数理解析研究所講究録
第29巻 1967年 71-79

代数的多様体の
複素構造の変形について

名大 理学部　田原 賢一

I. P. Shafarevich の "Algebraic surfaces" (translated by Y. Sasaki) の第9章の興味ある1定理を紹介するが，これは Kodaira-Spencer [3, III] の結果の corollary として得られると云ってよい。

0. $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$ を complex-analytic family of compact complex manifolds 1) とすると，各点 $t \in M$ の fibre $\pi^{-1}(t) = V_t$ はある1つの complex manifold X に diffeomorphic である： $V_t \overset{d}{\simeq} X$ $(^\forall t \in M)$。

こゝでは，$A = \{t \in M \mid V_t ;$ projective algebraic$\}$ とするとき，A が M のどんな subset になるかを調べる。

1. $M \ni t_0$ とする。定義より，t_0 を含む任意の contractible な近傍 U に対して次のようになる；

$U \ni {}^{\forall}t$ に対して，imbedding $V_t \hookrightarrow \pi^{-1}(U)$ を i_t とすれば，

$$\left\{\begin{array}{l} \pi^{-1}(U) \overset{\alpha}{\cong} X \times U \\ H^2(V_{t_0}, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_{t_0}^{*-1}} H^2(\pi^{-1}(U), \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(V_t, \mathbb{Z}) \end{array}\right.$$

但し，i_t^* は imbedding i_t によって導かれたコホモロジー群の準同型とする。

次のことはよく知られている通りである[2]；

1つの compact complex manifold V が projective algebraic（以下単に p. alg. と記す）となるための必要十分条件は，ある Hodge metric i.e. 次のような Kählian metric ds^2 が存在することである；

$$ds^2 = 2\sum g_{\alpha\bar\beta}(dz^\alpha \cdot d\bar z^\beta)$$

とすると，それに結合された微分型式

$$\omega = \sqrt{-1}\sum g_{\alpha\bar\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar z_\beta$$

がコホモロジーの integer class に属する；

$$\bar\omega \in H^2(V, \mathbb{Z})$$

今，$t_0 \in M$ とし，$V_0 = \pi^{-1}(t_0)$ が p. alg. とすると，contractible な t_0 の近傍 U が存在して，ω_0 を V_0 の Hodge metric によって結合された微分型式とすれば，

$$H^2(V_0, \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_t^* i_0^{*-1}} H^2(V_t, \mathbb{Z})$$

により integer class $C_t = i_t^* i_0^{*-1} \bar\omega_0$ が定まる。更に，C_t に属する唯一つの harmonic form ω_t が定まり，それは，

$$\omega_t = H_t i_t^* \omega$$

となる。 但し， ω は $i_0^{*-1}(\overline{\omega}_0)$ に属する微分型式であり，i_t^* は imbedding i_t によって導かれる微分型式の準同型とする。 そして，H_t は harmonic operator とする。

このとき，次の Lemma を証明する；

<u>Lemma 1</u>. U が十分小さければ（以下 $U \ll 0$ と記す），$t \in U$ に対して，

ω_t ; ある Hodge metric に結合される．

$\overset{(1)}{\Longleftrightarrow}$ ω_t ; of type (1,1)

$\overset{(2)}{\Longleftrightarrow}$ $\Pi^{0,2}\omega_t = 0$

（但し，$\Pi^{p,q}\omega_t$ は微分型式 ω_t の (p,q) 型の成分を示す。）

<u>証明</u>: $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$, $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$; 明らか。

$\overset{(2)}{\Longleftarrow}$ ω_t は real form であるから，

$$\Pi^{2,0}\omega_t = \overline{\Pi^{0,2}\omega_t} = 0$$

よって， ω_t ; of type (1,1) .

$\overset{(1)}{\Longleftarrow}$ U が十分小さければ，次のような Kählerian metric $ds_t'^2$ が存在する[3]；

$$\begin{cases} ds_{t_0}'^2 = ds_0^2 \\ \omega_t = H_t i_t^* \omega \text{ ; contineous for } t \in U \end{cases}$$

ω_t は (1,1) 型であり，ω_0 は Hodge metric ds_0^2 に結合されるから，ω_t は positive definite metric ds_t^2

に結合される。 そして，$\overline{\omega_t} \in H^2(V_t, \mathbb{Z})$ であるから，

ω_t は Hodge metric ds_t^2 に結合される。 （終り）。

2. $k_1(t), k_2(t), \cdots, k_\ell(t)$ を V_t 上の holomorphic 2-dimensional forms の space $\mathcal{H}^{2,0}(V_t)$ の base とすると，

$$\Pi^{0,2}\omega_t = \sum_j F_j(t)\overline{k_i(t)}$$

とかける。 このとき，次の proposition を証明する。

Proposition. $U \ll 0$ とする。 このとき，$k_j(t)\ (1 \leq j \leq \ell)$ を適当にとれば，$F_j(t)\ (1 \leq j \leq \ell)$ は $t \in U$ に対して holomorphic となる。

それには，次の Lemma を必要とする。

Lemma 2. β_0 を V_0 上での harmonic form とすると，$\pi^{-1}(U)$ 上の closed な微分型式 β が存在して，

$$\begin{cases} i_t^*\beta \ ; \text{harmonic form on } V_t \\ i_0^*\beta = \beta_0 \end{cases}$$

となる。

証明；

$$\begin{array}{ccccc} H^*(V_0, \mathbb{C}) & \xrightarrow{i_0^{*-1}} & H^*(\pi^{-1}(U), \mathbb{C}) & \xrightarrow{i_t^*} & H^*(V_t, \mathbb{C}) \\ \Psi & & \Psi & & \Psi \\ \overline{\beta_0} & \longrightarrow & \overline{\tilde{\beta}} & \longrightarrow & \overline{i_t^*\tilde{\beta}} \end{array}$$

とすると，

$$i_t^*\tilde{\beta} = H_t i_t^*\tilde{\beta} + d_t \delta_t G_t i_t^*\tilde{\beta} + \overset{d_t}{\delta_t} G_t i_t^*\tilde{\beta}^{\ 4)} \quad (\text{直交分解})$$

このとき，

$$\begin{cases} \delta_t d_t G_t i_t^* \widetilde{\beta} = 0 \\ \eta_t = \delta_t G_t i_t^* \widetilde{\beta} \ ; \ \text{holomorphically depend on } t \in U \end{cases}$$

そして，$\pi^{-1}(U) \overset{d}{\simeq} X \times U$ であるから，$\pi^{-1}(U)$ 上の微分型式 N が存在して，　$i_t^* N = \eta_t$ 。

よって，　$H_t i_t^* \widetilde{\beta} = i_t^* \widetilde{\beta} - d_t \eta_t = i_t^*(\widetilde{\beta} - d_t N)$

故に，$\beta = \widetilde{\beta} - d_t N$ とすればよい。

<u>Propositionの証明:</u> $k_1, k_2, \cdots, k_\ell$ を $\mathcal{H}^{2,0}(V_0)$ の base とする。Lemma 2 によって，V_0 上での harmonic forms $\omega_0, \overline{k_1}, \overline{k_2}, \cdots, \overline{k_\ell}$ に対して，$\pi^{-1}(U)$ 上での closed forms $\omega, K_1, K_2, \cdots, K_\ell$ が存在して，

$$\begin{cases} i_t^* \omega,\ i_t^* K_j \ (1 \leq j \leq \ell) \ ; \ \text{harmonic forms on } V_t \\ i_0^* \omega = \omega_0, \quad i_0^* K_j = \overline{k_j} \ (1 \leq j \leq \ell) \end{cases}$$

すると，明らかに，$\omega_t = i_t^* \omega$ であり，且 $\Pi^{0,2} i_t^* K_j = \overline{k_j(t)}$ $(1 \leq j \leq \ell)$ は $\mathcal{H}^{0,2}(V_t)$ の base をなす。$(t \in U)$

従って，　$\Pi^{0,2} \omega_t = \sum_j F_j(t) \overline{k_j(t)}$

とかけ，この $k_j(t)$ $(1 \leq j \leq \ell)$ が求めるものである；

$$\text{i.e.} \begin{cases} k_1(t), k_2(t), \cdots, k_\ell(t) \ ; \ \text{base of } \mathcal{H}^{2,0}(V_t) \\ F_1(t), F_2(t), \cdots, F_\ell(t) \ ; \ \text{holomorphic for } t \in U \end{cases}$$

前者は明らかであるから，後者だけを示せばよい。その為 $\pi^{-1}(U)$ の covering W_i を考え，W_i の局所座標を

$(z_1^i, z_2^i, \cdots, z_n^i ; t_1^i, t_2^i, \cdots, t_m^i)$ とする。 更に，$U \ll O$ であるから， $t_k^i = t_k^j \ (1 \leq k \leq m)$ とできる。 よって，$(t_1^i, t_2^i, \cdots, t_m^i) = (t_1, t_2, \cdots, t_m)$ とする。 このとき，

$$F_j(t) \text{ ; holomorphic for } t \in U$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial F_j}{\partial \bar{t}_k} = 0 \quad (1 \leq k \leq l)$$

$$\Longleftrightarrow \sum_j \frac{\partial F_j(t)}{\partial \bar{t}_k} \overline{k_j(t)} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\sum \frac{\partial F_j(t)}{\partial \bar{t}_k} \overline{k_j(t)} \right)_i = d_t'' \overset{\exists}{\theta}{}_i^k \text{ on } W_i \wedge V_t$$

（但し，θ_i^k は V_t 上でのある型式の $W_i \wedge V_t$ 上への制限とする。）

実際に θ_i^k を作ろう。 $\Pi^{0,2}\omega_t$, $\Pi^{0,2}K_j$ は $W_i \wedge V_t$ 上では，次のように表わされる；

$$\begin{cases} (\Pi^{0,2}\omega_t)_i = \sum_j F_j(t) \overline{k_j(t)} + P_i^k \wedge d\bar{t}_k + \cdots\cdots \\ (\Pi^{0,2}K_j)_i = \overline{k_j(t)} + Q_{i\,j}^{\,k} \wedge d\bar{t}_k + \cdots\cdots \end{cases}$$

（但し，P_i^k, $Q_{i\,j}^{\,k}$ は $\sum_j a_j(z,t)\, d\bar{z}_j$ なる型とする。）

よって，

$$\begin{cases} (d''\Pi^{0,2}\omega_t)_i = \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}_k} \left(\sum_j F_j(t) \overline{k_j(t)} \right) + d_t'' P_i^k \right) \wedge d\bar{t}_k + \cdots\cdots \\ (d''\Pi^{0,2}K_j)_i = \sum_k \left(\frac{\partial \overline{k_j(t)}}{\partial \bar{t}_k} + d_t'' G_{i\,j}^{\,k} \right) \wedge d\bar{t}_k + \cdots\cdots \end{cases}$$

一方， $d\omega = 0$, $dK_j = 0 \ (1 \leq j \leq l)$ であるから，

$$d''\Pi^{0,2}\omega = 0, \quad d''\Pi^{0,2}K_j = 0 \ (1 \le j \le l)$$

よって，

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \overline{k_j(t)}}{\partial \bar{t}_k}\right)_i = -d_t''G_{ij}^k \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}_k}\Big[\sum_j F_j(t)\overline{k_j(t)}\Big]\right)_i = -d_t''P_i^k \end{cases}$$

又，$\left(\sum_j \dfrac{\partial F_j(t)}{\partial \bar{t}_k}\overline{k_j(t)}\right)_i = \left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{t}_k}\Big[\sum_j F_j(t)\overline{k_j(t)}\Big]\right)_i - \left(\sum_j F_j(t)\dfrac{\partial \overline{k_j(t)}}{\partial \bar{t}_k}\right)_i$

$$= -d_t''P_i^k + \sum_j F_j(t) d_t'' G_{ij}^k$$

$$= d_t''\Big(\sum_j F_j(t)G_{ij}^k - P_i^k\Big)$$

今，$\sum_j F_j(t)G_{ij}^k - P_i^k = Q_i^k$ とおけば，$W_i \cap W_j \cap V_t$ 上で，$Q_i^k = Q_j^k$ が容易に確められる。 （終り）

そこで，$H^2(X,\mathbb{Z}) \ni c_0 = \bar{\omega}_0$ に対して，

$$B_{c_0} = \{ t \in U \mid \omega_t ;\ \text{of type } (1,1) \}$$

とおけば，今までの結果及び Kählerian manifolds の上では，harmonic operater H_t は type $(1,1)$ の forms を同じ type の forms に移すことによって，次のことが解る。

(a) B_{c_0} ; analytic subset in U

(b) $t_0 \in B_{c_0} \subset A$

(c) B_{c_0} は $\pi^{-1}(U)$ 上の Kählerian metric の選び方

にならない。

(d) $\operatorname{codim} \mathbb{B}_{c_0} \leq h^{2,0} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{2,0}(V_0)$

(e) $\mathbb{A} = \bigcup_{c \in B} \mathbb{B}_c$ (高々countable setのunion)

但し，Bは，$\mathbb{A}$の任意の点tに対して，$c = \overline{\omega_t} \in H^2(X, \mathbb{Z})$を対応させるmappingの$\mathbb{A}$全体の像とする。

以上によって，次の結果を得た。

<u>**Theorem**</u> $\mathcal{V} \xrightarrow{\pi} M$をcomplex-analytic family of compact complex manifoldsとする。$V_0 = \pi^{-1}(t_0)$がprojective algebraicであるとする。

然らば，t_0のある近傍Uの中に，analytic subset $\mathbb{B}_{c_0}$が存在して，次の性質をもつ；

$$\begin{cases} \operatorname{codim} \mathbb{B}_{c_0} \leq h^{2,0} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{2,0}(V_0) \\ \mathbb{B}_{c_0} \subset \mathbb{A} = \{ t \in M \mid V_t : \text{projective algebraic} \} \\ \mathbb{A} = \bigcup_{c \in B} \mathbb{B}_c \ (\text{高々可算個のanalytic subsetの和}) \end{cases}$$

(但し，Bは$H^2(X, \mathbb{Z})$のsubsetであり，$\mathbb{A}$の任意の点tに対して，$V_t = \pi^{-1}(t)$のHodge metricに結合される微分型式ω_tのclass $\overline{\omega_t} = c_t$を対応させるようなmappingの$\mathbb{A}$全体の$H^2(X, \mathbb{Z})$の中での像とする。)

脚注 1)　[34] を見よ。

〃 2)　Theorem 4, [2] を見よ。

〃 3)　Theorem 15, [34 III] を見よ。

〃 4)　p.14, [1] を見よ。