数理解析研究所講究録
第32巻 1967年 1-25

Semi-groups と差分近似

早大 教育 大春 慎之助

Banach 空間 X に与えられた Cauchy 問題

(1) $$\frac{du(t)}{dt} = A(t)u(t), \quad u(s) = x, \quad 0 \leqq s \leqq t \leqq T,$$

を考える。ここに各 $A(t)$ は X からそれ自身への作用素である。またこれに関する差分近似

(2) $$u_n((k+1)h_n) = C(kh_n, h_n)u_n(kh_n), \qquad h_n \downarrow 0$$

が与えられているとする。$C(kh_n, h_n)$ は time increment を h_n にとったときの k 番目の step における差分作用素である。

今(1)で、十分滑らかな初期条件 x に対して解 $u(t)$ が存在すると仮定しよう。このとき、difference iteration

(2)′ $$u_n((k+1)h_n) = \prod_{i=0}^{k} C(ih_n, h_n)x$$

に対して上の差分方程式が(1)の方程式の近似になっていると

いう　条件(consistency condition)と上の差分近似の iteration が安定であるための条件(stability condition)を考える. それで, これらの条件のうちどのようなものをえらべばこの差分近似が $h_n \downarrow 0$, $h_n k_n \to t$ のとき $\prod_{i=0}^{k_n-1} C(ih_n, h_n)x \to u(t)$ の意味で(1)の解に収束するであろうか？ということが問題とされる. またもう1つの問題は, stability conditions と(1)の解の existence の間の関係を調べることである.

$A(t)=A$ で A が dense domain をもつ線形作用素であるとしよう. 初めの問題に関する基本的な結果としては, 例えば Lax の Equivalence theorem [1] がある. 後者の問題については, Trotter [2] が propose したように, 半群の収束性に関する結果を使って, Lax-Richtmyer の stability condition が満たされているならば, A の range に関する適当な条件の下に A の閉包 $\bar{A}$ が (C_0)-半群の生成作用素になる, という意味で(1)が well-posed になるということを示すことが出来る. time-dependent の場合で各 $A(t)$ が線形作用素であるとする. $A(t)$ を差分近似した形を $A_\tau(t)$ $(0<\tau\leqq\delta)$ と書いて, $A_\tau(t)$ で $A(t)$ を近似するということを, $A_\tau(t)x \to A(t)x$ $(x\in D(A(t)))$ で表わすものとする. 今(1)の propagator が存在するための T. Kato の条件や H. Tanabe [3] の条件が $\{A(t)\}$ に対して満たされているものとしよう.

このとき $C(kh,h)$ を $(I-hA_{\tau(h)}((k+1)h))^{-1}$ なる implicit form の差分作用素とすると, 安定条件 $\|\prod_{i=l}^{n} C(ih,h)\| \leqq M$ の下に上に述

べた形の convergence が従うことが H. Fujita によって報告されている(本 講究録「発展方程式の近似理論(1966)」)

この報告では各 $A(t)$ が必ずしも線型でない場合に, 上の形の implicit form による差分近似(2)の(1)の解への収束を取扱い, この評論を半線型問題に適用する.

§1. この節では Cauchy 問題(1)及び(1)に与えられた作用素の族 $\{A(t): 0 \leqq t \leqq T\}$ に対して以下に述べる条件を導入してこれらを仮定する:

(i) $D(A(t)) = D$ が t に独立.

(ii) 正定数 $\Delta > 0$ が存在して任意の $h \in (0, \Delta]$ と $t \in [0, T]$ に対して $R(I - hA(t))$ 上に $(I - hA(t))^{-1}$ が存在して, 更にそれの X 上への拡張 $L(t, h)$ が存在する.

(iii) 定数 $T_0 (\leqq T)$ と, $\bar{D}$ をそれ自身に写す $\bar{D}$ 上で連続な作用素の族 $\{U(t, s): 0 \leqq s \leqq t \leqq T_0\}$ が存在して次の条件を満たす:

1)° evolution property,

2)° 各 $x \in D$ と $s \in [0, T_0]$ に対して $U(t, s)x$ は $t (\geqq s)$ に関して連続的強微分可能で

$$U'(t, s)x = A(t)U(t, s)x, \qquad 0 \leqq s \leqq t \leqq T_0.$$

さて Cauchy 問題(1)に対して時間変数 t に関する次の形の

差分近似を考える：

(3) $$\frac{u(t+h)-u(t)}{h} = A(t+h)u(t+h), \qquad h>0.$$

すると上記の条件(i), (ii), (iii) の下に,

$$u(t+h) = (I-hA(t+h))^{-1}u(t) = L(t+h, h)u(t).$$

定理 1. (1)に対して条件(i), (ii), (iii) が満たされているものとする. このとき, 任意のcompact set K に対して定数$M>0$が存在して,

$$\left\|\prod_{i=l}^{n} L(ih, h)x - \prod_{i=l}^{n} L(ih, h)y\right\| \leqq M\|x-y\|,$$

$$0<h\leqq\Delta, \quad 0\leqq hl\leqq hn\leqq T, \quad x, y\in K$$

であるならば, 次の収束が成立する:

(4) $$\lim_{\substack{hl\downarrow s,\, hn\uparrow t\\ h\to 0}} \prod_{i=l}^{n} L(ih, h)x = U(t,s)x, \qquad x\in \overline{D}.$$

ここで上の収束は各$x\in X$ をきめるごとに$t\in[s, T_0]$ について一様であり, 各tをきめるごとに任意のcompact set 上で一様である.

証明. $x\in D$ と $s\in[0, T_0]$ を任意にとって固定する. すると集合$\{(I-hA(h(i+1)))U(h(i+1), s)x : 0<h\leqq\Delta, s\leqq h(i+1)\leqq T_0\}$ がcompactであり, $s\leqq hl\leqq hn\leqq t$ に対して次の評価を得る:

$$\left\|\prod_{i=l}^{n} L(ih, h)x - U(t,s)x\right\| \leqq \left\|\prod_{i=l}^{n} L(hi, h)x - \prod_{i=l+1}^{n} L(hi, h)U(hl, s)x\right\|$$

$$+\left\|\prod_{i=l+1}^{n} L(ih, h)U(hl, s)x - U(hn, s)x\right\| + \|U(hn, s)x - U(t,s)x\|$$

$$\leqq M\|hA(hl)U(hl, s)x - (U(hl, s)x - x)\| + \|U(hn, s)x - U(t,s)x\|$$

$$
+\sum_{k=l+1}^{n} M\| hA(hk)U(hk,s)x-(U(hk,s)x-U(h(k-1),s)x)\|
$$
$$
\leqq M\| hU'(hl,s)x-\int_s^{hl}U'(\sigma,s)x\,d\sigma\|+\|U(hn,s)x-U(t,s)x\|
$$
$$
+Mh\sum_{k=l+1}^{n}\frac{1}{h}\int_{h(k-1)}^{hk}\|U'(hk,s)x-U'(\sigma,s)x\|\,d\sigma.
$$

$U'(\sigma,s)x$ は$[s,T_0]$上で一様連続であるから上式右辺は$hl\downarrow s$, $hn\uparrow t$, $h\to 0$のときに，tに関して一様に0に収束する。各$U(t,s)$は$\bar{D}$で連続であるから，上の収束は$\bar{D}$上でも成立する。

[終]

条件(iii)については§3で述べることにしよう。条件(ii)については以下の事が分っている：まず次の条件を導入する：

(iv) 各$t\in[0,T]$に対してある$h_t\in(0,\Delta]$が存在して$\overline{R(I-h_tA(t))}=X$.

命題2. 上の(iv)を仮定する。また任意の$h\in(0,\Delta]$に対して$(I-hA(t))^{-1}$が$R(I-hA(t))$上で存在し，hには無関係な定数$M>0$をLipschitz定数としてLipschitz連続であるとする。

すると各$h\in(0,\Delta]$に対して$\overline{R(I-hA(t))}=X$であり，各$(I-hA(t))^{-1}$はX上への一意な拡張$L(t,h)$を持ち，これらの拡張は同じ定数MでLipschitz連続となる。

証明. $h=h_t$に対しては命題は成立している。$h>0$と$t\in[0,T]$をとって

$$
(I-hA(t))=(h/h_t)[I-(1-(h_t/h))L(t,h_t)](I-h_tA(t))
$$

なる変形をほどこして，任意に固定した $x\in X$ に対して写像 K を，

$$Ky=(h_t/h)x+(1-(h_t/h))L(t,h_t)y, \qquad y\in X$$

すると K は $(M+1)^{-1}Mh_t<h<(M-1)^{-1}Mh_t$ なる h に対して X 上で縮小写像になるから一意な K の不動点 z が存在する．すなわち $(h_t/h)x=[I-(1-(h_t/h))L(t,h_t)]z$．ところで $\overline{\mathcal{R}(I-h_tA(t))}=X$ であるから z に収束する列 $\{z_n\}$ が $\mathcal{R}(I-h_tA(t))$ の中にとれる．$y_n=(I-h_tA(t))^{-1}z_n$ とおくと，$n\to\infty$ で

$$(I-hA(t))y_n=(h/h_t)[I-(1-(h_t/h))L(t,h_t)]z_n\longrightarrow x,$$

これは上の範囲の h に対して $\overline{\mathcal{R}(I-hA(t))}=X$ となることを示している．従って特に $0<\alpha<1$ なる α に対して $\overline{\mathcal{R}(I-(M+1)^{-1}(M+\alpha)h_tA(t))}=X$ となる．そこで再び $I-hA(t)$ を，

$$\frac{M+1}{M+\alpha}\frac{h}{h_t}\left[I-\left(1-\frac{M+\alpha}{M+1}\frac{h_t}{h}\right)L\left(t,\frac{M+\alpha}{M+1}h_t\right)\right]\left(I-\frac{M+\alpha}{M+1}h_tA(t)\right)$$

の様に変形して，任意に固定した $x\in X$ に対して写像 K_1 を

$$K_1y=\frac{M+\alpha}{M+1}\frac{h_t}{h}x+\left(1-\frac{M+\alpha}{M+1}\frac{h_t}{h}\right)L\left(t,\frac{M+\alpha}{M+1}h_t\right)y, \qquad y\in X$$

で定義すると，K_1 は $\frac{M}{M+1}\frac{M+\alpha}{M+1}h_t<h<\frac{M+\alpha}{M+1}\frac{M}{M-1}h_t$ なる h について X 上の縮小写像となる．上と同様な議論によってこの様な h に対して $\overline{\mathcal{R}(I-hA(t))}=X$ となる．また $\overline{\mathcal{R}(I-(M-1)^{-1}(M-\alpha)h_tA(t))}=X$ であることを使えば $\frac{M-\alpha}{M-1}\frac{M}{M+1}h_t<h<\frac{M-\alpha}{M-1}\frac{M}{M-1}h_t$ なる h について $\overline{\mathcal{R}(I-hA(t))}=X$．帰納的に $\overline{\mathcal{R}\left(I-\left(\frac{M\pm\alpha}{M\pm1}\right)^kh_tA(t)\right)}=X$ $(k=3,4,5,\cdots)$ *) であることが分る．よって証明された．［終］

*) 但し $\left(\frac{M-\alpha}{M-1}\right)^k$ については $\left(\frac{M-\alpha}{M-1}\right)^k\le\Delta<\left(\frac{M-\alpha}{M-1}\right)^{k+1}$ となる k までとる．

Lumer-Phillips [9] の dissipativity の概念を使って次の条件を導入する:

(V₁) $\mathrm{re}[x-y, A(t)x-A(t)y] \leqq 0, \quad x, y \in D(A(t)), \quad 0 \leqq t \leqq T.$

ここに [ ] は X に入れられた a semi-inner product. (X が Hilbert空間の場合には内積を考える).

次に x, y に対して $\tau(x,y)$ を $\lim_{a \downarrow 0} a^{-1}\{\|x+ay\|-\|x\|\}$ で定義する. これは任意の $x, y \in X$ に対して常に存在して次の性質を持つ:

(a) $|\tau(x,y)| \leqq \|y\|$, (b) $\tau(x, y+z) \leqq \tau(x,y)+\tau(x,z)$

(c) $\tau(x, \lambda x + cy) = \mathrm{re}(\lambda)\|x\| + c\tau(x,y) \quad (c \geqq 0)$. ([12]参照)

そこで次の条件を導入する:

(V_2). $\tau(x-y, A(t)x-A(t)y) \leqq 0, \quad x, y \in D(A(t)), \quad 0 \leqq t \leqq T.$

命題 3. 条件(iv)と, 上に述べた条件(V_1)もしくは(V_2)から条件(ii)が従う. しかも条件(ii)の $L(t, h)$ はこの場合 X 上の contraction となる.

証明. 以下の評価から $(I-hA(t))^{-1}$ が存在して $\mathcal{R}(I-hA(t))$ 上で contraction となることが分る:

$$\begin{aligned}\|x-y\|^2 &\leqq [x-y, x-y] - h\,\mathrm{re}[x-y, A(t)x-A(t)y] \\ &= \mathrm{re}[x-y, (x-y)-(hA(t)x-hA(t)y)] \\ &\leqq \|x-y\| \cdot \|(I-hA(t))x-(I-hA(t))y\|.\end{aligned}$$

(V_2)の場合も同様にして計算出来る. 従って命題 2 から上の命題が従う.

[終]

次の補題は後で使われる:

補題4. $U: X\to X$ は $M>0$ を Lip. 定数として Lipschitz 連続であるとする。すると $0<|\beta|M<|\alpha|$ なる α, β に対して $(\alpha+\beta U)^{-1}$ が X 上で定義され $(|\alpha|-|\beta|M)^{-1}$ を Lip. 定数として Lip. 連続.

証明. $x\in X$ を任意に1つ固定して $Wy=\alpha^{-1}x-\alpha^{-1}\beta Uy$ $(y\in X)$ とおくと $\|Wy_1-Wy_2\|\leqq|\alpha|^{-1}|\beta|M\|y_1-y_2\|$ であるから W は X 上の contraction となる. 従って W は一意な不動点 z をもつ. これから $x=\alpha z+\beta Uz$. これは $\mathcal{R}(\alpha+\beta U)=X$ を意味している. 後半は次の評価から明らかである: 任意の $x, y\in X$ に対して
$$\|(\alpha+\beta U)x-(\alpha+\beta U)y\|\geqq|\alpha|\|x-y\|-|\beta|M\|x-y\|=(|\alpha|-|\beta|M)\|x-y\|.$$

§2. Cauchy 問題(1)で与えられた作用素 $A(t)$ に対する(空間変数に関する)差分近似を次の様に考える:

$\{A_\tau(t): 0\leqq\tau\leqq\theta\}$ なる作用素の one parameter の族が存在して,

(A) $\quad s\text{-}\lim_{\tau\to 0} A_\tau(t)x=A(t)x, \qquad t\in[0,T],\ x\in D(A(t))$

parameter τ は場合に応じて 0 に収束する列であると考える.

空間変数に関する偏微分の近似が translation operators で書けるということを考えて, 各 $A_\tau(t)$ は X 上で定義されているものと仮定する. それで我々は(1)に対して(3)と同じ形の差分近似
$$h^{-1}(u(t+h)-u(t))=A_\tau(t+h)u(t+h), \qquad h>0$$

を考えることにする。そこでこの差分近似に関して次の条件を考える：

(vi) 各 $h\in(0,\Delta]$, $\tau\in(0,\theta]$, $t\in[0,T]$ に対して $(I-hA_\tau(t))^{-1}$ が X 上に存在して，任意の compact set 上で h と τ には一様に Lipschitz 連続。

この節では consistency conditions と stability conditions を導入して，その間の強さの関係を調べ，上に述べた差分近似の iteration の収束性についての結果を述べる。

また，この節を通じて条件(iii)と(vi)を仮定しよう。

補題5. 命題2の仮定と上に導入した条件(vi)がみたされているとき，差分近似(A)を考える限り次の収束が従う：

(B) $\text{s-}\lim_{\tau\to 0}(I-hA_\tau(t))^{-1}x=L(t,h)x$, $h\in(0,\Delta]$, $t\in[0,T]$, $x\in X$.

ここで上の収束は x とめる毎に $(0,\Delta]$ の中の任意の compact set で一様であり，t とめる毎に X の任意の compact set 上で一様である。また $L(t,h)$ は命題2で云う $(I-hA(t))^{-1}$ の拡張である。

証明. 命題2から全ての $h\in(0,\Delta]$ に対して $\overline{R(I-hA(t))}=X$ である。また条件(vi)によって $R(I-hA(t))$ の任意の元 x に対し，

$$\|(I-hA_\tau(t))^{-1}x-L(t,h)x\|$$

$$=\|(I-hA_\tau(t))^{-1}(I-hA(t))y-L(t,h)(I-hA(t))y\|$$

$$=\|(I-hA_\tau(t))^{-1}(I-hA(t))y-(I-hA_\tau(t))^{-1}(I-hA_\tau(t))y\|$$

$$\leqq hM\|A_\tau(t)y-A(t)y\|$$

である．この右辺は $\tau\to 0$ のとき h には一様に 0 に収束する．従って任意の $x\in X$ に対して $(I-hA_\tau(t))^{-1}x$ は $L(t,h)x$ に収束し，この収束は命題に述べた意味での収束になっていることが分る．　[終]

次に consistency conditions を導入しよう．

(C1) 各 $s\in[0,T_0]$ に対して次の収束が t に関して一様に成立する：

$$s\text{-}\lim_{\tau\to 0} A_\tau(t)U(t,s)x = A(t)U(t,s)x, \qquad x\in D.$$

次に τ を $h\to 0$ のとき $\tau(h)\to 0$ となるような h の函数であるとすると，time t における差分作用素は $C(t,h)=(I-hA_{\tau(h)}(t+h))^{-1}$ となる．そこで

(C) 各 $s\in[0,T_0]$ に対して次の収束が t に関して一様に成立する：

$$s\text{-}\lim_{h\to 0} h^{-1}(C(t,h)-I)U(t,s)x = A(t)U(t,s)x, \qquad x\in D.$$

(C2). 各 $s\in[0,T_0]$ に対して次の収束が t に関して一様に成立する：

$$s\text{-}\lim_{h\to 0} h^{-1}(C(t,h)-U(t+h,h)]U(t,s)x = 0, \qquad x\in D.$$

以上の条件は差分方程式が微分方程式の近似になっているということを表わす意味で各々 consistency condition となっているが，これらの間には次の意味での強弱関係が存在する：

補題 6. $h_j \downarrow 0$ のとき $\tau(h_j) \to 0$ として, $s \in [0, T_0]$ を 1 つ定めたときに各 j に対して $t \to A_{\tau(h_j)}(t)U(t,s)x$ $(x \in D)$ が $t \in [s, T_0]$ について強連続であるとする. すると, (C1) $\Rightarrow$ (C2) $\Rightarrow$ (C).

証明. $x \in D$ と $s \in [0, T_0]$ を任意にとる. すると $\{U(t,s)x : t \in [s, T_0]\}$ $\cup \{(I - h_j A_{\tau(h_j)}(t+h_j))U(t+h_j, s)x : t \in [s, T_0], h_j \in (0, \Delta]\}$ の閉包は compact である. 従って次の評価を得る:

$$
\begin{aligned}
&\| h_j^{-1}(C(t, h_j) - I)U(t,s)x - A(t)U(t,s)x \| \\
&\leq h_j^{-1} \| (I - h_j A_{\tau(h_j)}(t+h_j))^{-1} U(t,s)x - U(t+h_j, s)x \| \\
&\quad + \| h_j^{-1}[U(t+h_j, s)x - U(t,s)x] - A(t)U(t,s)x \| \\
&\leq M \| A_{\tau(h_j)}(t+h_j)U(t+h_j, s)x - h_j^{-1}[U(t+h_j, s)x - U(t,s)x] \| \\
&\quad + h_j^{-1} \int_t^{t+h_j} \| U'(\sigma, s)x - U'(t,s)x \| \, d\sigma.
\end{aligned}
$$

上の右辺は $U'(\sigma, s)x$ が $[s, T_0]$ で連続で, (C1) が成立することから $h_j \to 0$ に対して $t \in [s, T_0]$ に一様に 0 に収束する. (C2) $\Rightarrow$ (C) は上の評価の初めの不等式から明らか. [終]

次に stability condition として次のようなものを考える:

(S1). 任意の compact set K に対して次の条件をみたす正定数 $M > 0$ が存在する:

$$
\| \prod_{i=\ell}^{n} (I - hA_\tau(hi))^{-1} x - \prod_{i=\ell}^{n} (I - hA_\tau(hi))^{-1} y \| \leq M \| x - y \|,
$$
$$
\tau \in (0, \theta], \; h \in (0, \Delta], \; 0 \leq h\ell \leq hn \leq T, \; x, y \in K.
$$

(S). mesh を $h \to 0$ のとき $\tau(h) \to 0$ となるように定める. このとき任意の compact set K に対して次の条件をみたす正定数 M が

存在する:

$$\left\| \prod_{i=l}^{n} (I - hA_{\tau(h)}(ih))^{-1} x - \prod_{i=l}^{n} (I - hA_{\tau(h)}(ih))^{-1} y \right\| \leqq M \|x - y\|,$$

$$h \in (0, \Delta], \ 0 \leqq hl \leqq hn \leqq T, \ x, y \in K.$$

上に導入した consistency conditions と stability conditions の下で以下の形の収束が導びかれる:

定理 7. 命題 2 もしくは命題 3 の仮定が満たされているとき, stability condition (S1) から次の収束が得られる.

$$(5) \quad \lim_{\substack{h_j l_j \downarrow s, h_j n_j \uparrow t \\ h_j \to 0}} \lim_{\tau_p \to 0} \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau_p}(ih_j))^{-1} x = U(t, s)x,$$

$$0 \leqq s \leqq t \leqq T_0, \ x \in \overline{D}.$$

証明. $\tau_p \to 0$ とする. すると補題 5 により各 k, h_j に対して集合 $\{(I - h_j A_{\tau_p}(h_j k))^{-1} \prod_{i=l_j}^{k} L(ih_j, h_j)x : \tau_p \in (0, \theta]\}$ は compact である. 従って (S1) から次の収束が従う:

$$\lim_{p \to \infty} \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau_p}(ih_j))^{-1} x = \prod_{i=l_j}^{n_j} L(ih_j, h_j)x, \quad x \in X, \ h_j \in (0, \Delta], 0 \leqq h_j l_j \leqq h_j n_j \leqq T_0.$$

この収束から定理 1 の条件が全て満たされることが分る. 従って定理 1 から命題が従う. [終]

定理 8. $h_j \downarrow 0$ のとき $\tau(h_j) \to 0$ となる mesh を考える. 今 $\{A(t)\}$ が t に関しては滑らかである場合を考えて次の条件を仮定する:

(A1)$^{\bullet}$ $[0, T]$ の中の任意の収束数列 $t_j \to t$ に対して $\{A_{\tau(h_j)}(t_j)x\}_j$

$(x \in D)$ は有界.

このとき consistency condition (C) (もしくは(Ci) $(i=1,2)$) が満たされているならば,

条件(S)から次の収束が従う:

$$(6)\qquad \lim_{\substack{h_j l_j \downarrow s,\ h_j n_j \uparrow t \\ h_j \to 0}} \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} x = U(t,s)x,$$

$$0 \leqq s \leqq t \leqq T_0, \qquad x \in \overline{D}.$$

証明. 補題6から条件(C)と(S)の下に(6)を導びけば十分である. $x \in D$ と $s \in [0, T_0]$ を任意にとって固定する. すると $(I - h_j A_{\tau(h_j)}(l_j h_j))^{-1} x \to x$ であり, 集合 $\overline{\{(I - h_j A_{\tau(h_j)}(h_j k))^{-1} U(hk, s)x : h_j \in (0, \Delta],\ k \text{ with } s \leqq h_j k \leqq T_0\}}$ が compact であるから次の評価を得る: 充分大きな $M>0$ をとれば,

$$\Big\| \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} x - U(t,s)x \Big\|$$

$$\leqq \Big\| \prod_{i=l_j}^{n_j} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} x - \prod_{i=l_j+1}^{n} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} U(h_j l_j, s)x \Big\|$$

$$+ \Big\| \prod_{i=l_j+1}^{n_j} (I - h_j A_{\tau(h_j)}(i h_j))^{-1} U(h_j l_j, s)x - U(h_j n_j, s)x \Big\|$$

$$+ \| U(h_j n_j, s)x - U(t,s)x \|$$

$$\leqq M \Big\{ \| (I - h_j A_{\tau(h_j)}(l_j h_j))^{-1} x - x \| + (h_j l_j - s) \Big\| \frac{U(h_j l_j, s)x - x}{h_j l_j - s} \Big\| \Big\}$$

$$+ M h_j \sum_{k=l_j}^{n_j - 1} \Big\| \frac{(I - h_j A_{\tau(h_j)}(h_j(k+1)))^{-1} - I}{h_j} U(h_j k, s)x - A(h_j k) U(h_j k, s)x \Big\|$$

$$+ M h_j \sum_{k=l_j}^{n_j - 1} \Big\| A(h_j k) U(h_j k, s)x - \frac{U(h_j(k+1), s)x - U(h_j k, s)x}{h_j} \Big\|$$

$$+ \| U(h_j n_j, s)x - U(t,s)x \|$$

(C) と $U(t,s)x$ の $[s, T_0]$ 上の強連続性から上の右辺は $h_j \to 0$,

$h_j l_j \downarrow s$, $h_j n_j \uparrow t$ の時に $t \in [s, T_0]$ には一様に 0 に収束する．各 $U(t, s)$ は $\overline{D}$ 上で連続であるから，上の収束は $\overline{D}$ 上でも成立する．

［終］

注意1. (C1)が満たされるときには，上の定理で仮定(A1)は不要となる．

注意2. (C2)を仮定するときには，上の定理で各 $x \in D$ に対して $U(t, s)x$ が微分可能であることを仮定する必要はない．

注意3. 仮定(6)から，作用素の族 $\{\prod_{i=l}^{n}(I - hA_{t(h)}(ih))^{-1}\}$ は任意の compact set と $\overline{D}$ との共通部分の上で $h \in (0, \Delta]$, $hn \in [0, T]$ なる h, n に関して equicontinuous であることが従う．

§3. 以下の節では次の形の半線型Cauchy問題を考える：

(6) $$\frac{du(t)}{dt} = F(t)u(t) + G(t)u(t), \quad u(s) = x, \qquad 0 \leqq s \leqq t \leqq T.$$

ここで線型作用素の族 $\{F(t) : 0 \leqq t \leqq T\}$ は次の線型Cauchy問題

(7) $$\frac{du(t)}{dt} = F(t)u(t), \qquad u(s) = x, \qquad 0 \leqq s \leqq t \leqq T.$$

の propagator $V(t, s)$ が存在するための条件を満たしているものとする．例えば hyperbolic case では次の T. Kato, K. Yosida[4] の条件を仮定することが出来る：

(i)'. $D(F(t)) = D$ は t に独立で X で dense linear. 各 $F(t)$ は縮小半群の生成作用素

(ii)'. $F(t)^{-1}$, $F(t)F(s)^{-1} \in L(X, X)$. ここで $L(X, X)$ は $X \to X$ なる有界線

型作用素の全体の作るBanach algebra.

(iii)' $C(t,s)=F(t)F(s)^{-1}-I$ とおいた時, $(t-s)^{-1}C(t,s)$ は $t\neq s$ で一様連続であり, $\sup_{t\neq s}\|(t-s)^{-1}C(t,s)\|=N<+\infty$. 更に $\lim_{k\to\infty} k\,C(t,t-k^{-1})x = C(t)x$ が t に一様に存在して $C(t)\in L(X,X)$.

parabolic caseでは例えばH. Tanabe [3]の条件を仮定できる.

この時(6)の形の半線型問題は次の意味で積分方程式を考えることに帰着させることが出来る:

定理9. 正定数 $T_0\ (\leqq T)$ が存在して, 任意の $s\in[0,T_0]\subset[0,T]$ と $x\in X$ に対して積分方程式

(8) $$u(t)=V(t,s)x+\int_s^t V(t,\sigma)G(\sigma)u(\sigma)\,d\sigma$$

は $C([s,T_0]:X)$ に一意な解を持ち, $x\to u(\cdot)$ は $X\to C([s,T_0]:X)$ なる写像として連続であるとする. 更にある稠密な集合 D が存在して, これに対応する(8)の解 $u(t)$ について $G(t)u(t)$ が連続で, $u(t)$ が連続的微分可能であるときには, 条件(iii)に述べた(X 上で)連続な作用素の族 $\{U(t,s)\}$ が存在する.

証明. $u(t)$ を $s\in[0,T_0]$, $x\in X$ に対応した(8)の一意解とし, $u(t)=U(t,s)x$ とおけば, $U(t,s)$ は $X\to X$ なる連続作用素であり各 $x\in X$ に対して $U(t,s)x$ は $[s,T_0]$ 上で連続である. 又 $U(s,s)=I$ であり, 解の一意性から $\{U(t,s): 0\leqq s\leqq t\leqq T_0\}$ がevolution propertyを持つことが分る. また定理の条件の下で $U(t,s)$ が(iii)の(2)' (p.3) を満たすことは次の等式から容易に分る:

$$u(t+\varepsilon)-u(t)=[V(t+\varepsilon,s)-V(t,s)]x+\int_s^t[V(t+\varepsilon,\sigma)-V(t,\sigma)]G(\sigma)u(\sigma)d\sigma$$
$$+\int_t^{t+\varepsilon}V(t+\varepsilon,\sigma)G(\sigma)u(\sigma)d\sigma=[V(t+\varepsilon,t)-I]u(t)+\varepsilon G(t)u(t)+o(\varepsilon).$$

ここで$o(\varepsilon)$は$t\in[s,T_0]$に関して一様. [終]

上に述べた積分方程式(8)のmild solutionに関しては，Browder [8], Segal [6], Lions [ ]等の結果がある．これらの結果では非線型項$G(t)$に対して　　　次の条件を仮定している:

[D] $G(t)$は$[0,T]\times X\to X$なる写像として連続で，各$t\in[0,T]$に対して$G(t)$はdissipativeもしくはτ-dissipative.

この条件は，変換$u(t)\to e^{-kt}u(t)$を考えれば容易に分る様に[D]の代わりに次の条件のいずれをとっても議論は同じになる:

1) $\tau(x-y,\ G(t)x-G(t)y)\leqq K\|x-y\|,\qquad x,\ y\in X.$

2) Xはsmooth unit ballを持ち，

$\quad re[x-y,\ G(t)x-G(t)y]\leqq K\|x-y\|^2,\qquad x,\ y\in X.$

最近Y. Kōmura [10]はHilbert空間におけるdissipative写像を取扱いHille-Yosida定理の非線型の場合への拡張を得た．またT. Kato [11]はこの結果を，dual spaceがuniformly convexである様なBanach空間に拡張した．

§4. $A(t)=F(t)+G(t)$ の差分近似 $A_\tau(t)$ は $F_\tau(t)$, $G_\tau(t)$ を, $F(t)$, $G(t)$ の各々差分近似として $F_\tau(t)+G_\tau(t)$ の形に書ける. 又§2の初めに述べた理由から各 $F_\tau(t)$ は有界線型作用素, 各 $G_\tau(t)$ は X 上の連続作用素であるとする. この節では前節に述べた半線型の場合における Stability conditions (S), (S1) についてのいくつかの十分条件を取扱う. また最後にこれらの十分条件と差分近似との関係について調べる. 簡単のためこの節を通じて $D(F(t))=D$, $D(G(t))=X$ $(\bar{D}=X)$ としておく. まず次の条件を導入する:

(Sa). $\|\prod_{i=\ell}^{n}(I-h F_{\tau(h)}(ih))^{-1}\|\leqq K$, $h\in(0,\Delta]$, $0\leqq h\ell\leqq hn\leqq T$.

(Sb) $\|(I-h F_{\tau(h)}(t))^{-1}\|\leqq 1+O(h)$, $0\leqq t\leqq T$. ここで $O(h)$ は t に一様.

(Sc). 任意の compact set K に対して $t\in[0,T]$, $\tau\in(0,\theta]$ には独立な $M>0$ が存在して, $\|G_\tau(t)x-G_\tau(t)y\|\leqq M\|x-y\|$, $x, y\in K$.

(Sd). 任意の有界集合 U に対して $t\in[0,T]$, $\tau\in(0,\theta]$ には独立な $M>0$ が存在して, $\|G_\tau(t)x-G_\tau(t)y\|\leqq M\|x-y\|$, $x, y\in U$.

(Se). t, τ に独立な $M>0$ が存在して任意の $x, y\in X$ に対して $\|G_\tau(t)x-G_\tau(t)y\|\leqq M\|x-y\|$.

命題10. 各 h, t に対して $(I-hA_{\tau(h)}(t))^{-1}$ が X 上に存在して, 任意の有界集合 W に対して,

$$\left(\prod_{i=\ell}^{n}(I-hA_{\tau(h)}(ih))^{-1}\right)(W)\subset U,\quad h\in(0,\Delta],\ 0\leqq h\ell\leqq hn\leqq T$$

をみたす有界集合 U が存在すると仮定する. この時もし

(Sb)と(Sd)が満たされるならば(S)が従う。

証明. $(I-hA_{\tau(h)}(t))=(I-hF_{\tau(h)}(t))(I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t))$ であるから $(I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t))^{-1}$ が(X上に)存在する。任意の有界集合Uにたいして B_r で半径 $r=(1+K\Delta)\sup_{u\in U}\|u\|$ を半径とするclosed ballを表わすと、任意の $x, y\in B_r$ にたいして

$$\|(I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t))x-(I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t))y\|\geqq(1-(1+Kh)hM_{B_r})\|x-y\|.$$

任意の有界集合Wに対してある有界集合Uがあって $\prod_{i=\ell}^{n}(I-hA_{\tau(h)}(ih))^{-1}(W)\subset U$ であるから任意の $u, v\in W$ にたいして、

$$\left\|\prod_{i=\ell}^{n}(I-hA_{\tau(h)}(ih))^{-1}u-\prod_{i=\ell}^{n}(I-hA_{\tau(h)}(ih))^{-1}v\right\|$$

$$\leqq(1-(1+Kh)hM_{B_r})^{-1}(1+Kh)\left\|\prod_{i=\ell}^{n-1}(I-hA_{\tau(h)}(ih))^{-1}u-\prod_{i=\ell}^{n-1}(I-hA_{\tau(h)}(ih))^{-1}v\right\|$$

従って $h\in(0,\Delta]$ と $0\leqq h\ell\leqq hn\leqq T$ にたいして任意の $u, v\in W$ について、

$$\left\|\prod_{i=\ell}^{n}(I-hA_{\tau(h)}(ih))^{-1}u-\prod_{i=\ell}^{n}(I-hA_{\tau(h)}(ih))^{-1}v\right\|\leqq(1+O(h))^{n-\ell}\|u-v\|.$$ [終]

系. (Sb)と(Se)から(S)が従う。

証明. 補題4から各 $t\in[0,T]$, $h\in[0,\Delta]$ にたいして $(I-hA_{\tau(h)}(t))^{-1}=[I-(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t)]^{-1}(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}$ がX上に存在してX上で $(1-hM(1+Kh))^{-1}$ をLipschitz定数として連続となるから、命題10と同様にして(S)が導びかれる。 [終]

$F(t)+G(t)$ がdissipativeの時dissipativeな近似が可能な場合:

命題11. 各 $t\in[0,T]$, $\tau\in(0,\theta]$ に対して $R(I-h_{t,\tau}A_\tau(t))=X$ となる(小さな)正数 $h_{t,\tau}$ が存在すると仮定する。今もしτ, tには独立な定数 K_1, M_1 が存在して条件

(Sf) $\mathrm{re}[x, F_\tau(t)x] \leqq K_1\|x\|^2$, $x \in X$. (Sg) $\mathrm{re}[x-y, G_\tau(t)x - G_\tau(t)y] \leqq c$, $x, y \in X$.
が満たされているとする。すると(S1)が導びかれる。

証明. Semi-inner product についての Schwartz の不等式から
$\|[I-h(F_\tau(t)+G_\tau(t))]x - [I-h(F_\tau(t)+G_\tau(t))]y\| \geqq (1-h(K_1+M_1))\|x-y\|$ が任意の $x, y \in X$ と $h>0$ にたいして成立するから，$\mathcal{R}(I-hA_\tau(t))$ の上で $\|(I-hA_\tau(t))^{-1}u - (I-hA_\tau(t))^{-1}v\| \leqq (1-h(K_1+M_1))^{-1}\|u-v\|$. 従って命題2の証明から，$h \in (0, (K_1+M_1)^{-1})$, $\tau \in (0, \theta]$, $t \in [0, T]$ にたいして $\mathcal{R}(I-hA_\tau(t)) = X$ となるから $(I-hA_\tau(t))^{-1}$ が X 上に定義され，これから命題10と同様にして(S1)が導びかれる。　　[終]

次に上の Stability conditions (Sa)〜(Sg) は implicit iteration (2)' を可能にさせること，すなわち各 $t \in [0, T]$, $h \in (0, \Delta]$ にたいして $(I-hA_{\tau(h)}(t))^{-1}$ を X 上に存在させることを示す：

定理12. 各 $G_\tau(t)$ が X で連続な Frechet 微分 $dG_\tau(t)[u]$ を持つとする。また mesh size が $h \to 0$ の時 $\tau(h) \to 0$ で $\|hF_{\tau(h)}(t)\| \leqq \alpha < 1$ となる様に定められているものとする。更に X は smooth unit ball を持つとする。すると(Sb)と(Sg)の下に各 $t \in [0, T]$, $h \in (0, \Delta]$ にたいして $(I-hA_{\tau(h)}(t))^{-1}$ が X 上に存在する。

証明. Frechet 微分は Gateaux 微分に等しく，X が smooth unit ball を持ち(Sg)が満たされているから $\mathrm{re}[\eta y, G_{\tau(h)}(t)[u+\eta y] - G_{\tau(h)}(t)u] \leqq M_1\|\eta y\|^2$, $\eta > 0$. 従って $\mathrm{re}[y, dG_{\tau(h)}(t)[u]y] \leqq M_1\|y\|^2$, $u, y \in X$. この事から $\|(I-dG_{\tau(h)}(t)[u])^{-1}\| \leqq (1-M_1 h)^{-1}$. 任意の有界線型作用素は

Frechet微分を持ちそれは自分自身に等しい．xを任意に固定し，$H_\tau(t)y = h^{-1}x - h^{-1}y + G_\tau(t)y$, $y \in X$ とおいて $\phi_{\tau(h)}(t) = F_{\tau(h)}(t) + H_{\tau(h)}(t)$ とすると $\phi_{\tau(h)}(t)$ は X 上で連続な Frechet微分 $-[h^{-1}-(F_{\tau(h)}(t)+dG_{\tau(h)}(t)[u]]$ を持つ．十分小さな $h>0$ に対しては

$$\left[h^{-1}-(F_{\tau(h)}(t)+dG_{\tau(h)}(t)[u])\right]^{-1} = h\left[I-(I-h\,dG_{\tau(h)}(t)[u])^{-1}hF_{\tau(h)}(t)\right]^{-1}(I-h\,dG_{\tau(h)}(t)[u])^{-1}$$

であるから，$\|[h^{-1}-(F_{\tau(h)}(t)+dG_{\tau(h)}(t)[u])]^{-1}\| \leqq h(1-(1-M_1h)^{-1}\alpha)^{-1}(1-M_1h)^{-1}$．右辺は u には独立であるから global implicit function theorem [5] により，$\phi_{\tau(h)}(t)$ は $X \twoheadrightarrow X$ なる homeomorphism である．従って $\phi_{\tau(h)}(t)y = 0$ をみたす一意な $y \in X$ が存在する．すなわち $x = [I-h(F_{\tau(h)}(t)+G_{\tau(h)}(t))]y$．これは $(I-hA_{\tau(h)}(t))^{-1}$ が X 上に存在することを示す．［終］

定理13．X を Hilbert 空間とし (Sg) と (Sf) が満たされているとする．すると各 $t \in [0,T]$, $\tau \in (0,\theta]$, $h \in (0,\Delta]$ に対して $(I-hA_\tau(t))^{-1}$ が X 上に定義される．

証明．$\phi_{\tau,h}(t)$ を定理12の証明における様に定義する．(Sg), (Sf) から $\mathrm{re}\langle y-z, \phi_{\tau,h}(t)y - \phi_{\tau,h}(t)z\rangle \leqq (-h^{-1}+k_1+M_1)\|y-z\|^2$, $y, z \in X$, であるから十分小さな $h>0$ に対しては，$\phi_{\tau,h}(t)$ は X 上で定義され，連続で strongly dissipative である．従って Minty の陰函数定理 [7], [5] から各 $\phi_{\tau,h}(t)$ は X からその上への 1-1 写像である．これから $(I-hA_\tau(t))^{-1}$ が X 上で定義されることが分る．［終］

注意1．(Sg), (Sf) の代りに次の条件を考える：

(Sh) $\tau(x, F_\tau(t)x) \leqq k_1\|x\|$, $x \in X$, (Si) $\tau(x-y, G_\tau(t)x - G_\tau(t)y) \leqq M_1\|x-y\|$, $x, y \in X$.

X が Hilbert 空間の時 $re\langle x, y\rangle = \|x\|\tau(x,y)$ であるから $(Sf)=(Sh)$, $(Sg)=(Si)$

命題11と同様にして (Sh), (Si) から $(S1)$ を導びくことが出来る.

注意2. 定理12 において (Sg) の代わりに (Si) を仮定しても同じ結論が得られる: 実際 (Si) から $\tau(\eta y, G_\tau(t)(u+\eta y)-G_\tau(t)u) \leqq M_1\|\eta y\|$ 一方 $\tau(\eta x, y)=\tau(x,y)$ $(\eta>0)$ であるから $\tau(y, dG_{\tau(h)}(t)[u]y) \leqq M_1\|y\|, y\in X$. これから $\|(I-h\,dG_{\tau(h)}(t)[u])^{-1}\| \leqq (1-M_1 h)^{-1}$ が従う. 従って定理12 と同様に global implicit function theorem を適用出来る. この場合には unit ball が smooth である必要はない.

§3 の初めに述べた様に, 差分近似は

(A)′ $F_\tau(t)x \to F(t)x$, $G_\tau(t)x \to G(t)x$, $\quad x\in D$

の様に考えるが, $A(t)$ の t についての滑らかさを考えて

(A1)′ $F_{\tau(h)}(t+h)x \to F(t)x$, $G_{\tau(h)}(t+h)x \to G(t)x$, $\quad x\in D$

の様に考える. そこで半線型 Cauchy 問題(6)に対する, 条件(iii) の作用素函数 $\{U(t,s)\}$ が存在することを仮定して以下の条件を考える(但し(iii)における $\overline{D}$ はこの場合 X となる):

(Ca) $\lim_{\tau\to 0} F_\tau(t)U(t,s)x = F(t)U(t,s)x$, $\lim_{\tau\to 0} G_\tau(t)x = G(t)x$, $\quad x\in D, s\in[0,T_0]$

が t について一様に成立する.

(Cb) $\lim_{h\to 0} F_{\tau(h)}(t+h)U(t,s)x = F(t)U(t,s)x$, $\lim_{h\to 0} G_{\tau(h)}(t+h)U(t,s)x = G(t)U(t,s)x$,

$x\in D$, $s\in[0,T_0]$ が $t\in[s,T_0]$ について一様に成立する.

(Cc) $\lim_{h\to 0} h^{-1}[(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1} - V(t+h,t)]U(t,s)x = 0$,

$$\lim_{h\to 0} G_{\tau(h)}(t+h)U(t,s)x = G(t)U(t,s)x, \quad x\in D,\ s\in[0,T_0]$$

が$t\in[s,T_0]$について一様に成立する。

以上の条件について次の定理が得られる:

定理14. (1) (Sc)が成立するならば, (Ca) ⇒ (C1).

以下においては(A1)'がtには一様に成立すると仮定する.

(2). (Sa)と(Se)が成立するならば, (Cb) ⇒ (C).

(3). (Sb)と(Sc)が満たされているものとする。更に$hG_{\tau(h)}(t)$が$0<M_2<1$なるhとtには独立なM_2をLipschitz定数としてX上でLipschitz連続であるとすると, (Cb) ⇒ (C).

(4). hyperbolicの半線型問題を考える。$G(t)$は$[0,T]\times X$からXへ連続であるとする. この時もしも(Sa)+(Se)または(Sb)+(Sc)(この時には$hG_{\tau(h)}(t)$は(3)における様にLipschitz連続であるとする)が満たされるならば, (Cc) ⇒ (C2).

証明. (1)は各$x\in D$に対して$\{U(t,s)x: s\leqq t\leqq T_0\}$がcompactであることから明らか.

(2). (Sa)と(Se)の下に$(I-hA_{\tau(h)}(t+h))^{-1}=[I-(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}hG_{\tau(h)}(t+h)]^{-1}\times(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}$であって, $[\ \ ]^{-1}$は$(1-hKM)^{-1}$を定数としてLipschitz連続であることに注意して, 各$x\in D$にたいして次の評価を得る:

$$\| h^{-1}[C(t,h)-I]U(t,s)x - A(t)U(t,s)x \|$$

$$\leqq h^{-1}\|(I-hA_{\tau(h)}(t+h))^{-1}U(t,s)x - U(t+h,s)x\| + \|h^{-1}[U(t+h,s)x-U(t,s)x]-A(t)U(t,s)x\|$$

$$\leqq \{(1-hKM)^{-1}+1\}\|h^{-1}[U(t+h,s)x-U(t,s)x]-A(t)U(t,s)x\|$$

$$+(1-hKM)^{-1}KM\|U(t+h,s)x-U(t,s)x\|$$

$$+(1-hKM)^{-1}\|(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}(F_{\tau(h)}(t+h)+G_{\tau(h)}(t+h))U(t,s)x-A(t)U(t,s)x\|$$

上の右辺の各項は与えられた条件の下で t に一様に 0 に収束する。

(3). $\|(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}\|\leqq 1+Kh$ であるから $h>0$ を十分小さくとれば $(I-hF_{\tau(h)}(t))^{-1}hG_{\tau(h)}(t)$ は $0<M_3<1$ なる t にも h にも独立な定数 M_3 を以って Lipschitz 連続であるから $[I-(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}hG_{\tau(h)}(t+h)]^{-1}$ は $(1-M_3)^{-1}$ を Lipschitz 定数として Lipschitz 連続である。従って (2) と同様に評価が出来る。

(4). (2), (3) と同様に、$(I-hA_{\tau(h)}(t+h))^{-1}=[I-(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}hG_{\tau(h)}(t+h)]^{-1}\times(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}$ であり、$[\quad]^{-1}$ は十分小さな $h>0$ に対して $(1-M_3)^{-1}$ $(0<M_3<1)$ を Lipschitz 定数として Lipschitz 連続である。また、定理9から各 $x\in X$ に対して

$$U(t+h,t)x=V(t+h,t)x+\int_t^{t+h}V(t+h,\sigma)G(\sigma)U(\sigma,t)x\,d\sigma$$

であるから次の評価を得る:

$$\|h^{-1}[C(t,h)-U(t+h,t)]U(t,s)x\|$$

$$\leqq(1-M_3)^{-1}\|h^{-1}(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}U(t,s)x-[I-(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}hG_{\tau(h)}(t+h)]U(t+h,s)x\|$$

$$\leqq(1-M_3)^{-1}\|h^{-1}[(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}-V(t+h,t)]U(t,s)x\|$$

$$+(1-M_3)^{-1}h^{-1}\int_t^{t+h}\|(I-hF_{\tau(h)}(t+h))^{-1}G_{\tau(h)}(t+h)U(t+h,s)x-V(t+h,\sigma)G(\sigma)U(\sigma,s)x\|\,d\sigma$$

上の右辺の第1項は (Cc) から $h\to 0$ のとき t に一様に 0 に収束

するから第2項を評価すれば良い：

$$\| (I - h F_{\tau(h)}(t+h))^{-1} G_{\tau(h)}(t+h) U(t+h, s)x - V(t+h, \sigma) G(\sigma) U(\sigma, s)x \|$$

$$\leqq \| (I - h F_{\tau(h)}(t+h))^{-1} G_{\tau(h)}(t+h) U(t+h, s)x - (I - h F_{\tau(h)}(t+h))^{-1} G(t) U(t, s)x \|$$

$$+ \| [(I - h F_{\tau(h)}(t+h))^{-1} - I] G(t) U(t,s)x \| + \| (I - V(t+h, t)) G(t) U(t,s)x \|$$

$$+ \| [V(t+h, t) - V(t+h, \sigma)] G(t) U(t,s)x \| + \| V(t+h, \sigma) [G(t) U(t,s)x - G(\sigma) U(\sigma, s)x] \|.$$

第1項の積分は(c)からtに一様に0に収束する．第2項の積分は仮定と(2)の証明と$\overline{\{G(t) U(t,s)x : s \leqq t \leqq T_0\}}$がcompactであることからtには一様に0に収束する．又第3.4項は$V(t,s)$の性質と§3の初めに述べた$\{F(t)\}$に対する仮定から，第5項は$G(\cdot) U(\cdot, s)x$の一様連続性から各々tに関して一様に収束する。

[終]

文　献

[1] R. D. Richtmyer, Difference methods for initial value problems, Interscience, Vol. 4. (1964).

[2] H. F. Trotter, Approximation of semigroups of operators, Pac. J. Math. 8 (1958)

[3] T. Kato, Nonlinear evolution equations in Banach spaces, Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. 17, A. M. S., Providence, R. I., (1965).

[4] K. Yosida, Time-dependent evolution equations in a locally convex space, Math. Ann. 162., (1965).

[5]. J. T. Schwartz, Nonlinear Functional Analysis, New York Univ., Courant Inst. of Math. Sci., (1965).

[6] I. E. Segal, Nonlinear semigroups, Ann. of Math, 78. (1963).

[7]. G. J. Minty, Monotone (nonlinear) operators in Hilbert spaces, Duke Math. J., 29. (1962)

[8] F. E. Browder, Nonlinear equations of evolution, Ann. of Math, Vol. 80, (1964).

[9] Lumer & Phillips, Dissipative operators in a Banach space, Pac. J. of Math., 11. (1961).

[10] Y. Komura, Nonlinear semigroups in Hilbert spaces, to appear.

[11]. T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, to appear.

[12]. S. Ôharu, Note on the representation of semigroups of nonlinear operators, Proc. of Japan Acad. 42 (10) (1966).