数理解析研究所講究録
第 34 巻 1967 年 57-77

方形に対する偏差分方程式を解くための直接法

広大 理 新谷尚義

§1. まえがき

偏微分方程式を差分近似してえられる偏差分方程式の解法には，反復法と直接法とがある．通常，反復法が使われ，記憶容量の関係などの理由から，直接法は余り使われていない．G.E. Forsythe と W.R. Wasow [1] が述べているように，低次の逆行列を求める問題に帰着できる場合と，逆行列を一定の手順にしたがって発生することができる場合に直接法は実用になる．したがって，直接法が使えるのは，特殊な形の領域に対する特殊な問題の場合に限定されるであろう．

ここでは，領域を直交座標軸に平行な辺をもつ方形に限って，直接法について考察する．

§2. 準備

xが実数であるとき，差分方程式

$$(2.1) \qquad y_{r+1} - x\,y_r + y_{r-1} = 0 \qquad (r = 0, 1, \cdots)$$

の初期条件 $y_{-1} = 0$，$y_0 = 1$ をみたす解を $U_r(x)$，初期条件 $y_{-1} = 1$，$y_0 = x/2$ をみたす解を $V_r(x)$ とする．

（補題 1）

$$U_r(x) = \begin{cases} \dfrac{\sinh (r+1)\omega}{\sinh \omega}, & 2\cosh\omega = x \quad (x \geqq 2) \\[2mm] \dfrac{\sin (r+1)\theta}{\sin\theta}, & 2\cos\theta = x \quad (|x| < 2) \\[2mm] \dfrac{(-1)^r \sinh (r+1)\omega}{\sinh\omega}, & 2\cosh\omega = |x| \quad (x \leqq -2) \end{cases}$$

$$V_r(x) = \begin{cases} \cosh (r+1)\omega, & 2\cosh\omega = x \quad (x \geqq 2) \\ \cos (r+1)\theta, & 2\cos\theta = x \quad (|x| < 2) \\ (-1)^{r+1}\cosh (r+1)\omega, & 2\cosh\omega = x \quad (x \leqq -2) \end{cases}$$

と表わされる． (2.1)の一般解は

$$y_r = c_1 U_{r-1}(x) + c_2 V_{r-1}(x)$$

によって与えられる． たゞし，c_1, c_2 は任意定数である．

$$I_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}, \quad J_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_k = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 1 \quad 0 \end{bmatrix}, \quad Z_k = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 0 & \\ 1 & & \end{bmatrix}$$

$$U_k = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad V_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \quad L_k^J = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & 0 & & \\ 0 & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad V_k^J = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 0 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を $k \times k$ $(k \geqq 3)$ の行列とする．

p, q, α, β を実数とし,

$$L(k;p,q;\alpha,\beta) = J_k + pU_k + qU_k^J + \alpha V_k + \beta V_k^J$$

$$= \begin{bmatrix} p, & 1+\alpha & & & \\ 1 & 0, & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1, & 0, & 1 \\ 0 & & & 1+\beta, & q \end{bmatrix}$$

とおく. ただし,

(2.2) $\qquad 1+\alpha > 0, \quad 1+\beta > 0$

とする.

(補題 2) 条件 (2.2) のもとで, L の固有値はすべて実で相異なり, つぎの方程式の根である.

$$F_k(x) = U_k(x) - (p+q)U_{k-1}(x) + (pq-\alpha-\beta)U_{k-2}(x)$$
$$+ (p\beta + q\alpha)U_{k-3}(x) + \alpha\beta U_{k-4}(x) = 0$$

λ を L の固有値とし,

$$x_j = U_{j-1}(\lambda) - pU_{j-2}(\lambda) - \alpha U_{j-3}(\lambda) \qquad (j=1,2,\cdots,k)$$

$$x^T = (x_1, x_2, \cdots, x_k)$$

とすると, x は λ に対応する固有ベクトルである.

系 1 $\quad \lambda_j \ (j=1,2,\cdots,k)$ を $F_k(\lambda)=0$ の根とし,

$$G(k;p,q;\alpha,\beta) = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$$

$$R(k;p,q;\alpha,\beta) = (r_{ij}), \quad r_{ij} = c_j \tilde{r}_{ij}$$

$$\tilde{r}_{ij} = U_{i-1}(\lambda_j) - pU_{i-2}(\lambda_j) - \alpha U_{i-3}(\lambda_j)$$

$$c_j = 1/\left(\sum_{i=2}^{k-1} \tilde{r}_{ij}^2 + \tilde{r}_{1j}^2/(1+\alpha) + \tilde{r}_{kj}^2/(1+\beta)\right)^{1/2}$$

$$D(k;\alpha,\beta) = \mathrm{diag}(1/(1+\alpha), 1, \cdots, 1, 1/(1+\beta))$$

とおくと,

$$L(k;p,q;\alpha,\beta) = R(k;p,q;\alpha,\beta)G(k;p,q;\alpha,\beta)R(k;p,q;\alpha,\beta)^{-1}$$

$$R(k;p,q;\alpha,\beta)^{-1} = R(k;p,q;\alpha,\beta)^T D(k;\alpha,\beta)$$

である.

系2　$aI_k - L(k;p,q;\alpha,\beta)$ が正則ならば,

$$(aI_k - L(k;p,q;\alpha,\beta))^{-1} = R(aI_k - G)^{-1}R^{-1}$$

である.

p, q, α, β が特殊な値をとる場合には, G と R をあらわに書けることがある.

$$L_1(k) = L(k;0,0;0,0), \quad L_2(k) = L(k;1,1;0,0)$$

$$L_3(k) = L(k;1,0;0,0), \quad L_4(k) = L(k;0,0;1,1)$$

$$L_5(k) = L(k;0,0;1,0), \quad L_6(k) = L_1(k) + Z_k$$

$$G_i(k) = \mathrm{diag}(2\cos\theta_{i1}, \cdots, 2\cos\theta_{ik}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, 6)$$

とおく.　ただし,

$$\theta_{1j} = \frac{j\pi}{k+1}, \quad \theta_{2j} = \frac{(j-1)\pi}{k}, \quad \theta_{3j} = \frac{(2j-1)\pi}{2k+1}, \quad \theta_{4j} = \frac{(j-1)\pi}{k-1}$$

$$\theta_{5j} = \frac{(2j-1)\pi}{2k}, \quad \theta_{6j} = \frac{2(j-1)\pi}{k}$$

である.　さらに

$$R_1(k) = (\sin i\theta_{1j}), \quad R_2(k) = \left(\sin \frac{(2i-1)}{2}\theta_{2j}\right)$$

$$R_3(k) = (\sin(k+1-i)\theta_{3j}), \quad R_4(k) = (\cos(i-1)\theta_{4j})$$

$$R_5(k) = (\cos(i-1)\theta_{5_j}), \quad R_6(k) = (r_{ij})$$

$$r_{i1} = 1/\sqrt{2}, \quad r_{ij} = \cos(i-1)\theta_{6_j} \quad (2 \leq j \leq l-1)$$

$$r_{il} = \delta \cos(i-1)\theta_{6l}, \quad r_{ij} = \sin(i-1)\theta_{6_j} \quad (l+1 \leq j \leq k)$$

とおく。　ただし

$$l = \left[\frac{k}{2}\right], \quad \delta = \begin{cases} 1 & (k : \text{odd}) \\ 1/\sqrt{2} & (k : \text{even}) \end{cases}$$

である。　このとき，つぎの結果がえられる。

<u>系 3</u>　　$L_i(k) = R_i(k)\, G_i(k) R_i(k)^{-1} \quad (i = 1, 2, \cdots, 6)$

が成りたつ。　$R_i(k)^{-1}$ はつぎのように表わされる。

$$R_1(k)^{-1} = \frac{2}{k+1} R_1(k), \quad R_2(k)^{-1} = \frac{2}{k} R_2(k)^T$$

$$R_3(k)^{-1} = \frac{4}{2k+1} R_3(k)^T, \quad R_4(k)^{-1} = \frac{2}{k-1} R_4(k)^T D_1$$

$$R_5(k)^{-1} = \frac{2}{k} R_5(k)^T D_2, \quad R_6(k)^{-1} = \frac{2}{k} R_6(k)^T$$

ただし，

$$D_1 = \mathrm{diag}(1/2, 1, \cdots, 1, 1/2), \quad D_2 = \mathrm{diag}(1/2, 1, \cdots, 1)$$

である。

$$L_7(k; p, q) = L(k; p, q; 0, 0), \quad L_8(k; p, q) = L(k; p, q; 1, 1)$$

$$L_9(k; p) = L(k; p, 0; 0, 0), \quad L_{10}(k; p) = L(k; p, 0; 1, 0)$$

とおく。　$G_i(k; p, q)$, $R_i(k; p, q)$ $(i = 7, 8)$, $G_j(k; p)$, $R_j(k; p)$ $(j = 9, 10)$ も同様に定義する。

（補題 3） 条件（2.2）のもとで，$aI_k - L(k;p,q;\alpha,\beta)$ が正則であるとする。　このとき

$$(aI_k - L(k;p,q;\alpha,\beta))^{-1} = (r_{ij})$$

と表わされる。　ただし，

$$r_{i1} = \Delta^{-1}(U_{k-i} - qU_{k-i-1} - \beta U_{k-i-2})$$

$$r_{ij} = \begin{cases} \Delta^{-1}(U_{i-1} - pU_{i-2} - \alpha U_{i-3})(U_{k-j} - qU_{k-j-1} - \beta U_{k-j-2}) & (j \geq i) \\ \Delta^{-1}(U_{k-i} - qU_{k-i-1} - \beta U_{k-i-2})(U_{j-1} - pU_{j-2} - \alpha U_{j-3}) & (j < i) \end{cases}$$

$$(2 \leq j \leq k-1)$$

$$r_{ik} = \Delta^{-1}(U_{i-1} - pU_{i-2} - \alpha U_{i-3})$$

$$\Delta = F_k(a), \qquad U_j = U_j(a) \quad (j = -2, -1, \cdots)$$

である。

（補題 4） W を $k \times k$ の正則行列とし，p, q を定数とする。　$W - pU_k - qU_k^T$ が正則ならば

$$(W - pU_k - qU_k^T)^{-1} = W^{-1} + W^{-1} Z W^{-1}$$

と表わされる。　ここで

$$Z = \begin{bmatrix} p\Delta^{-1}(1 - qw_{kk}), & 0, & \cdots, & 0, & pq\Delta^{-1}w_{1k} \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & & \\ pq\Delta^{-1}w_{k1}, & 0, & \cdots, & 0, & q\Delta^{-1}(1 - pw_{11}) \end{bmatrix}$$

$$W^{-1} = (w_{ij}), \qquad \Delta = (1 - pw_{11})(1 - qw_{kk}) - pq\, w_{1k} w_{k1}$$

である。

A が m×m の行列，B が n×n の行列であるとき，mn×mn の行列 $A\otimes B$ を

$$A\otimes B=(a_{ij}B)$$

によって定義する．

今後，記号を簡単にするために，A_k, $A_j(k)$, $A_j(k;p,q)$ を $k=n$ のとき単に A, A_j, $A_j(p,q)$ と書き，$k=m$ のとき A_m, $\hat{A}_j$, $\hat{A}_j(p,q)$ と書くことにする．　また，

$$S=I_m\otimes R_1\ , \qquad P=\hat{R}_1\otimes I$$

とおく．

（補題 5）　W を mn×mn の正則行列，p, q を定数とし，$W-(pU_m+qU_m^T)\otimes I$ が正則であるとする．　このとき

$$\{W-(pU_m+qU_m^T)\otimes I\}^{-1}=W^{-1}+W^{-1}ZW^{-1}$$

である．　ただし

$$Z=\begin{pmatrix} p\Delta_1^{-1}, & 0 & \cdots\cdots & 0, & pq(I-pW_{11})^{-1}W_{1m}\Delta_m^{-1} \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \\ pq(I-qW_{mm})^{-1}W_{m1}\Delta_1^{-1}, & 0, & \cdots\cdots & 0, & q\Delta_m^{-1} \end{pmatrix}$$

$$W^{-1}=(W_{ij}) \qquad (i,j=1,2,\cdots,m)$$

$$\Delta_1=(I-pW_{11})-pq(I-qW_{mm})^{-1}W_{m1}$$

$$\Delta_m=(I-qW_{mm})-pq(I-pW_{11})^{-1}W_{1m}$$

であり，W_{ij} は n×n の行列である．

γ, δ を実数とし

$$M(k;p,q;\alpha,\beta;\gamma,\delta)=\gamma(K_k+pU_k+\alpha V_k)+\gamma\delta^2(K_k^T+qU_k^J+\beta V_k^J)$$

$$=\begin{bmatrix} \gamma p, & \gamma\delta^2+\gamma\alpha & & & & \\ \gamma, & 0 & ,\gamma\delta^2 & & \bigcirc & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma, & 0, & \gamma\delta^2 & \\ \bigcirc & & & & \gamma+\gamma\delta^2 p, & \gamma\delta^2 q \end{bmatrix}$$

とおく。　ただし

(2.3)　　$\gamma\neq 0,\quad \delta>0,\quad \delta\neq 1$

とする。

（補題 6）　$E_k=\mathrm{diag}(1,\delta,\delta^2,\cdots,\delta^{k-1})$

とおくと、

$$M(k;p,q;\alpha,\beta;\gamma,\delta)=E_k^{-1}\gamma\delta L(k;p\delta^{-1},q\delta;\alpha\delta^{-2},\beta\delta^2)E_k$$

である。

この補題によって、Mの標準形を求める問題は $L(k;p\delta^{-1},q\delta;\alpha\delta^{-2},\beta\delta^2)$ の標準形を求める問題に帰着される。

$$L_{11}(k;\delta)=L(k;\delta^{-1},\delta;0,0),\quad L_{12}(k;\delta)=L(k;0,0;\delta^{-2},\delta^2)$$

$$G_{11}(k;\delta)=\mathrm{diag}\left(2\cos\frac{\pi}{k},\cdots,2\cos\frac{(k-1)\pi}{k},\ \delta+\delta^{-1}\right)$$

$$G_{12}(k;\delta)=\mathrm{diag}\left(2\cos\frac{\pi}{k-1},\cdots,2\cos\frac{(k-2)\pi}{k-1},\ \delta+\delta^{-1},\ -(\delta+\delta^{-1})\right)$$

$$R_{11}(k;\delta)=(r_{ij}),\quad R_{12}(k;\delta)=(s_{ij})$$

とおく。　ただし

$$\gamma_{ij} = \sqrt{\frac{2}{k}}\left(\delta \sin\frac{ij\pi}{k} - \sin\frac{(i-1)j\pi}{k}\right) \Big/ \left(1+\delta^2 - 2\delta\cos\frac{j\pi}{k}\right)$$

$$\gamma_{ik} = \sqrt{(1-\delta^2)/(1-\delta^{2k})}\ \delta^{i-1} \qquad (1 \le j \le k-1)$$

$$s_{ij} = \left(\delta \sin\frac{ij\pi}{k-1} - \delta^{-1}\sin\frac{(i-2)j\pi}{k-1}\right) \Big/ \left\{\left(\frac{k-1}{2} - \sin^2\frac{j\pi}{k-1}\right)(\delta-\delta^{-1})^2 + \right.$$

$$\left. + (\delta+\delta^{-1})^2 \sin\frac{j\pi}{k-1}\right\}^{1/2} \qquad (1 \le j \le k-2)$$

$$s_{i,k-1} = \sqrt{(1-\delta^4)/2(\delta^2-\delta^{2k})}\ \delta^{i-1}$$

$$s_{i,k} = \sqrt{(1-\delta^4)/2(\delta^2-\delta^{2k})}\ (-\delta)^{i-1}$$

である． すると，

$$L_j(k;\delta) = R_j(k;\delta)\, G_j(k;\delta)\, R_j(k;\delta)^{-1} \qquad (j=11,12)$$

$$R_{11}(k;\delta)^{-1} = R_{11}(k;\delta)^T, \quad R_{12}(k;\delta)^{-1} = R_{12}(k;\delta)^T D_3$$

$$D_3 = \mathrm{diag}\,(\delta^2/(1+\delta^2), 1, \cdots, 1, 1/(1+\delta^2))$$

である．

$$L_{13}(k;p,q;\delta) = L(k;p\delta^{-1}, q\delta; 0, 0)$$

$$L_{14}(k;p,q;\delta) = L(k;p\delta^{-1}, q\delta, \delta^{-2}, \delta^2)$$

とおく． 同様に $G_j(k;p,q;\delta)$, $R_j(k;p,q;\delta)$ $(j=13,14)$ を定義する．

$$a I_k - M(k;p,q;\alpha,\beta;\gamma,\delta)$$

$$= E_k^{-1}(\gamma\delta)\left[(\gamma\delta)^{-1} a I_k - L(k;p\delta^{-1}, q\delta; \alpha\delta^{-2}, \beta\delta^2)\right] E_k$$

であるから，補題3によって $(aI_k - M)^{-1}$ を求めることもできる．

§3. 2階の楕円型方程式

3.1 解法

方形上の2階の楕円型方程式を近似的に解く問題は、つぎの形の偏差分方程式を解く問題に帰着されることが多い。

$$(3.1)\qquad Mx = \begin{bmatrix} A_1, & -C_1 & & & \\ -B_2, & A_2, & -C_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -B_{m-1}, & A_{m-1}, & -C_{m-1} \\ & & & -B_m, & A_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{m-1} \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{m-1} \\ f_m \end{bmatrix} = f$$

A_i, B_i, C_i は $n\times n$ の行列である。$B_1 = C_m = 0$ であると考えることにする。つぎの3つの場合について考えよう。

1°. M がブロック対角行列に相似である場合。

$$(3.2)\qquad M = E\,\mathrm{diag}\,(D_1, D_2, \cdots, D_m)\,E^{-1}$$

と表わされるときには、

$$M^{-1} = E\,\mathrm{diag}\,(D_1^{-1}, D_2^{-1}, \cdots, D_m^{-1})\,E^{-1}$$

であるから、$n\times n$ の行列 D_i^{-1} $(i=1,2,\cdots,m)$ を求める問題に帰着される。

2°. M が $M = W + N$ と分解され、W^{-1} が容易に求められる場合。(1)式は

$$(3.3)\qquad (I + W^{-1}N)\,x = W^{-1}f$$

と書き直される。(3)式を解くことが低次の方程式を解く問題に帰着されるとき、この分解は有効である。

3° Mの主小行列

$$M_i = \begin{bmatrix} A_1, & -C_1 & & \\ -B_2, & A_2, & -C_2 & \\ & \ddots & \ddots & C_{i-1} \\ & & -B_i, & A_i \end{bmatrix} \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

がすべて正則である場合。 MはLU分解され、

M=LU と書ける。 ただし

$$L = \begin{bmatrix} I & & O \\ -B_2P_1^{-1}, & I & \\ & \ddots & \ddots \\ O & & -B_mP_{m-1}^{-1}, I \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} P_1, & -C_1 & & O \\ & P_2, & -C_2 & \\ & & \ddots & -C_{m-1} \\ O & & & P_m \end{bmatrix}$$

$$P_1 = A_1$$

$$P_k = A_k - B_kP_{k-1}^{-1}C_{k-1} \qquad (k=2,3,\cdots,m)$$

である。 このとき,

$$Ux = L^{-1}f = g \quad , \quad x = U^{-1}g$$

であるから,

$$g_1 = f_1 \,;\quad g_k = f_k + B_kP_{k-1}^{-1}g_{k-1} \qquad (k=2,3,\cdots,m)$$

$$x_m = P_m^{-1}g_m, \quad x_k = P_k^{-1}(g_k + C_kx_{k+1}) \qquad (k=m-1,\cdots,1)$$

によって $x_i\ (i=1,2,\cdots,m)$ が求められる。

特殊な場合として, A_k, B_k, C_k が同一の相似変換で対角化できる場合, すなわち

$$A_k = F\hat{A}_kF^{-1}, \quad B_k = F\tilde{B}_kF^{-1}, \quad C_k = F\hat{C}_kF^{-1} \qquad (k=1,2,\cdots,m)$$

であるような行列Fと対角行列 $\tilde{A}_k, \hat{B}_k, \tilde{C}_k$ が存在する場合には, この方法は簡単に使える。

$$(3.4)\qquad M=(I_m\otimes F)\begin{bmatrix}\tilde{A}_1, & -\tilde{C}_1 & & 0\\ -\tilde{B}_2, & \tilde{A}_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\tilde{C}_{m-1}\\ 0 & & -\tilde{B}_m, & \tilde{A}_m\end{bmatrix}(I_m\otimes F)^{-1}$$

であるから, $z_i=F^{-1}x_i$, $\tilde{f}_i=F^{-1}f_i$ とおくと, (1)式は

$$Mz=\begin{bmatrix}\hat{A}_1, & -\tilde{C}_1 & & 0\\ -\tilde{B}_2, & \tilde{A}_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\tilde{C}_{m-1}\\ 0 & & -\tilde{B}_m, & \tilde{A}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ \vdots\\ z_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{f}_1\\ \tilde{f}_2\\ \vdots\\ \tilde{f}_m\end{bmatrix}=\tilde{f}$$

と書き直される。 $\hat{A}_k$, $\hat{B}_k$, $\hat{C}_k$ が対角行列であるから, P_k, P_k^{-1} は容易にもとめられる。

とくに

$$\hat{A}_i=A=\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)\quad (a_j>0).\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$\hat{B}_i=B=\mathrm{diag}(b_1,b_2,\cdots,b_n)\quad (b_j>0)\quad (i=2,3,\cdots,m)$$

$$\hat{C}_i=C=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_n)\quad (c_j>0)\quad (i=1,2,\cdots,m-1)$$

である場合に, この手続きの数値的安定性について調べよう。

[定理] $a_i\ge\max(2\sqrt{b_ic_i},\ 2b_ic_i,\ 2b_i,\ 2c_i,\ b_i+c_i,\ 1+b_ic_i)$

ならば, 前進過程 $(i=1,2,\cdots,n)$

$$g_k=\hat{f}_k+BP_{k-1}^{-1}g_{k-1}\qquad (k=2,3,\cdots,m)$$

も, 後退過程

$$z_k=P_k^{-1}Cz_{k+1}+P_k^{-1}g_k\qquad (k=m,m-1,\cdots,1)$$

も数値的に安定である。

3.2 例

以下の例では, x軸とy軸に平行な辺をもつ長方形Kの上

での偏微分方程式を考えることにする。 Rの上および下の水平側をそれぞれ UH, LH と記し, 右および左の垂直側をそれぞれ RV, LV と記す。 h, h_1 をそれぞれ x, y 方向への mesh-size とし,

$$r = h/h_1 \ , \quad b = r^2 \ , \quad a = 2(1+b)$$

とおく。 未知関数 u の値 $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ はつぎのように並べる。

$$x_i^T = (u_{i1}, u_{i2}, \cdots, u_{in}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

ラプラス演算子 Δ は 5点公式で近似する。

3.2.1 例1

$$-\Delta u + \lambda u = f(x,y) \qquad (\lambda \geqq 0 \ \text{定数})$$

について考える。 このとき

$$M = I_m \otimes A - B \otimes I \quad , \quad A = (a + \lambda h^2) I - b C$$

となる。 ここで B は $m \times m$ の行列, A, C は $n \times n$ の行列である。 C は LH, UH 上の境界条件によってつぎのようになる。

(a) u の値が LH, UH 上で与えられている場合。 $C = L_1$

(b) u の値が y 方向に周期的である場合. $C = L_2$

(c) u の値が UH 上で与えられ, u_y の値が LH 上で与えられている場合。

(i) $u_y(x,y)$ を前進差分 $(u(x, y+h_1) - u(x,y))/h_1$ または後退差分 $(u(x,y) - u(x, y-h_1))/h_1$ で近似したとき。 $C = L_3$

(ii) $u_y(x,y)$ を中心差分 $(u(x,y+h_1)-u(x,y-h_1))/2h_1$ で近似したとき．　$C=L_5$

(d) u_y の値が LH, UH 上で与えられている場合

(i) の場合　$C=L_2$，　(ii) の場合　$C=L_4$

(e) $u_y+\sigma_1 u$ の値が LH 上で，$u_y+\sigma_2 u$ の値が UH 上で与えられている場合．（σ_1, σ_2 は定数）

(i) の場合　$C=L_7(p,q)$，　$p=1+h_1\sigma_1$，　$q=1+h_1\sigma_2$

(ii) の場合　$C=L_8(p,q)$，　$p=2h_1\sigma_1$，　$q=2h_1\sigma_2$

(f) u の値が UH 上で与えられ，$u_y+\sigma_1 u$ の値が LH 上で与えられている場合

(i) の場合　$C=L_9(p)$　，$p=1+h_1\sigma_1$

(ii) の場合　$C=L_{10}(p)$　，$p=2h_1\sigma_1$

UH, LH, u_y, L_i, C, p, q, y, σ_1, σ_2 をそれぞれ RV, LV, u_x, $\hat{L}_i$, B, r, s, x, σ_3, σ_4 で置きかえると，同様に B が定められる．すると

$$M_{ij}=I_m\otimes\{(a+\lambda k^2)I-\ell L_i\}-\hat{L}_j\otimes I \qquad (i,j=1,2,\cdots,10)$$

がえられる．

$$M_{ij}=(I_m\otimes R_i)[I_m\otimes((a+\lambda k^2)I-\ell G_i)-\hat{L}_j\otimes I](I_m\otimes R_i)^{-1}$$

であるから，$i=6$ の場合を除いて (4) 式の形をしている．

また，

$$M_{ij} = (I_m \otimes R_i)(\hat{R}_j \otimes I)\,\Lambda_{ij}\,(\hat{R}_j \otimes I)^{-1}(I_m \otimes R_i)^{-1}$$

$$\Lambda_{ij} = I_m \otimes \{(a+\lambda h^2)I - \ell G_i\} - \hat{G}_j \otimes I$$

$$= \mathrm{diag}(\Lambda_{ij}^{(1)}, \Lambda_{ij}^{(2)}, \cdots, \Lambda_{ij}^{(m)})$$

$$\Lambda_{ij}^{(k)} = \mathrm{diag}(\lambda_{ij1}^{(k)}, \lambda_{ij2}^{(k)}, \cdots, \lambda_{ijn}^{(k)})$$

$$\lambda_{ij\ell}^{(k)} = (a+\lambda h^2) - \ell\lambda_{i\ell} - \mu_{jk}$$

である。ただし

$$G_i = \mathrm{diag}(\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \cdots, \lambda_{in}), \quad \hat{G}_j = \mathrm{diag}(\mu_{j1}, \mu_{j2}, \cdots, \mu_{jm})$$

である。とくに

$$\lambda_{ij\ell}^{(k)} = \lambda h^2 + 4\ell\sin^2\frac{1}{2}\theta_{i\ell} + 4\sin^2\frac{1}{2}\theta_{jk} \qquad (i,j=1,2,\cdots,6)$$

である。

M_{ij} が正則ならば、逆行列は

$$M_{ij}^{-1} = (I_m \otimes R_i)(\hat{R}_j \otimes I)\,\Lambda_{ij}^{-1}\,(\hat{R}_j \otimes I)^{-1}(I_m \otimes R_i)^{-1}$$

によって与えられる。また、

$$M_{i7} = M_{i1} - (\gamma U_m + s U_m^J)\otimes I, \quad M_{i8} = M_{i4} - (\gamma U_m + s U_m^J)\otimes I$$

$$M_{i9} = M_{i1} - \gamma U_m \otimes I, \quad M_{i10} = M_{i5} - \gamma U_m \otimes I$$

であるから、$M_{i7}^{-1}, M_{i8}^{-1}, M_{i9}^{-1}, M_{i10}^{-1}$ はそれぞれ $M_{i1}^{-1}, M_{i4}^{-1}, M_{i1}^{-1}, M_{i5}^{-1}$ から、補題5によって求めることができる。

$$M_{ij} = I_m \otimes \{(a+\lambda h^2)I - \ell L_i(p,q)\} - \hat{L}_j \otimes I$$

$$= (\hat{R}_j \otimes I)\,\Omega_{ij}\,(\hat{R}_j \otimes I)^{-1} \qquad (i=7,8,9,10;\ j=1,4,5)$$

$$\Omega_{ij} = I_m \otimes \{(a+\lambda h^2)I - \ell L_i(p,q)\} - \hat{G}_j \otimes I$$

$$= \mathrm{diag}(\Omega_{ij}^{(1)}, \Omega_{ij}^{(2)}, \cdots, \Omega_{ij}^{(m)})$$

$$\Omega_j^{(k)} = (a+\lambda h^2-\mu_{jk})I - hL_i(p,q)$$

であるから，補題3によって Ω_j^{-1} はもとめられる．したがって，M_{i1}^{-1}, M_{i4}^{-1}, M_{i5}^{-1} $(i=7,8,9,10)$ は $L_i(p,q)$ の固有値をもとめなくてもえられる。

3.2.2 例2

$$-\Delta u + du_x + eu_y + gu = f(x,y)$$

について考えよう。

$$d=d(x)\ ,\quad e=\text{定数}\ ,\quad g=g(x)$$

であるとする。h は

$$\gamma=(1-\tfrac{h}{2}e)>0\ ,\quad \gamma\delta^2=(1+\tfrac{h}{2}e)>0 \qquad (\delta>0)$$

となるように小さく選ぶ。すると，

$$A_1=(a+h^2g_1-\gamma(1+\tfrac{h}{2}d_1))I - M(p,q;\alpha,\beta;\gamma,\delta)$$

$$A_i=(a+h^2g_i)I - M(p,q;\alpha,\beta;\gamma,\delta) \qquad (i=2,3,\cdots,m-1)$$

$$A_m=((a+h^2g_m)-s(1-\tfrac{h}{2}d_m))I - M(p,q;\alpha,\beta;\gamma,\delta)$$

$$C_1=(1-\tfrac{h}{2}d_1+w(1+\tfrac{h}{2}d_1))I$$

$$C_i=(1-\tfrac{h}{2}d_i)I\ ,\quad B_i=(1+\tfrac{h}{2}d_i)I \qquad (i=2,3,\cdots,m-1)$$

$$B_m=(1+\tfrac{h}{2}d_m+z(1-\tfrac{h}{2}d_m))I$$

となる。 p,q,α,β は UH, LH の上の境界条件によってつぎのようになる。

(a) の場合 $p=q=\alpha=\beta=0$

(c) (i) の場合 $p=1$, $q=0$, $\alpha=\beta=0$

(c)(ii) の場合　$p=0,\ q=0,\ \alpha=1,\ \beta=0$

(d)(i) の場合　$p=q=1,\quad \alpha=\beta=0$

(d)(ii)　〃　$p=q=0,\quad \alpha=\beta=1$

(e)(i)の場合　$p=1+h_1\sigma_1,\ q=1+h_1\sigma_2,\quad \alpha=\beta=0$

(e)(ii)　〃　$p=2h_1\sigma_1,\ q=2h_1\sigma_2,\quad \alpha=\beta=1$

(f)(i) の場合　$p=1+h_1\sigma_1,\ q=0,\quad \alpha=\beta=0$

(f)(ii)　〃　$p=2h_1\sigma_1,\ q=0,\quad \alpha=1,\ \beta=0$

LH, UH, U_y, p, q, α, β, σ_1, σ_2, h_1 をそれぞれ LV, RV, U_x, r, s, w, z, σ_3, σ_4, h で置きかえると r, s, w, z の値が同様に定められる。　いずれの場合も補題6によって A_i は対角化されることがわかる。

$$d=\text{定数},\quad e=e(y),\quad g=g(y)$$

の場合も，x と y の役割りを入れかえることによって同様に扱える。

$$d=\text{定数},\quad e=\text{定数},\quad g=\text{定数}$$

の場合を考えよう。

$$\mu=\left(1+\frac{h}{2}d\right)>0,\quad \mu\rho^2=\left(1-\frac{h}{2}d\right)>0\quad(\rho>0)$$

となるように h を選ぶ。

$$F=\mathrm{diag}(1,\rho,\rho^2,\cdots,\rho^{m-1})$$

とおく。　すると

$$M=I_m\otimes\{(a+h^2g)I-M(p,q;\alpha,\beta;\gamma,\delta)\}-\hat{M}(r,s;w,z;\mu,\rho)\otimes I$$

となる.

$$M = (I_m \otimes E)^{-1}(F \otimes I)^{-1}\Omega(F \otimes I)(I_n \otimes E)$$

$$\Omega = I_m \otimes \{(a + h^2 g)I - \gamma\delta L(p\delta^{-1}, q\delta; \alpha\delta^{-2}, \beta\delta^2)\} - $$
$$- \mu\rho \hat{L}(\gamma\rho^{-1}, \lambda\rho; \omega\rho^{-2}, z\rho^2) \otimes I$$

であるから，(4)式の形になおすことができる。

§4. 4階の楕円型方程式

方形に対する4階の楕円型方程式を近似的に解く問題は，つぎの形の方程式を解く問題に帰着されることが多い。

$$(4.1) \qquad Nx = \begin{bmatrix} A_1, & -C_1, & E_1 & & & & \\ -B_2, & A_2, & -C_2, & E_2 & & O & \\ D_3, & -B_3, & A_3, & -C_3, & E_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & E_{m-2} \\ & O & & D_{m-1}, & -B_{m-1}, & A_{m-1}, & -C_{m-1} \\ & & & & D_m, & -B_m, & A_m \end{bmatrix} x = f$$

Nの主小行列がすべて正則である場合には，Nはつぎのように LU分解される。

$$L = \begin{bmatrix} I & & & & \\ -L_2, & I & & O & \\ M_3 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & & M_m, & -L_m, & I \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} P_1, & -U_1, & E_1 & & O \\ & P_2, & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & E_{m-2} \\ & & & \ddots & -U_{m-1} \\ O & & & & P_m \end{bmatrix}$$

ただし

$$M_i = D_i P_{i-2}^{-1}$$

$$L_i = (B_i - M_i U_{i-2}) P_{i-1}^{-1}$$

$$U_i = C_i - L_i E_{i-1}$$

$$P_i = A_i - L_i U_{i-1} - M_i E_{i-2} \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

である。 A_i, B_i, C_i, D_i, E_i が同一の相似変換で対角化できる場合には、この方法は容易に使える。

(例) $\Delta\Delta u + 2\alpha\Delta u + \beta u = f(x,y) \qquad (\alpha,\beta:$定数$)$

について考えよう。 u の値は境界上で与えられているとする。

$$A = (a^2+2\ell^2+2+2\alpha a \ell^2+\beta\ell^4)I - 2(a+\alpha\ell^2)\ell J + \ell^2(J^2-2I)$$

$$B = (a+\alpha\ell^2)I - \ell J$$

とおく。

(i) LV, RV 上で u_{xx}, LH, UH 上で u_{yy} の値が与えられている場合

$$N_1 = I_m \otimes A - 2J_m \otimes B + (J_m^2 - 2I_m)\otimes I$$

となる。

$$N_1 = S[\, I_m \otimes \{(2+(\beta-\alpha^2)\ell^4)I + \{(a+\alpha\ell^2)I - \ell G_1\}^2\} +$$

$$+ J_m \otimes 2\{(a+\alpha\ell^2)I - \ell G_1\} + (J_m^2 - 2I_m)\otimes I\,]\, S^{-1}$$

であるから、A_i, B_i, C_i, D_i, E_i は対角化できる。 また、

$$N_1 = SP\Lambda P^{-1}S^{-1}$$

$$\Lambda = I_m \otimes (\beta-\alpha^2)\ell^4 I + \{I_m \otimes ((a+\alpha\ell^2)I - \ell G_1) - \hat{G}_1 \otimes I\}^2$$

$$= \mathrm{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots, \Lambda_m)$$

$$\Lambda_k = (\beta-\alpha^2)\ell^4 I + \{(a+\alpha\ell^2)I - \ell G_1 - 2\cos\frac{k\pi}{m+1} I\}^2$$

$$\Lambda_k = \mathrm{diag}(\lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \cdots, \lambda_{kn})$$

$$\lambda_{ki} = (\beta-\alpha^2)h^4 + \left\{\alpha h^2 + 4\ell\sin^2\frac{i\pi}{2(n+1)} + 4\sin^2\frac{k\pi}{2(m+1)}\right\}^2$$

である。

(ii) UH, LH 上で u_{yy}, LV, RV 上で u_x の値が与えられている場合　u_x を中心差分で近似すると

$$N_2 = N_1 + 2(U_m + U_m^T)\otimes I$$

となる。この場合も A_i, B_i, C_i は対角化できる。また、

$$N_2 = S[P\Lambda P^{-1} + 2(U_m + U_m^T)\otimes I]S^{-1}$$

であるから、補題5によって N_2^{-1} を求めることもできる。

(iii) UH, LH 上で u_y, LV, RV 上で u_x の値が与えられている場合。

$$N_3 = N_4 + 2(U_m + U_m^T)\otimes I$$

となる。ただし、

$$N_4 = I_m\otimes(A + 2\ell^2(U+U^T)) - 2J_m\otimes B + (J_m^2 - 2I_m)\otimes I$$

である。

$$N_4 = P\Omega P^{-1}$$

$$\Omega = I_m\otimes\{A - 2I + 2\ell^2(U+U^T)\} - 2\hat{G}_1\otimes B + \hat{G}_1^2\otimes I$$

$$= \mathrm{diag}(\Omega_1, \Omega_2, \cdots, \Omega_m)$$

$$\Omega_k = \left\{\left(2\ell + \alpha h^2 + 4\sin^2\frac{k\pi}{2(m+1)}\right)I - \ell J\right\}^2 + (\beta-\alpha^2)h^4 I + 2\ell(U+U^T)$$

である。Ω_k^{-1} は補題4によっても、LU分解によっても求められるから、N_4^{-1} は容易に求められる。N_3^{-1} は補題5

によって求めることができる。

References

[1] Forsythe,G.E. and W.R.Wasow : Finite difference methods for partial differential equations,John Wiley & Sons (1960).

[2] Keast,P. and A.R.Mitchell : On the instability of the Crank Nicholson formula under derivative boundary conditions, Computer J. 9(1966),110 - 114 .

[3] Nemchinov,S.V. : The solution of boundary problems for partial differential equations of the second order of the elliptic type using the network method,Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.,2(1962),418 - 436 .

[4] Polozhii,G.N. : The method of summary representation for numerical solution of problems of mathematical physics,Pergamon (1965).

[5] Sarmin,E.N. : Application of the straight line method to the solution of boundary value problem for some non-self-adjoint two-dimensional elliptic equations of the second order, Ž.Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.,5(1965),945 - 949.

[6] Schechter,S. : Quasi-tridiagonal matrices and type-insensitive difference equations, Quart. Appl. Math.,18(1960-1961),258 - 295.