数理解析研究所講究録
第 35 巻 1967 年 81-94

最大値原理とGreen函数に
に関する一注意

名大 教養 神田 護

§0. 序

O. Frostman は [1] において α-次 Riesz kernel

$$G(x, y) = \frac{\text{constant}}{|x-y|^{d-\alpha}}, \quad x, y \in R^d$$

を考察し，$d \geq 3$ の場合には，$\alpha > 2$ ならば $G(x, y)$ は最大値原理をみたし得ない事を示した。ここで云う最大値原理とは μ を R^d での測度とした時 $\int G(x, y)\mu(dy) \leq M$ が μ の台上でなりたつならば 到る所でなりたつ という性質をさしていう。この事実は確率論の立場からいえば $e^{-\text{const}\cdot|z|^\alpha}$ が $\alpha > 2$ の時には特性函数になり得ないという事に対応している。

ここでは 上の事実を弱い形であるが多少広い class の kernel に対して拡張しよう。

定理　$G(x, y)$ を d-次元ユークリッド空間 R^d $(d \geq 3)$ 上の次の形の kernel とする。

$$(*) \qquad G(x,y) = \frac{C(x,y)}{|x-y|^{d-\alpha}}$$

ここに $C(x,y)$ は R^d 上の有界連続函数で常に正 (>0) なるものとする。

もし $d>\alpha>2$ ならば $G(x,y)$ は完全最大値原理をみたさない。

ここで $G(x,y)$ が完全最大値原理をみたすとは，f, g を非負の連続函数で compact support を持つものとし，a を非負の定数とした時

$$Gf \leqq Gg + a$$

が f の support でなりたてば，到る所でなりたつ時云う。但し $Gf(x) = \int G(x,y)f(y)dy$.

以後 $(*)$ の形の kernel を α-kernel と呼ぶ事にしよう。

上の定理は，

"Potential representation of the hitting probability and its applications"

の題で発表する予定の論文の中での一定理の Corollary として得られる。

この定理の証明には上の題名のように到達確率のポテンシャル表現が重要な役割をはたしている。

§1. 準備

まず函数空間を導入しよう。C_K は compact support を持つ連続函数の空間，B_K は compact support を持つ有界可測函数の空間，C_0 は一点 compact 化の topology で無限遠で 0 に収束する連続函数の空間である。但しいずれも R^d 上でのみ考え一様ノルムをいれる。

R^d 上の Hunt process $X=(x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_x)$ が C_0-process であるとは，その semi-group $\{T_t\}$ が C_0 上の強連続な semi-group である時云う。$\{G_\alpha\}$ を X の resolvent とした時，非負で universally measurable な函数 $u(x)$ が (G,α)-excessive であるとは，任意の $\beta \geqq 0$ に対して $\beta G_{\alpha+\beta} u \leqq u$ かつ $\lim_{\beta\to+\infty} \beta G_{\alpha+\beta} u = u$ となる事である。

α-kernel $G(x,y)$ が C_0-process の Green 函数と云われるのは任意の $f \in B_K$ に対して

$$\int_0^{+\infty} T_t f(x)\,dt = \int_{R^d} G(x,y) f(y)\,dy$$

がなりたつ時である。

我々は矛盾によって定理を証明しよう。そのためには次の Proposition が基本的である。

<u>PROPOSITION 1</u>. 完全最大値原理をみたす α-kernel $G(x,y)$ に対して それを Green 函数と

する C_0-processが存在する。

これの証明については、[2]の定理1.1をみられたい。

§2. 到達確率のポテンシャル表現

この§で証明しようとするのは次のpropositionである。

PROPOSITION 2　$X=(x_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_x)$ を α-kernel $G(x,y)$ をGreen函数とする R^d $(d\geqq 3)$ 上の C_0--processとする。Kをcompact closureを持つanalytic setとし、σ_KをKへのfirst hitting time, 即ち $\sigma_K = \inf(t>0, x_t\in K)$ (但し右辺が空集合ならば$+\infty$とする)とするならば、$\bar{K}$ (=Kのclosure) にconcentrateする測度 $\mu_K(dy)$ が存在して

$$P_x(\sigma_K<+\infty)=\int G(x,y)\mu_K(dy)$$

となる。上の測度 $\mu_K(dy)$ をXに関するKの平衡分布という。

注意　一般に平衡分布が一意であるかどうかは筆者には分らない。しかしprocess Xが連続ならば一意である事が証明できる。今はその証明は省略する。

Proposition 2の証明のためにいくつかlemmaを準備する。考えているprocessは常に α-kernel $G(x,y)$ を

Green函数とするC_0-processであって一々それを断わる事はしない。

<u>LEMMA 1</u>. $P_x(\sigma_K<+\infty)$は$(G,0)$-excessiveかつ$R^d-\overline{K}$でharmonicである。即ち$R^d-\overline{K}$に含まれる任意のdomain Qに対して，$\tau_Q=\inf(t\geqq 0,\ x_t\notin Q)$（もし右辺が空集合なら$\tau_Q=+\infty$）とおけば$E_x(P_{x_{\tau_Q}}(\sigma_K<+\infty))=P_x(\sigma_K<+\infty)$.

<u>証明</u>. これは強Markov性を用いる事によって証明できる。

<u>LEMMA 2</u> $\{G_n\}$をcompact setの列で$G_n\supset K$かつ$\overline{G}_n\subset \mathring{G}_{n+1}$，$G_n\uparrow R^d$とする。その時

$$\lim_{n\to+\infty} E_x(P_{x_{\sigma_{G_n^c}}}(\sigma_K<+\infty))=0$$

<u>証明</u>. $E_x(P_{x_{\sigma_{G_\ell}}}(\sigma_K<+\infty))=E_x(P_x(\sigma_K(\omega^+_{\sigma_{G_\ell}})<+\infty))$
$=P_x(\sigma_K<+\infty)$に注意すれば

$$E_x(P_{x_{\sigma_{G_n^c}}}(\sigma_K<+\infty))=E_x\{E_{x_{\sigma_{G_n^c}}}(P_{x_{\sigma_{G_\ell}}}(\sigma_K<+\infty))\}$$

$$=E_x\{E_x(P_{x_{\sigma_{G_\ell}}(\omega^+_{\sigma_{G_n^c}})}(\sigma_K<+\infty))\}$$

$$\leqq P_x(\sigma_{G_n^c}+\sigma_{G_\ell}(\omega^+_{\sigma_{G_n^c}})<+\infty)$$

$$=P_x(\sigma_{G_n^c}+\sigma_{G_\ell}(\omega^+_{\sigma_{G_n^c}})<\zeta)$$

がなりたつ事が分る。

今　$\xi_n(\omega)\equiv\sigma_{G_n^c}+\sigma_{G_\ell}(\omega^+_{\sigma_{G_n^c}})$とおこう。その時

$$E_x\int_{G_{\ell+1}} G(x_{\zeta_n}, y)\,dy \geqq \delta\cdot P_x(\zeta_n < \zeta)$$

である。但し $\delta \equiv \min_{x\in \overline{G_\ell}} \int_{\overline{G_{\ell+1}}} G(x,y)\,dy$ である。$\delta>0$ である事を示そう．$f(x)$ を G_ℓ で 1，$G_{\ell+1}^c$ で 0 の値をとる連続函数とする。$\lim_{\alpha\to+\infty}\alpha G_\alpha f = f$（一様）に注意すれば十分大きな α を選ぶと $\min_{x\in G_\ell} G_\alpha f(x) = \delta' > 0$ とできる。一方 $G_\alpha(x, G_{\ell+1}) \geqq G_\alpha f(x)$ だから $G_\alpha(x, G_{\ell+1})$ は $x\in G_\ell$ に対して δ' より大きい．従って $G(x, G_{\ell+1})$ は任意の $x\in G_\ell$ について δ' より大きい。さて $\chi_{G_{\ell+1}}$ を $G_{\ell+1}$ の集合函数とすれば

$$E_x\{\int_{G_{\ell+1}} G(x_{\zeta_n}, y)\,dy\} = E_x\{\int_{\zeta_n}^{\zeta} \chi_{G_{\ell+1}}(x_t)\,dt\}$$

$$\leqq E_x\{\int_{\sigma_{G_n^c}}^{\zeta} \chi_{G_{\ell+1}}(x_t)\,dt\} = E_x\{\int_\Omega G(x_{\sigma_{G_n^c}}, y)\chi_{G_{\ell+1}}(y)\,dy\}$$

であるから G が B_K を C_0 にうつす事に注意すれば $P_x(\zeta_n < \zeta)\to 0$．それ由 $\lim_{n\to+\infty} E_x(P_{x_{\sigma_{G_n^c}}}(\sigma_K<+\infty)) = 0$.

<u>LEMMA 3</u>. lemma 2 と同じ仮定の下で

$$E_x G(x_{\sigma_{G_n^c}}, y) = G(x, y)$$

が G_n^c に属する殆んどすべての y についてなりたつ。

<u>証明</u> $f(x)$ を G_n で 0 になる B_K に属す函数とせよ すると 任意の x に対して 次式がなりたつ事から 主張は明らかである。

$$\int_{R^d} E_x G(x_{\sigma_{G_n^c}}, y) f(y) dy = E_x\{E_{x_{\sigma_{G_n^c}}}(\int_0^{+\infty} f(x_t) dt)\}$$

$$= E_x\{\int_{\sigma_{G_n^c}}^{+\infty} f(x_t) dt\} = E_x\{\int_0^{+\infty} f(x_t) dt\}$$

$$= \int_{R^d} G(x, y) f(y) dy$$

LEMMA 4. $G(x, y)$ は yを固定すると xの函数として $(G, 0)$-excessive function である。

証明 以下の証明は渡辺毅氏による。まず$f \in B_K$に対して $\alpha G_\alpha Gf(x) \leqq Gf(x)$, 従って xを固定すると殆んどすべてのyに対して $\int_{R^d} G(z, y) \alpha G_\alpha(x, dz) \leqq G(x, y)$ がなりたつ。右辺はyについて連続函数($+\infty$もこめて), 左辺は下半連続函数であるから その不等式は到る所でなりたつ。今 $G_{n,y}(x) = \min(G(x, y), n)$ とおけば

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{R^d} G(z, y) \alpha G_\alpha(x, dz) \geqq \lim_{\alpha \to +\infty} \int_{R^d} G_{n,y}(z) \alpha G_\alpha(x, dz)$$

$$= G_{n,y}(x).$$

以上をあわせて lemma は証明された。

注意 μをR^d上の測度で $\int G(x, y) \mu(dy)$ (以後簡単のため $G\mu(x)$ とかく) が有界なものとする。その時 $G\mu(x)$ は $(G, 0)$-excessive である。

<u>測度μ_Kの存在証明</u>. 我々は H. Kunita - T. Watanabe [3] で用いられた方法を使おう。以後 $u(x) = P_x(\sigma_K < +\infty)$ とする。$u_n = nG_n u$ とおけば u が $(G, 0)$-excessive である事から u_n は u に単調に増加して近づき，かつ Dynkin 公式と lemma 2 を用いる事によって

$$u_n(x) = Gf_n(x), \quad f_n(x) = n(u(x) - u_n(x))$$

と表現される事が分る。更に $Gf_n(x) \leqq 1$ かつ $\inf_{y\in K_1, x\in K_2} G(x, y) > 0$ ，K_1, K_2 ; compact set に注意すれば $\{f_n(x)dx\}$ の部分列 $\{f_{n_k}(x)dx\}$ が存在して ある測度μ_K に弱収束する。今 f を B_K に属する非負の函数とすれば，$\hat{G}f(x)$ ($= \int_{R^d}\hat{G}(x,y)f(y)dy$, $\hat{G}(x,y) = G(y,x)$) が連続である事より

$$\begin{aligned}\int_{R^d} f(x)\,u(x)\,dx &= \lim_{k\to+\infty}\int_{R^d} f(x)\,Gf_{n_k}(x)\,dx \\ &\geqq \int_{R^d}\hat{G}f(y)\,\mu_K(dy) = \int_{R^d} G\mu_K(y)\,f(y)\,dy\end{aligned}$$

となる。更に $\{G_n\}$ を lemma 2 の compact set の列とすれば

$$\begin{aligned}\int_{R^d} f(x)\,u(x)\,dx &= \lim_{k\to+\infty}\int f(x)\,Gf_{n_k}(x)\,dx \\ &= \lim_{k\to+\infty}\int f(x)\int_{G_n} G(x,y)f_{n_k}(y)\,dy\,dx \,+ \\ &\quad + \lim_{k\to+\infty}\int f(x)\int_{G_n^c} G(x,y)f_{n_k}(y)\,dy\,dx\end{aligned}$$

となるから lemma 3 を用いる事によって

$$右辺 \leqq \int_{R^d} G\mu_K(y)f(y)dy + \int_{R^d} f(x)dx \int_{G_n^c} E_x G(x_{\sigma_{G_n^c}}, y) f_{x_k}(y) dy$$

$$\leqq \int_{R^d} G\mu_K(y)f(y)dy + \int_{R^d} E_x u(x_{\sigma_{G_n^c}}) f(x) dx$$

それ由. lemma 2 によって

$$\int_{R^d} f(x)u(x)dx \leqq \int_{R^d} G\mu_K(y)f(y)dy.$$

以上あわせて

$$G\mu_K(x) = u(x)$$

が殆んどすべての x についてなりたつ。両辺共 $(G,0)$-excessive だから到るところでなりたつ。

μ_K が K に concentrate する事の証明. それを証明する前に 1 つ lemma を注意しよう。

LEMMA 5. 任意の点 x_0 とそれを含む球 V に対して V に含まれ点 x_0 を中心とする球 $U(x_0)$ があって, 任意の $U(x_0)$ に属す点 x と y に対して

$$G(x,y) > E_x G(x_{\tau_V}, y)$$

がなりたつ。

<u>証明</u>　任意の $x, y \in U(x_0)$ に対して $G(x,y) \geqq \inf_{(x,y)\in U(x_0)\times U(x_0)} C(x,y) \times (U(x_0)\text{の直径})^{\alpha-d}$ であり，$E_x G(x_{\tau_V}, y) \leqq \sup_{y\in U(x_0),\, x\in V^c} G(x,y)$ であるから，$U(x_0)$ の半径を十分小さくとりさえすればよい。

μ_K が $\overline{K}$ に concentrate している事を示そう。A を $\overline{K}^c$ に属す compact set とした時，$\mu_K(A)=0$ を示せばよい。今，$\mu_K(A)>0$ と仮定しよう。その時 A に含まれる点 x_0 が存在して x_0 を中心とする任意の球 V に対して $\mu_K(V)>0$ となる。そのような点 x_0 と球 V を固定しよう。lemma 5 の不等式がなりたつような球 $U(x_0)$ を選ぶと

$$u_1(x_0) \equiv \int_{U(x_0)\cap A} G(x_0,y)\mu_K(dy) > E_{x_0}\int_{U(x_0)\cap A} G(x_{\tau_V},y)\mu_K(dy)$$

となる。$u_2(x_0) \equiv \int_{R^d - U(x_0)\cap A} G(x_0,y)\mu_K(dy) \geqq E_{x_0} u_2(x_{\tau_V})$ に注意すれば

$$\begin{aligned} u(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) &> E_{x_0}\{u_1(x_{\tau_V}) + u_2(x_{\tau_V})\} \\ &= E_{x_0} u(x_{\tau_V}) \end{aligned}$$

となり，$u(x)$ が $R^d - \overline{K}$ で harmonic である事に矛盾する。従って $\mu_K(A)=0$.

§3.　定理の証明

この§は定理の証明にあてられる。断わりなしにここでは，α-kernel $G(x,y)$ を Green 函数とする C_0-process

のみを考える事にする。

Qを球とし∂Qをその球面とする。$\varepsilon_{\partial Q}(dy)$を$\partial Q$上の一様測度とする；

$$\varepsilon_{\partial Q}(dy) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} (\sin\theta)^{d-2} d\theta \qquad 0<\theta<\pi$$

rをQの半径とし

$$L \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} 2^{\alpha-\overset{2}{\cancel{d}}} r^{\alpha-d} \int_0^{\pi} \sin^{\alpha-2}\frac{\theta}{2} \cos^{d-2}\frac{\theta}{2} d\theta$$

とおく。その時次の lemma がなりたつ。

<u>LEMMA 1</u> $d>\alpha>1$ とする。Q'をQと中心を同じにする半径$2r$の球とする。その時

$$\frac{1}{m_1} L^{-1} \geqq \mu_{\partial Q}(\partial Q) \geqq \frac{m_1}{m_2^2} \cdot L^{-1}$$

がなりたつ。但し $m_1 = \inf_{x,y\in Q'} C(x,y)$, $m_2 = \sup_{x,y\in Q'} C(x,y)$.

<u>証明</u> 定理の証明には，2番目の不等式しか用いないので それを証明しよう。$\{G_n\}$を∂Qの$\frac{1}{n}$-近傍とする。任意の$\varepsilon>0$に対して十分大きい番号nを選べば

$$r^{\alpha-d} - \varepsilon \leqq \inf_{y\in \overline{G_n}} |x_0 - y|^{\alpha-d}$$

$$\sup_{x\in \overline{G_n}} \int_{R^d} |x-y|^{\alpha-d} \varepsilon_{\partial Q}(dy) \leqq L(1+\varepsilon)$$

$$P_{x_0}(\sigma_{G_n}<+\infty) \leqq P_{x_0}(\sigma_{\partial Q}<+\infty)+\varepsilon$$

がなりたつ。従って十分大きい番号nに対して

$$\mu_{G_n}(\overline{G_n}) \geqq \int_{R^d}\left\{\frac{1}{L}\int_{R^d}|x-y|^{\alpha-d}\varepsilon_{\partial Q}(dy)-\varepsilon\right\}\mu_{G_n}(dx)$$

$$\geqq \frac{1}{m_2\cdot L}\int_{R^d}P_x(\sigma_{G_n}<+\infty)\varepsilon_{\partial Q}(dx)-\varepsilon\,\mu_{G_n}(\overline{G_n})$$

$$=\frac{1}{m_2\cdot L}-\varepsilon\,\mu_{G_n}(\overline{G_n})$$

かつ.

$$m_2\cdot r^{\alpha-d}\cdot\mu_{\partial Q}(\partial Q)+\varepsilon \geqq m_1\cdot\{r^{\alpha-d}-\varepsilon\}\mu_{G_n}(\overline{G_n})$$

それ由

$$\mu_{\partial Q}(\partial Q) \geqq \frac{m_1}{m_2}\cdot\frac{1}{m_2\cdot L}\left\{1-\varepsilon\cdot r^{d-\alpha}\right\}\frac{1}{1+\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{m_2\cdot r^{\alpha-d}}$$

となる。 $\varepsilon\to 0$ とすれば lemma が証明される。

<u>定理の証明</u> もし,(*)の形の kernel が完全最大値原理をみたしたとすれば,§1 の Proposition 1 より,それを Green 函数とする C_0-process が存在し,したがって §2 の Proposition 2 より compact closure をもつ analytic set に対して平衡分布が定義できる。それ由 半径rの任意のQに対してその中心をx_0とすれば

$$1 \geqq P_{x_0}(\sigma_{\partial Q}<+\infty)=\int_{R^d}G(x_0,y)\mu_{\partial Q}(dy)$$

$$\geqq m_1 \int_{R^d} |x_0 - y|^{\alpha-d} \mu_{\partial Q}(dy) = m_1 r^{\alpha-d} \mu_{\partial Q}(\partial Q)$$

それ由, lemma 1 によって

$$1 \geqq m_1^2 (m_2^2)^{-1} \cdot r^{\alpha-d} \cdot L^{-1}$$

$$= \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \sqrt{\pi}\, 2^{2-\alpha} \cdot \frac{\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\int_0^\pi \sin^{\alpha-2}\frac{\theta}{2} \cos^{d-2}\frac{\theta}{2} d\theta\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{-1} \sqrt{\pi}\, 2^{2-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{d+\alpha}{2}-1)}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{\alpha-1}{2})}$$

となる。したがって $C(x,y)$ の連続性より $\frac{m_1}{m_2}$ はいくらでも（r を小さくする事によって）1 に近ずける事ができるから, $\alpha > 2$ の時,

$$(**) \quad \sqrt{\pi}\, 2^{2-\alpha} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+d}{2}-1)}{\Gamma(\frac{d}{2})\Gamma(\frac{\alpha-1}{2})} > 1$$

が言えさえすればよい。それは次のようにして示せる。

まず $x \in \partial Q$ に対して

$$\int |x-y|^{\alpha-d} \varepsilon_{\partial Q}(dy) = L$$

かつ $\Delta \cdot |x-y|^{\alpha-d} < 0$ が $2 < \alpha < d$ についてなりたつ事に注意すれば

$$\int |x_0-y|^{\alpha-d} \varepsilon_{\partial Q}(dy) > L$$

となる。即ち $r^{\alpha-d} > L$. それは $(**)$ を意味する。

References

[1] O. Frostman ; Potentiel d'equilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. Meddel. Lunds Univ Math. Sem. 3 (1935).

[2] M. Kanda ; Regular points and Green functions in Markov processes, J. Math. Soc. Japan, vol 19, No 1, (1967), 46-69.

[3] H. Kunita and T. Watanabe : Markov processes and Martin boundaries, Illinois J. Math., 9 (1965) 485-526.