数理解析研究所講究録
第36巻1968年1-8

時間的に非齊次な発展方程式の積分について

東大 理　　吉田 耕作

X を Banach 空間とし

(1) $\dfrac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t),\quad x(0) = y \in X,\quad x(t) \in X \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$

の形の方程式を"発展方程式 (*evolution equation*) という。ここに d/dt は X の強位相での微分とし，線形作用素 $A(t)$ の定義域 $D(A(t))$，値域 $R(A(t))$ はともに X に属するものとするが，$D(A(t)) = X$ であるとか $A(t)$ が（t を固定したとき）連続な作用素であることは仮定しないものとする。

熱伝導方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \Delta x(t)$$

や，行列的に書いた波動方程式

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

のみならず Schrödinger 方程式

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}x(t) = Hx(t),$$ （Hは量子力学的ハミルトニヤン）

などはいずれも発展方程式の例になっている。

A(t) がtに依存しないときは，半群理論（E. Hille－K. Yosida ， 1948）によって（1）の積分が試みられたが，これを A(t) が，tに依存する場合に拡張することは，1953年の T. Kato [1] により創められた。熱方程式の場合のように A(t) が elliptic の場合には，A(t) が解析的半群の生成作用素（infinitesimal generator）であることを利用して T. Kato [1] と異なる（1）の積分法を，H. Tanabe ， P. E. Sobolevski ， T. Kato などによって発展させられたし，また J. L. Lions， O. A. Ladyzenskaya－I. M. Vishik などの展開した積分法もある。しかし，一般の Banach 空間で，かつ A(t) が単に半群の生成作用素であるという条件のもとには，今のところ T. Kato [1] による「Cauchy の折線法」を超えた方法はないようである（J. Kisynski [2] 参照）。

Kato の折線法のアイデアは簡明で，（1）の解 $x(t)$ の近似として，区間 $[0, t]$， $0 \leq t \leq 1$，を細分して

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots\cdots < t_k = t \leq 1$$

のような分点 t_i をとり，

(2) $U_k(t,0)y = \exp((t-t_{n-1})A(t_{n-1}))\cdot\exp((t_{n-1}-t_{n-2})A(t_{n-2}))\cdot$
$\cdots\exp((t_{j+1}-t_j)A(t_j))\cdots\exp((t_1-t_0)A(t_0))y$

を作ると，$y \in D(A(0))$ なるとき

(3) $\max_j|t_{j+1}-t_j| \to 0$ なるごとく $k\uparrow\infty$ ならしめるとき $s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k(t,0)y = x(t)$

となるように $A(t)$ についての条件を与えようというのである。Kato の条件は，つぎの (4)－(7) であった：

(4) $D(A(t))$ は t に依存せず，かつ X で稠密である。

(5) $\lambda>0$ ならば $A(t)$ の resolvent $(\lambda I-A(t))^{-1}$ が X から X のなかへの連続作用素として存在し[1]，かつ

$$\|(\lambda I-A(t))^{-1}\| \leqq 1 \quad (0\leqq t\leqq 1).$$

(6) $A(s)^{-1}\in L(X,X)$ したがって (4) と閉グラフ定理を用いてわかるように $A(t)A(s)^{-1}\in L(X,X)$ $(0\leqq s, t\leqq 1)$.

---

1) このことを $(\lambda I-A(t))^{-1}\in L(X,X)$ とかく。

(7) 任意の $x \in X$ に対して, $(t-s)^{-1}C(t,s)x =$
$= (t-s)^{-1}(A(t)A(s)^{-1} - I)x$ は $t \neq s$ なるところで有界かつ t, s について一様連続, かつ
$s\text{-}\lim_{k\to\infty} k\,C(t, t-\frac{1}{k})x = C(t)x$ が t に関して一様に成立つ.

Kato のアイデアは簡明であるが, $y \in D(A(0))$ ならば $s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k(t, 0)y$ が (1) の解になることの証明は必ずしも簡単ではない。以下には Kato のように $[0, t]$ を分割するのではなく, $[0, 1]$ を k 等分して, $U_k(t, 0)$ を

(2)′ $U_k(t,s) = \exp((t-s)A(\frac{i-1}{k}))$ $\quad(\frac{i-1}{k} \leqq s \leqq t \leqq \frac{i}{k}\,;\, 1 \leqq i \leqq k)$

$U_k(t,r) = U_k(t,s)U_k(s,r)$ $\quad(0 \leqq r \leqq s \leqq t \leqq 1)$

から作れば,

(3)′ $s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k(t, 0)y$, $\quad y \in D(A(0))$,

が, 初期条件 $x(0) = y$ に応ずる (1) の解であることを Kato の証明に沿いながら相当短かくできることを示そう. (K. Yosida [3])[2)]

---

2) K. Yosida [3] では, 局所空間に適用して述べてある。また半群理論や Tanabe, Sobolevski などの研究については, 例えば K. Yosida [4] を見られたい。

証明のすじ道

まず (5) と (2)' とから

(8) $\|U_k(t,s)\| \leqq 1 \qquad (k=1,2,\cdots;\ 0 \leqq s \leqq t \leqq 1)$

つぎに

(9) $W_k(t,0) = A(t)\,U_k(t,0)\,A(0)^{-1}$

とおくと

(10) $\|W_k(t,0)\| \leqq (1+k^{-1}N)\exp(tN),\ N = \sup_{0\leqq s<t\leqq 1}\|(t-s)^{-1}C(t-s)\|$

が成り立つ．これは

$$W_k(t,0)=A(t)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)^{-1}U_k\left(t,\frac{[kt]}{k}\right)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)A\left(\frac{[kt]-1}{k}\right)^{-1}U_k\left(\frac{[kt]}{k},\frac{[kt]-1}{k}\right)\cdot$$
$$\cdots\cdots A\left(\frac{2}{k}\right)A\left(\frac{1}{k}\right)^{-1}U_k\left(\frac{2}{k},\frac{1}{k}\right)A\left(\frac{1}{k}\right)A(0)^{-1}U_k\left(\frac{1}{k},0\right)$$

を，(7) を用いて展開して，

(11) $W_k(t,0)=\left(I+C\left(t,\frac{[kt]}{k}\right)\right)\{U_k(t,0)+W_k^{(1)}(t,0)+W_k^{(2)}(t,0)+\cdots\}$,

$$W_k^{(1)}(t,0)=\sum_{ks=1}^{[kt]-1}U_k(t,s)\,C\left(s,s-\frac{1}{k}\right)U_k(s,0)$$

$$W_k^{(m+1)}(t,0)=\sum_{ks=1}^{[kt]-1}U_k(t,s)\,C\left(s,s-\frac{1}{k}\right)W_k^{(m)}(s,0) \quad (m=1,2,\cdots,$$

$[kt]-1)$

を得ることからわかる．

(11) からとくに，$y\in D(A(0))$ ならば $U_k(t,0)y\in D(A(t))$.
同じようにして $y\in D(A(0))$ ならば $U_k(t,s)y\in D(A(t))$ である．したがって，

$$U_k(t,s)y = \exp\left(\left(t-\frac{[kt]}{k}\right)A\left(\frac{[kt]}{k}\right)\right)U_k\left(\frac{[kt]}{k}, s\right)y$$

は，$t \neq \frac{i}{k}$　$(i=0, 1, \cdots, k)$ において微分可能で

(12) $$\frac{dU_k(t,s)y}{dt} = A\left(\frac{[kt]}{k}\right)U_k(t,s)y, \qquad y \in D(A(0)).$$

同じく　$s \neq \frac{i}{k}$　$(i=0, 1, 2, \cdots, k)$ ならば

(13) $$\frac{dU_k(t,s)y}{ds} = -U_k(t,s)A\left(\frac{[ks]}{k}\right), \qquad y \in D(A(0)).$$

これらの微分は有界で，かつ　$t=\frac{i}{k}$，$s=\frac{i}{k}$ 以外では，t と s について連続である。だから (12) − (13) により

$$(U_k(t,0)-U_n(t,0))A(0)^{-1}x = \int_0^t \frac{d}{ds}U_n(t,s)U_k(s,0)A(0)^{-1}x\,ds$$
$$= -\int_0^t U_n(t,s)C\left(\frac{[ns]}{n}, \frac{[ks]}{k}\right)A\left(\frac{[ks]}{k}\right)A(s)^{-1}W_k(s,0)x\,ds$$

を得て，(7)−(8)−(9)−(10) によって，任意の $x \in X$ に対して

$s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k(t,0)A(0)^{-1}x$　が t に関して一様に存在することがわかる。ゆえに $D(A(0))$ が X で稠密なことと，(8) を用い，

(14) $s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k(t,s)x = U(t,0)x$，　$x \in X$，が t に関して一様に存在することがわかる。同様にして

(14)′ $s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k(t,s)x = U(t,s)x$，　$x \in X$　が t, s　$(t \geq s)$

に関して一様に存在する．

こともいえる。よって (11) から $W_k(t,0)x$ の $k\to\infty$ における有界収束がいえて

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty} W_k(t,0)x = W(t,0)x = U(t,0)x + W^{(1)}(t,0)x + W^{(2)}(t,0)x + \cdots\cdots$$

$$W^{(1)}(t,0)x = \int_0^t U(t,s)\,C(s)\,U(s,0)x\,ds$$

$$W^{(m+1)}(t,0)x = \int_0^t U(t,s)\,C(s)\,W^{(m)}(s,0)x\,ds \qquad (m=1,2,\cdots)$$

を得る．だから $y\in D(A(0))$ ならば

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty} U_k(t,0)y = U(t,0)y,$$

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty} A(t)\,U_k(t,0)y = W(t,0)A(0)y$$

がともに有界かつ t について一様収束し，$W(t,0)A(0)y$ は t について強連続である．これから

$$U_k(t,0)y - y = \int_0^t \frac{d}{ds}U_k(s,0)y\,ds = \int_0^t A\left(\frac{[ks]}{k}\right)U_k(s,0)y\,ds$$

において $k\to\infty$ ならしめて

$$U(t,0)y - y = \int_0^t A(s)\,U(s,0)y\,ds, \qquad y\in D(A(0))$$

を得て，$x(t) = U(t,0)y$ が (1) の解であることがわかる。

Reference

1. T.Kato: Integration of the equation of evolution in a Banach space, J.Math.Soc.Japan, 5, 208 - 234 (1953).

2. J.Kysinski: Sur les opérateurs de Green des problèmes de Cauchy abstraits, Stud.Math. 23, 285 - 328 (1964).

3. K.Yosida: Time dependent evolution equations in a locally convex space, Math.Ann. 162, 83 - 86 (1965).

4. K.Yosida: Functional Analysis, Springer (1965).