theta \arrow[r] \arrow[d] & \Pi \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

を得る．中央の水平列は $0 \longrightarrow \Sigma \longrightarrow \Phi \xrightarrow{k} \Psi/\Theta \longrightarrow 0$, $k^{-1}(T)=\Gamma$ より生ずる．

この図式(1.4)より，列(0.1)から列(0.2)を作ったのと同じ方法で，M上の層の exact な可換図式

(1.5)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^0(\Xi) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}^0(\Xi) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}^1(\Xi) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^0(\Sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}^0(\Gamma) \arrow[r] \arrow[d] & T_M \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & \mathcal{H}^1(\Sigma) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^0(\Theta) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}^0(\Pi) \arrow[r] \arrow[d] & T_M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & \mathcal{H}^1(\Theta) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H}^1(\Xi) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}^1(\Xi) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{H}^2(\Xi) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

を得る．

各バンドルを fibre V_t に制限したものを考えることにすると §0と同様にして V_t 上の exact かつ可換な cohomology の図式

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots \to & & 0 & \longrightarrow & H^1(V_t, \Xi_t) & \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots \to & & (T_M)_t & \xrightarrow{\eta_t} & H^1(V_t, \Sigma_t) & \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots \to & & (T_M)_t & \xrightarrow{\rho_t} & H^1(V_t, \Theta_t) & \to \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}
$$

及び可換図式

$$
\begin{array}{ccc}
T_M & \xrightarrow{\eta} & \mathcal{H}^1(\Sigma) \\
\downarrow r_t & & \downarrow r_t \\
(T_M)_t & \xrightarrow{\eta_t} & H^1(V_t, \Sigma_t)
\end{array}
$$

を得る。

この η 及び η_t は §0 の ρ, ρ_t に対応するもので，同様な事柄が成り立つ。

定義 1.2 複素バンドルの可微分族 $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ が *locally trivial* であるとは，M の任意の点 0 に対し適当な 0 近傍 U があって，$\mathcal{B}$ の $\varpi^{-1}(U)$ への制限 $\mathcal{B}|\varpi^{-1}(U)$ と $\mathcal{B}_0 \times U$ つまり $(\pi\varpi)^{-1}(0) \times U$ が C^∞-*bundle* として同型，しかも $\mathcal{B}|\varpi^{-1}(U) \longrightarrow \mathcal{B}_0 \times U$ の C^∞-同型写像が *fibre* V_t 上では *biregular bundle map* となっていることである。

定理 1.1a [34.I] $\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ が複素バンドルの可微分族とする。$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ の *fibre* V_t がコンパクトならば，$\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ が *locally trivial* であるための必要十分条件は $\eta = 0$ となることである。ただし η は $\mathcal{B}$ の主バンドルより得られる図式 (1.5) で定義されたものである。

定理 1.1b [34.I]　$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ の fibre V_t がコンパクトとする．dim. $H^1(V_t, \Sigma_t)$ が定数の時任意の t に対して $\eta_t = 0$ ならば $\eta = 0$ である．

系　$H^1(V_0, \Sigma_0) = 0$ $(0 \in M)$ ならば 0 の適当な近傍 U があって，$\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ の U への制限が *locally trivial* である．

この系は $B_0 \xrightarrow{\pi_0} V_0$ のみの構造による *locally trivial* の判定を可能にする．M の複素構造及び複素バンドルの可微分族が複素解析的族になるための条件については次のようなことが言える．

定理 1.2 [47]　$\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ が複素バンドルの可微分族，$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ の fibre はコンパクト，dim $H^1(V_t, \Sigma_t)$ が定数の時，$\eta_t : (T_M)_t \to H^1(V_t, \Sigma_t)$ が injective かつ $\eta_t((T_M)_t)$ が $H^1(V_t, \Theta_t)$ の複素部分空間であるならば，M に複素構造があって，任意の解析的局所座標 $(\tau^1, \cdots \tau^\nu, \cdots, \tau^m)$ に対して $\eta_t\left(\frac{\partial}{\partial \tau^\nu}\right) = 0$ となる．このような複素構造は唯一つ定まる．

定理 1.3 [47]　$\mathcal{B} \xrightarrow{\pi} \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ が複素バンドルの可微分族，$\mathcal{V} \to M$ の fibre はコンパクト，dim $H^1(V_t, \Sigma_t)$ が定数であるとする．M が複素構造をもち，その解析的局所座標 $(\tau^1, \cdots, \tau^\nu, \cdots \tau^m)$ に対して $\eta_t\left(\frac{\partial}{\partial \tau^\nu}\right) = 0$ $(t \in M)$ ならば M の任意の点に対し，適当な近傍 U があって $\mathcal{B}$ の U への制限 $\mathcal{B}|\varpi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi} \mathcal{V}|U \xrightarrow{\varpi} U$ が解析的族となる．

$\mathcal{V} \to V\times M$ の時は $\rho=0$ だから図式(1.5)により $\eta(T_M) \subset \mathcal{H}'(\Xi)$ である．従ってこの時 η は $T_M \to \mathcal{H}'(\Xi)$ の写像 τ に引き上げられ，この τ について定理1.1，定理1.2，定理1.3と同様のことが成り立つ．

§2. 射影空間への写像の拡張

$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ をコンパクトな複素多様体の可微分族，Φ を $V_0=\varpi^{-1}(0)$ $(0\in M)$ から l 次元射影空間 $P=P_l(C)$ への正則写像で，その像は P の超平面には含まれていないものとする．この時ある種の条件の下で $0\in M$ の近傍 U が存在して Φ_0 が $\mathcal{V}_U=\varpi^{-1}(U)$ から P への可微分かつ各 fibre V_t への制限が解析的な写像に拡張出来ることを示す．

$P=P_l(C)$ の点 ζ の斉次座標を $(\zeta_0,\zeta_1,\cdots\zeta_l)$，$\mathcal{U}_\nu=\{\zeta:\zeta_\nu\neq 0\}$ $e_{\lambda\nu}(\zeta)=\zeta_\nu/\zeta_\lambda$ $(\zeta\in\mathcal{U}_\lambda\cap\mathcal{U}_\nu)$ とすると $\{e_{\lambda\nu}(\zeta)\}_{\lambda,\nu=0,1,\cdots,l}$ は P 上の複素直線バンドル B を定める．バンドル B の Φ_0 による引き戻し、つまり $x\in\Phi_0^{-1}(\mathcal{U}_\lambda\cap\mathcal{U}_\nu)$ に対して $e_{\lambda\nu}(x)=e_{\lambda\nu}(\Phi_0(x))$ によって定義されるバンドル $\Phi_0^*(B)$ を B_0 とする．

V_0 から $P=P_l(C)$ への正則写像を

$$\Phi_0(x)=(\varphi_{0j0}(x),\varphi_{0j1}(x),\cdots,1_{0jj},\cdots\varphi_{0jl}(x)) \qquad (x\in\Phi_0^{-1}(\mathcal{U}_j))$$

とすると $\Phi_0^{-1}(\mathcal{U}_\lambda)\cap\Phi_0^{-1}(\mathcal{U}_\nu)$ で

$$\varphi_{0j\lambda}(x)=e_{\lambda\nu}(x)\,\varphi_{0j\nu}(x)$$

である．従って各 $j=0,1,\cdots,l$ に対して $\{\varphi_{0j\lambda}\}_{\lambda=0,1,\cdots,l}$ は B_0 の解析的な cross-section である．以後 ϕ_0 をこの section によって

$$\phi_0(x)=(\varphi_{00}(x),\varphi_{01}(x),\cdots,\varphi_{0l}(x))$$

と書くことにする．ϕ_0 の $\mathcal{V}|U$ への拡張 ϕ があったとし，B の $\mathcal{V}|U$ への ϕ による引き戻しを $\mathcal{B}=\phi^*(B)$ とすると $\mathcal{B}\to\mathcal{V}|U\to U$ は複素直線バンドルの可微分族であり，$V_0\subset\mathcal{V}$ への制限は B_0 と一致する．また $x\in\phi^{-1}(\mathcal{U}_j)$ に対して

$$\phi(x)=(\varphi_{j0}(x),\varphi_{j1}(x),\cdots,1_{jj},\cdots\varphi_{jl}(x))$$

とおくと各 $j=0,1,\cdots,l$ に対して $\{\varphi_{j\lambda}\}_{\lambda=0,\cdots,l}$ は $\mathcal{B}$ の可微分，かつ fibre V_t への制限が正則な cross-section であり，その V_0 への制限は B_0 の section $\{\varphi_{0j\lambda}(x)\}_{\lambda=0,\cdots,l}$ と一致する．逆に，$0\in M$ の近傍 U と複素直線バンドルの可微分族 $\mathcal{B}\xrightarrow{\pi}\mathcal{V}|U\xrightarrow{\varpi}U$ で V_0 への制限が $\phi_0^*(B)=B_0$ と一致するもの及び $\mathcal{B}$ の可微分かつ V_t への制限が正則な cross-section の組で，V_0 への制限が $\phi_0=(\varphi_{01},\cdots\varphi_{0l})$ と一致するものが存在すれば，必要ならば U を縮めると ϕ は V_0 への制限が ϕ_0 と一致する $\mathcal{V}|U$ から P への可微分かつ V_t への制限が正則な写像である．

$\mathcal{O}$ を $\mathcal{V}|U$ 上の可微分で fibre V_t 上への制限が正則な函数の germ の層，$\mathcal{O}^*$ を集合として $\mathcal{O}$ に属する 0 をとらない函数の germ とすると exact な列

$$0\to Z\xrightarrow{\iota}\mathcal{O}\xrightarrow{e}\mathcal{O}^*\to 0$$

を得る．ここに ι は inclusion map, ε は exponential map ε: $f \longrightarrow \exp(2\pi i f)$ である．これから exact なコホモロジー列

$$\cdots \to H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}) \xrightarrow{\varepsilon^*} H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta^*} H^2(\mathcal{V}|_U, Z)$$
$$\xrightarrow{\iota^*} H^2(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}) \to \cdots$$

が得られる．$H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*)$ は複素直線バンドルの可微分族 $\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V}|_U \to U$ の同値類と同一視される．以後 $\mathfrak{F} \in H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*)$ を単に $\mathcal{V}|_U$ 上の複素直線バンドルということにする．ところで U を $\mathcal{V}|_U$ が可微分に直線 $\mathcal{V}|_U = X \times U$ となるような十分小さな球としておくと任意の q に対して

$$H^q(\mathcal{V}|_U, Z) \cong H^q(X, Z)$$

となる．Ω_t を V_t 上の正則函数の germ の層，Ω_t^* を Ω_t に対応する V_t 上の乗法的層とすると

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Z & \to & \mathcal{O} & \to & \mathcal{O}^* & \to & 0 \\ & & \downarrow r_t & & \downarrow r_t & & \downarrow r_t & & \\ 0 & \to & Z & \to & \Omega_t & \to & \Omega_t^* & \to & 0 \end{array}$$

が exact かつ可換となる．$H^q(V_t, Z) = H^q(X, Z)$ だから，cohomology の exact, 可換な図式

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots \to & H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\varepsilon^*} & H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(X, Z) & \xrightarrow{\iota^*} & H^2(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}) & \to \cdots \\ & \downarrow r_t & & \downarrow r_t & & \| & & \downarrow r_t & \\ \cdots \to & H^1(V_t, \Omega_t) & \xrightarrow{\varepsilon_t^*} & H^1(V_t, \Omega_t^*) & \xrightarrow{\delta^*} & H^2(X, Z) & \xrightarrow{\iota_t^*} & H^2(V_t, \Omega_t) & \to \cdots \end{array}$$

を得る．ここに $\|$ は恒等写像である．

$\mathfrak{F}_0$ を $\mathcal{V}|_U$ に拡張することは V_0 上の複素直線バンドル B_0 を $\mathcal{V}|_U$ 上の複素直線バンドル $\mathcal{B}$ に，B の cross-section の組

$\Phi_0 = (\varphi_{00}, \varphi_{01}, \cdots, \varphi_{0\ell})$ を $\mathcal{B}$ の cross-section の組 $\Phi = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_\ell)$ に拡張することと同値であったから、この拡張については次の命題がその鍵を与える。

命題 2.1 [34.I] $\dim H^2(V_t, \Omega_t)$ が定数であるとすると、$c \in H^2(X, \mathbb{Z})$ に対して $\mathcal{V}|_U$ 上の複素直線バンドル $\mathcal{F} \in H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*)$ で $\delta^*(\mathcal{F}) = c$ となるものが存在するための必要十分条件は $\iota_t^*(c) = 0$ が全ての $t \in U$ について成り立つことである。

命題 2.2 [34.I] $\dim H^2(V_t, \Omega_t)$ が定数であるとする。B_0 を V_0 上の複素直線バンドル、$c = \delta^*(B_0)$ を B_0 の characteristic class とするとき、B_0 の $\mathcal{V}|_U$ への拡張である複素直線バンドル $\mathcal{B} \in H^1(\mathcal{V}|_U, \mathcal{O}^*)$ が存在するための必要十分条件は $\iota_t^*(c) = 0$ が全ての $t \in U$ について成り立つことである。

命題 2.3 [34.I] $\mathcal{B}$ を $\mathcal{V}|_U$ 上の複素直線バンドルとすると、もし $\dim H^1(V_t, \Omega(B_t))$ が定数ならば、$\mathcal{B}$ の $V_0 = \varpi^{-1}(0)$ $(0 \in U)$ への制限 B_0 の正則な cross-section は $\mathcal{B}$ の可微分かつ $\mathcal{V}|_U \to U$ の fibre V_t への制限が正則な cross-section に拡張される。

上の命題により、次元の上半連続性を使えば、$\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ を複素多様体の可微分族とする時コンパクトな複素多様体 $V_0 = \varpi^{-1}(0)$ $(0 \in M)$ から射影空間 $P = P_\ell(\mathbb{C})$ への正則写像 ϕ_0 を、$\mathcal{V}|_U$ から P への可微分で、$\mathcal{V}|_U \xrightarrow{\varpi} U$ の fibre V_t への制限が正則な写像 ϕ へ拡張することに関して次の定理を得る。

定理 2.1 [34.I] $\dim H^2(V_t, \Omega_t)$ が定数であるとする．もし全ての $t \in U$ に対して $i_t^*(c)=0$，しかも $H^1(V_0, \Omega(B_0))=0$ ならば，U が十分小さいとき $\phi_0 : V_0 \longrightarrow P_\ell(C)$ は上の意味で $\phi : \mathcal{V}|_U \longrightarrow P_\ell(C)$ に拡張される．

定理 2.2 [34.I] $H^2(V_0, \Omega_0)=0$，$H^1(V_0, \Omega(B_0))=0$ ならば，十分小さい U に対して $\phi_0 : V_0 \to P_\ell(C)$ は $\phi : \mathcal{V}|_U \to P_\ell(C)$ に拡張される．

[34.III] によると Kähler 多様体の微小な変形は又 Kähler 多様体であり，また複素多様体の可微分族 $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ の fibre がすべて Kähler 多様体である時 $\dim H^2(V_t, \Omega_t)$ は定数であるから，次の結果を得る．

定理 2.3 [34.I] $V_0 = \varpi^{-1}(0)$, $0 \in M$ がコンパクト Kähler 多様体のとき (イ) $H^1(V_0, \Omega(B_0))=0$，(ロ) 任意の $t \in U$ に対して，$i_t^*(c)=0$ なら U が十分小さい時 $\phi_0 : V_0 \longrightarrow P_\ell(C)$ は $\phi : \mathcal{V}|_U \longrightarrow P_\ell(C)$ に拡張出来る．なお条件(ロ)は B_0 の characteristic class $c = c(B_0)$ が V_0 の first Chern class c_1 の有理数倍なら充たされる．

§3. 部分多様体の変形

この§ではパラコンパクト複素多様体のコンパクト部分多様体がどのような微小変形を許すかという問題を扱う．今迄

は解析的同型で移るものは同一視したが，以後Wの部分多様体として異るものは違うものと考える．

定義 3.1 Wをパラコンパクト複素多様体，Mを複素多様体，$\mathcal{V}$を複素多様体 $W\times M$ の解析的部分多様体とする．もしも $\mathcal{V}\xrightarrow{\varpi}M$（$\varpi$は$W\times M$ から Mへの射影πの$\mathcal{V}$への制限）がコンパクト複素多様体の解析的変形であるなら，これをWの複素部分多様体の解析的族といい $(W,\mathcal{V}\xrightarrow{\varpi}M)$であらわすことにする．

上の定義で $\mathcal{V}\xrightarrow{\varpi}M$ の fibre V_tは $W_t=\pi^{-1}(t)$ をWと同一視して，そのままWの部分多様体と考えられる．従って$\mathcal{V}$はWの部分多様体の解析的な族である．

$\mathcal{F}, \mathcal{E}, \tau$ を$\mathcal{V}\to M$に対して§0で定義されたバンドル，$\mathcal{V}$からWへの自然な射影pによるWの解析的接バンドルの$\mathcal{V}$への引き戻しを$\mathcal{L}$，$\mathcal{N}=\mathcal{L}/\mathcal{F}$，つまり$\mathcal{N}$をWの各部分多様体 V_t の normal bundle N_t の解析的族とすると，$\mathcal{V}$の解析的接バンドル$\mathcal{E}$は，pによって，そのまま$\mathcal{L}$の subbundle と考えられるから

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{E} & \to & \tau & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{F} & \to & \mathcal{L} & \to & \mathcal{N} & \to & 0 \end{array}$$

が exact，可換である．

Ξ, Ψ をそれぞれ$\mathcal{L}$及び$\mathcal{N}$の正則な section の germの層と

すると，Π，T は Ξ，Ψ の部分層と考えられるから

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Theta & \to & \Pi & \to & T & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \Theta & \xrightarrow{\iota} & \Xi & \to & \Psi & \to & 0 \end{array}$$

が exact，可換となる．そして §0 と同様にして M 上の cohomology の germ の層の exact で可換な図式

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots\to & T_M & \to & \mathcal{H}^1(\Theta) & \to & \mathcal{H}^1(\Pi) & \to\cdots \\ & \downarrow & & \| & & \downarrow & \\ \cdots\to & \mathcal{H}^0(\Psi) & \to & \mathcal{H}^1(\Theta) & \xrightarrow{\iota^*} & \mathcal{H}^1(\Xi) & \to\cdots \end{array}$$

を得る．各バンドルを $\mathcal{V}\xrightarrow{\varpi}M$ の fibre V_t に制限しておくと．

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots\to & (T_M)_t & \xrightarrow{\rho_t} & H^1(V_t,\Theta_t) & \to & H^1(V_t,\Pi_t) & \to\cdots \\ & \downarrow{\scriptstyle \rho_{d,t}} & & \| & & \downarrow & \\ \cdots\to & H^0(V_t,\Psi_t) & \to & H^1(V_t,\Theta_t) & \to & H^1(V_t,\Xi_t) & \to\cdots \end{array}$$

が exact，可換な cohomology 列であり次の図式も可換となる．

$$\begin{array}{ccc} (T_M) & \xrightarrow{\gamma_t} & (T_M)_t \\ \downarrow{\scriptstyle \rho_d} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_{d,t}} \\ \mathcal{H}^0(\Psi) & \longrightarrow & H^0(V_t,\Psi_t) \end{array}$$

この ρ_d - 写像が ρ，η に対応する性質をもつ．即ち

定理 3.1a　W のコンパクト部分多様体の変形族 $(W,\mathcal{V}\xrightarrow{\varpi}M)$ が trivial である為の，即ち任意の $t\in M$ に対して V_t が W の部分多様体として $V_0=\varpi^{-1}(0)$，$(0\in M)$ に等しいための必要十分条件は層の準同型写像として $\rho_d=0$ となることである．

定理 3.1b　全ての $t\in M$ に対して $\rho_{d,t}=0$ ならば，$\rho_d=0$ である．従ってこの時 $(W,\mathcal{V}\to M)$ は Trivial である．$\rho_{d,t}$ の場合コホモロジーの次元に関する条件は要らない．

系　$H^0(V_0, \Psi_0) = 0$ $(0 \in M)$ ならば $(W, \mathcal{V} \to M)$ は trivial である．つまり V_0 の normal bundle が正則な cross-section を 0 以外にもたなければ V_0 の解析的微小変形は存在しない．

$\rho_{\alpha, t}$ は明らかに M の t における接空間 $(T_M)_t$ から $H^0(V_t, \Psi_t)$ への線型写像であり，その像 $\rho_{\alpha, t}((T_M)_t)$ は族 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ の V_t に於ける characteristic system と見られる．$\rho_{\alpha, t}((T_M)_t)$ が $H^0(V_t, \Psi_t)$ と一致する時，この characteristic system は complete であるという．

族 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ についてのもう一つの重要な事柄は $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ が他の族 $(W, \mathcal{V}' \xrightarrow{\varpi'} M')$ に含まれていないか，つまり $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ が maximal であるかどうかである．即ち

定義　3.2　W のコンパクト部分多様体の変形 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ が $t_0 \in M$ で maximal であるとは，$\varpi'^{-1}(s_0) = V_{t_0}$ であるような任意の変形 $(W, \mathcal{V}' \xrightarrow{\varpi'} M')$ に対して $s_0 \in M'$ の近傍 U' と，U' から M の中への解析的写像 $h : s \to h(s)$ で $h(s_0) = t_0$，$V'_s = V_{h(s)}$ をみたすものが存在すること，つまり $(W, \mathcal{V}|_{U'} \to U')$ が $h : U' \to M$ によって $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ から induce されたものであることをいう．ここに $V'_s = V_t$ は V'_s と V_t が W の同じ部分多様体であることを示す．

次の定理は族が maximal であるための十分条件を与える．

定理　3.2　[40]　$(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ を複素多様体 W のコンパ

クト部分多様体の解析的族とする．$M \ni 0$ において $\rho_d : (T_M)_0 \longrightarrow H^0(V_0, \Psi_0)$ が上への同型写像ならば，族 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ は $t=0$ で maximal である．

Maximal な族，あるいは characteristic system が complete な族の存在に関しては次のようである．

定理 3.3 [40] V_0 が W のコンパクト部分多様体で，$H^1(V_0, \Psi_0) = 0$ であるとする．ここに Ψ_0 は V_0 の normal bundle の解析的 section の germ の層である．この時適当な変形族 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ で $V_0 = \varpi^{-1}(0)$ $(0 \in M)$，しかも M の全ての点 t において，$\rho_{d,t} : (T_M)_t \longrightarrow H^0(V_t, \Psi_t)$ が上への同型写像であるものが存在する．この族 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ は $t \in M$ で maximal であり，しかもその characteristic system は complete である．

V_0 が W の余次元 1 のコンパクト部分多様体のとき，V_0 の局所的最小方程式を $S_j(w)$ $w \in U_j$，($\{U_j\}$ は W の適当な被覆) とすると，$g_{jk}(w) = S_j(w)/S_k(w)$ $(w \in U_j \cap U_k)$ により W 上の複素直線バンドルが決定される．このバンドルを $[V_0]$，$[V_0]$ の V_0 上への制限を $[V_0]_{V_0}$ とおくと，V_0 の normal bundle N_0 は $[V_0]_{V_0}$ と一致する．$[V_0]$ の正則な section の germ の層を $\Omega([V_0])$，V_0 の normal bundle N の正則な section の germ の層を Ψ_0 とすると，$[V_0]_{V_0} = N_0$ だから $\Omega([V_0])$ から Ψ_0 への制限写像 r_0 があって，r_0 は cohomology の写像 $r_0^* : H^1(W, \Omega([V_0])) \longrightarrow H^1(V_0, \Psi_0)$ を

induce する.

定義 3.2 V_0 が W の部分多様体であるとき上で定義された r_0^*; $H^1(W, \Omega([V_0])) \longrightarrow H^1(V_0, \psi_0)$ が 0-写像ならば, V_0 を *semi-regular* と言う.

余次元1の部分多様体の族については定理3.3を含む次の結果が得られる.

定理 3.4 [ ] W の余次元1のコンパクト部分多様体 V_0 が *semi-regular* ならば, W のコンパクト部分多様体の変形族 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ で, $V_0 = \varpi^{-1}(0)$ $(0 \in M)$, しかも任意の $t \in M$ に対して $\rho_{d,t}$ が $(T_M)_t$ から $H^0(V_t, \psi_t)$ の上への同型写像であるものが存在する. この族 $(W, \mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M)$ は全ての $t \in M$ で *maximal*, しかもその *characteristic system* は *complete* である.

§4. 部分多様体の *Stability*

複素多様体 W_0 のコンパクト部分多様体 V_0 が *stable* であるという概念は, W_0 の複素構造の小さな変形が V_0 の近傍のそれを変えないという *strong stability* と W_0 の複素構造の小さな変形によって V_0 が消え去らないという *week stability* (又は単に *stability*) の二つがあるが, ここでは後者の *stability* を取扱う.

定義 4. V_0 を複素多様体 W_0 の部分多様体とする. V_0 が次の条件を充すとき, V_0 は W_0 の *stable* な部分多様体であるとい

う：$\mathcal{W} \xrightarrow{\varpi} M$ を $\varpi^{-1}(0)=W_0$ であるような複素多様体の任意の解析的族とすると，$\mathcal{W}$ の適当な部分多様体 $\mathcal{V}$ で，$\mathcal{V} \cap W_0 = V_0$，しかも $\mathcal{V} \xrightarrow{\varpi} M$ がやはり複素多様体の解析的族となるようなものが存在する．

定理 4.[41] V_0 を W_0 のコンパクト部分多様体，Ψ_0 を V_0 の normal bundle の正則な section の germ の層とするとし $H^1(V_0, \Psi_0)=0$ ならば V_0 は W_0 の stable な部分多様体である．

例 三次元射影空間 $P_3(C)$ の d 次の曲面は $d=3$ の時，27本の直線を含むが，$d \geqq 4$ の時は特別なものを除いて直線を含まない．W_0 として直線を含む特別な4次の曲面をとり V_0 をその直線とすると，V_0 は stable ではない．なお W_0 が3次の曲面，V_0 がそれに含まれる直線の一つの時は $H^1(V_0, \Psi_0)=0$ であって，V_0 は stable となる．