数理解析研究所講究録
第36巻 1968年 19-28

Walshの函数による近似について

東北大 理　　渡利 千波

まえがき　よく知られているように，与えられた周期函数を三角多項式で近似する際には，「函数のなめらかさが大きいほど，得られる近似度がよい」という現象が見られる。この際，与えられた函数の連続率と，三角多項式による最良近似との間には，ほぼ平行した関係があるが，完全に平行した関係があるわけではない。まず，連続率には trivial な限界がある： $f(x+h)-f(x)=o(h) \Rightarrow f(x)=\text{const.}$ であるから。

この限界を，連続率の定義に導函数を持ち込んで，乗り越えることは一応可能である。たとえば，ある（負でない）整数 r に対して $f^{(r)}(x)$ がいたるところ存在し，しかも

$$f^{(r)}(x+h)-f^{(r)}(x) = O(h^{\alpha}) \quad (\text{as } h\to 0, \text{ unif. in } x)$$

が成立するとき $f\in \mathrm{Lip}(\alpha+r)$ と定義すれば，この定義は通常の $\mathrm{Lip}\,\alpha$ の拡張になっている。けれども，「函数のなめらかさは convolution によって得られる函数に『遺伝』する」という命題は，不完全にしか成立しない。この簡単な例として，Weierstrass 型の函数 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\cos 4^n x$ がある。これを f とすれば，$f\in \mathrm{Lip}\,\frac{1}{2}$ であるが，$f*f \notin \mathrm{Lip}\,1$ である。

最良近似を，そのままもとの函数の性質をあらわすもの と考える立場（「よく近似される函数はよい函数である」）に立てば「convolution による遺伝」は簡明である。$f-P_n=O(\varphi_n)$，$g-Q_n=O(\psi_n)$ であれば

$$(f-P_n)*(g-Q_n) = f*g - (P_n*g + f*Q_n - P_n*Q_n)$$

で，右辺の（ ）の中は一つの三角多項式であり，左辺から容易に大きさが評価できて，　$f*g - (\ \ ) = O(\varphi_n \psi_n)$　が得られる．

S. B. Stechkin [3] は，高階の階差を用いる連続率を考えて，函数のなめらかさと，三角多項式による最良近似の平行関係を記述したが，何階の階差を用いればよいかは a priori には決定できない．（「よい函数」の場合には高階の階差を考える必要がある）

ここでは，高階の階差を考える必要のない（あるいは，そのようなものが考えられない）場合に，函数のなめらかさと，多項式近似のよさ との間に完全な平行関係が成立する一例を提示する．

§1. dyadic group と Walsh の函数

以下においては，いわゆる dyadic group G 上の函数を G の characters の一次結合すなわち Walsh 多項式で近似する問題を考える．

dyadic group G とは，0または1を項とする数列　$x = (x_n)_{n=1,2,\cdots}$ の集合に，

$$x \dot{+} y = z = (z_n) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} z_n = x_n + y_n \pmod{2} = |x_n - y_n| \quad (n=1,2,\cdots)$$

で演算を定義し，単位元 $0 = (0, 0, \cdots)$ の近傍

$$V_0 = G, \qquad V_n = \{x \in G\,;\ x_1 = \cdots = x_n = 0\} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

あるいは距離

$$d(x,y) = \lambda(x \dot{+} y), \qquad \lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x_n$$

によって topology を定義して得られる compact Abelian group である．

$$\phi_{n-1}(x) = (-1)^{x_n} \qquad (x \in G, \quad n = 1, 2, \dots)$$

とおくと ϕ_n は G の (continuous character) であり (これは Rademacher の函数という) [illegible] (continuous character) [illegible] (Walsh の函数) は ϕ の有限積であらわされる。具体的には

$$\psi_0(x) = 1$$

$$\psi_n(x) = \phi_{n_1}(x) \cdot \cdots \cdot \phi_{n_r}(x) \qquad (n = 2^{n_1} + \cdots + 2^{n_r} \geqq 1, \quad n_1 > \cdots > n_r \geqq 0)$$

である。以下 Walsh の函数にはこの「順序」($\hat{G}$ の演算と compatible でない)をつけて考えることにする。

§2 連続率と最良近似

つぎのようにおく。

$$\mathcal{P}_n = \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \psi_\nu \,;\ c_\nu \in \mathbb{C} \ (\nu = 0, 1, \dots, n-1) \right\}$$

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_G |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} & (1 \leq p < \infty) \\ \sup\{ |f(x)| \,;\ x \in G \} & (p = \infty) \end{cases}$$

$$(\tau_h f)(x) = f(x \dotplus h) \qquad (h \in G)$$

$$\omega^{(p)}(\nabla_n ; f) = \sup\{ \|f - \tau_h f\|_p \,;\ h \in \nabla_n \}$$

$$f \in \mathrm{Lip}^{(p)} \alpha(\mathcal{W}) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \|f - \tau_h f\|_p = O(\lambda(h)^\alpha) \qquad (\alpha > 0, \ h \to 0)$$

$$E_n^{(p)}(f) = \inf\{ \|f - P_n\|_p \,;\ P_n \in \mathcal{P}_n \}$$

定理 1. α を正の定数とするとき、つぎの4つの命題はたがいに同値である。

(1) $f \in \mathrm{Lip}^{(p)} \alpha(\mathcal{W})$

(2) $\omega^{(p)}(\nabla_n ; f) = O(2^{-n\alpha})$

(3) $E_m^{(p)}(f) = O(m^{-\alpha})$

(4) $\| f - S_{2^n}(\cdot ; f) \|_p = O(2^{-n\alpha})$

ここに $S_{2^n}(\cdot ; f)$ は f の Walsh-Fourier series の 2^n 項までの和である。

証明 (1) ⇒ (2) はあきらかである。(2) ⇒ (1) も容易に示される。すなわち，$0 \neq h \in G$ を任意に与えるとき，$\exists n ;\ h \in \nabla_n - \nabla_{n+1}$.

$$\therefore \quad \| \tau_h f - f \| \leqq A \cdot 2^{-n\alpha} \leqq B \cdot \lambda(h)^{\alpha}$$

(4) ⇒ (3)：与えられた m に対して，$2^n \leqq m < 2^{n+1}$ となる n をとる。$\mathcal{P}_{2^n} \subset \mathcal{P}_m$ であるから

$$E_m^{(p)}(f) \leqq E_{2^n}^{(p)}(f) \leqq \| f - S_{2^n}(\cdot ; f) \|_p = O(2^{-n\alpha}) = O(m^{-\alpha}).$$

したがって，定理の証明を完結するには (3) ⇒ (4)，(2) ⟺ (4) を示せばよい。これをつぎの三つの補題に分けて証明する。

補題 1. (i) $D_m(x) = \sum_{\nu=0}^{m-1} \psi_\nu(x)$ とおくとき

$$D_{2^n}(x) = \begin{cases} 2^n & x \in \nabla_n \\ 0 & x \notin \nabla_n \end{cases}$$

(ii) $f \in L^p(G)$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ に対して

$$\| S_{2^n}(\cdot ; f) \|_p \leqq \| f \|_p$$

証明 (i) は $D_{2^n}(x) = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + \phi_j(x))$ からあきらかである。

(ii) は (i) と Minkowski の不等式からあきらかである.

補題 2. $E_{2^n}^{(p)}(f) \leqq \| f - S_{2^n}(\cdot\,; f)\|_p \leqq 2\, E_{2^n}^{(p)}(f)$

証明. 前半は trivial である. 後半を示すには, $E_{2^n}^{(p)}(f) = \| f - P \|_p$ ($P \in \mathcal{P}_{2^n}$) とするとき, $S_{2^n}(\cdot\,; P) = P$ に注意して

$$\| f - S_{2^n}(\cdot\,; f)\|_p = \| f - P - S_{2^n}(\cdot\,; f - P)\|_p$$
$$\leqq \| f - P \|_p + \| S_{2^n}(\cdot\,; f - P)\|_p \leqq 2 \| f - P \|_p \quad (\text{補題 1, (ii)})$$

補題 3. $E_{2^n}^{(p)}(f) \leqq \omega^{(p)}(\nabla_n ; f) \leqq 2\, E_{2^n}^{(p)}(f)$

証明. $1 \leqq p < \infty$ の場合を考える. $p = \infty$ の場合はより容易である.
補題 2 から

$$E_{2^n}^{(p)}(f) \leqq \| f - S_{2^n}(\cdot\,; f)\|_p = \left(\int_G \left| f(x) - \int_G f(x \dotplus y) D_{2^n}(y)\, dy \right|^p dx \right)^{1/p}$$
$$\leqq \left\{ \int_G \left(\int_G | f(x) - f(x \dotplus y) |\, D_{2^n}(y)\, dy \right)^p dx \right\}^{1/p}$$
$$= 2^n \left\{ \int_G \left(\int_{\nabla_n} | f(x) - f(x \dotplus y) |\, dy \right)^p dx \right\}^{1/p}$$
$$\leqq 2^n \int_{\nabla_n} \| \tau_y f - f \|_p \, dy \leqq \omega^{(p)}(\nabla_n ; f)$$

これで前半が得られた. 後半を示すために $h \in \nabla_n$ を任意に考える.
$P \in \mathcal{P}_{2^n}$ に対しては $P(x \dotplus h) = P(x)$ $(\forall x \in G)$ であるから

$$\| f - \tau_h f \|_p = \| f - P - \tau_h f + \tau_h P \|_p$$

$$\leq \|f-P\|_p + \|\tau_h P - \tau_h f\|_p = 2\|f-P\|_p.$$

$P \in \mathcal{P}_n$ に関して下限をとり, $h \in \mathcal{D}_n$ に関して上限をとればよい。

これで定理2の証明を完了した。

系 $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $p \geq 1$, $q \geq 1$ で $1 \geq 1/r \geq (1/p) + (1/q) - 1$ であるとする。このとき

$$f \in \mathrm{Lip}^{(p)}\alpha(W), \quad g \in \mathrm{Lip}^{(q)}\beta(W) \Rightarrow f * g \in \mathrm{Lip}^{(r)}(\alpha+\beta)(W).$$

証明 $E_n^{(r)}(f*g) = O(n^{-\alpha-\beta})$ を示せばよいが, 近似度は convolution によって「遺伝」するから, ほとんどあきらかである。

§3 Linear methods による近似

$f \in L^1(G)$ の Walsh Fourier series を (WFS と略記)

$$f \sim \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu \psi_\nu$$

とし, 形式的に作った級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^\lambda c_\nu \psi_\nu$$

がそれぞれ

essentially bounded function $f^{[\lambda]}$ の WFS である $(p=\infty)$

$L^p(G)$ に属する函数 $f^{(\lambda)}$ の WFS である $(1<p<\infty)$

G 上の bounded Borel measure $f^{(\lambda)}$ の Walsh-Fourier-Stieltjes series である $(p=1)$

ような f の全体を W^λ あるいは $W^{(p)\lambda}$ と書く。

$\xi(t)$ を $t>0$ に対して定義された正の連続非減少函数とし，$\frac{\xi(t)}{t}$ は十分大きな t に対しては非増加で，かつ

$$\int_1^n \frac{\xi(t)}{t}\,dt = O(\xi(n))$$

をみたしているとする．このとき，つぎの定理が成立する．

定理2 $\lambda>0$ とし，$T=(T_n)$ を $L^p(G)\to L^p(G)$ の linear operators の列とする．もし

(1) $\|T_n f\|_p \leqq M_1 \|f\|_p \qquad (\forall f\in L^p(G))$

(2) $\|f_n - T_n f\|_p \leqq M_2\, n^{-\lambda} \|f^{[\lambda]}\|_p \qquad (\forall f \in W^\lambda)$

が成立していれば，$0<\alpha<\lambda$ に対して

$$E_n^{(p)}(g) = O(n^{-\alpha}\xi(n)) \quad \Rightarrow \quad \|g - T_n g\|_p = O(n^{-\alpha}\xi(n))$$

である．すなわち，g は T によって最良近似と同じ order まで近似される．

補題4 (Bernstein の不等式)

$$P\in \mathcal{P}_n \Rightarrow \|P^{[\alpha]}\|_p \leqq A_\alpha n^\alpha \|P\|_p.$$

証明 $2^k \leqq n < 2^{k+1}$ である k を定める．$\|f*g\|_p \leqq \|f\|_1\|g\|_p$ が成立するから，$P^{[\alpha]} = D^{[\alpha]}_{2^{k+1}} * P$ に注意して，$\|D^{[\alpha]}_{2^{k+1}}\|_1 \leqq A_\alpha n^\alpha$ を示せば十分である．Abel 変換を2度用いて

$$D^{[\alpha]}_{2^{k+1}} = (2^{k+1}-1)^\alpha D_{2^{k+1}} - \left((2^{k+1}-1)^\alpha - (2^{k+1}-2)^\alpha\right)(2^{k+1}-1)F_{2^{k+1}-1} + \sum_{\nu=1}^{2^{k+1}-2} \Delta_\nu^2\, \nu F_\nu$$

ここに　$\Delta_\nu^2 = (\nu+1)^\alpha - 2\nu^\alpha + (\nu-1)^\alpha \sim \nu^{-2+\alpha}$

$$\nu F_\nu = \sum_{j=1}^{\nu} D_j$$

で、$\| F_\nu \|_1 \leqq 2$　$(\nu = 1, 2, \cdots)$ は知られている（Yano [5]）.

したがって

$$\| D^{[\alpha]}_{2^{k+1}} \|_1 \leqq 2^{(k+1)\alpha} + A \cdot 2^{(k+1)\alpha} + B \sum_{\nu=1}^{2^{k+1}-2} \nu^{-1+\alpha} \leqq A_\alpha n^\alpha \quad \text{q.e.d.}$$

補題5　$\alpha > 0$ とし、$\eta(t)$ は $t > 0$ に対して定義された正の連続函数で、十分大きな t に対しては非増加であるとする。$P_n \in \mathcal{P}_n$ が

$$\| f - P_n \|_p \leqq \eta(n) / n^{\alpha-1} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

をみたしていれば

$$\| P_n^{[\alpha]} \|_p \leqq A + B n \eta(n) + C \int_1^n \eta(t)\, dt$$

である.

証明　η は $t \geqq 2^{a-1}$ に対して非増加であるとする. $j \geqq a$ に対しては（以下ノルムの添数 p を省く）

$$\begin{aligned} \| P_{2^j} - P_{2^{j+1}} \| &\leqq \| P_{2^j} - f \| + \| P_{2^{j+1}} - f \| \\ &\leqq 2^{j(1-\alpha)} \eta(2^j) + 2^{(j+1)(1-\alpha)} \eta(2^{j+1}) \\ &\leqq (1 + 2^{1-\alpha}) 2^{j(1-\alpha)} \eta(2^j) \end{aligned}$$

$P_{2^j} - P_{2^{j+1}} \in \mathcal{P}_{2^{j+1}}$　であるから、補題4 によって

$$\| P^{[\alpha]}_{2^j} - P^{[\alpha]}_{2^{j+1}} \| \leqq A_\alpha \eta(2^j) \cdot 2^{(j+1)\alpha} \cdot 2^{j(1-\alpha)} = A'_\alpha \eta(2^j)\, 2^j$$

これを $j = a, a+1, \cdots, m-1$ に対して加えあわせて

$$\| P^{[\alpha]}_{2^m} - P^{[\alpha]}_{2^a} \| \leqq A'_\alpha \sum_{j=a}^{m-1} 2^j \eta(2^j) \leqq A'_\alpha \int_{2^{a-1}}^{2^{m-1}} \eta(t)\, dt$$

$n \geqq 2^{a-1}$ を考えるとき，m を $2^m \leqq n < 2^{m+1}$ から定めて $P_n - P_{2^m}$ について同じ評価をすると

$$\| P_n^{[\alpha]} - P_{2^m}^{[\alpha]} \|_p \leqq A_\alpha n^\alpha \left\{ \eta(n)\, n^{-\alpha+1} + \eta(2^m)\, 2^{-m(\alpha-1)} \right\}$$
$$\leqq A''_\alpha \left(n\eta(n) + \int_{2^{m-1}}^{2^m} \eta(t)\, dt \right)$$

これらを加え合わせれば，求める評価が得られる．　q.e.d.

定理２の証明

最良近似多項式 P_n をとる．

$$\| g - P_n \| \leqq M_3\, n^{-\alpha} \xi(n) = M_3\, n^{-(\alpha-1)} \xi(n)\, n^{-1}$$

であるから，補題５において $\eta(n) = \xi(n)/n$ とおいて

$$\| P_n^{[\alpha]} \| \leqq A + B\xi(n) + C \int_1^n \frac{\xi(t)}{t}\, dt \leqq M_4\, \xi(n).$$

他方，補題４から

$$\| P_n^{[\lambda]} \| = \| (P_n^{[\alpha]})^{[\lambda-\alpha]} \| \leqq M_5\, n^{\lambda-\alpha} \| P_n^{[\alpha]} \| \leqq M_6\, n^{\lambda-\alpha} \xi(n).$$

$P_n \in W^\lambda$ であるから，仮定 (2) によって

$$\| P_n - T_n P_n \| \leqq M_2\, n^{-\lambda} M_6\, n^{\lambda-\alpha} \xi(n) = M_7\, n^{-\alpha} \xi(n).$$

定理の仮定 (1) から

$$\| f - T f \| \leqq \| f - P_n \| + \| P_n - T_n P_n \| + \| T_n (f - P_n) \|$$

の右辺第３項が第１項と同じ order になり，証明が終る．

定理の仮定(1) は，多くの operator (T_n) によってみたされる自然な条件であり，仮定(2) は たとえば (T_n) による近似が W^λ という様に対して飽和近似であれば（そして飽和近似度が $n^{-\lambda}$ であれば）みたされる．

28

文 献

[1] N. J. Fine. On Walsh function. Trans. Amer. Math. Soc., 65(1949), 372-414.

[2] R. E. A. C. Paley. A remarkable system of orthonormal functions, Proc. London Math. Soc., 34(1932), 241-279.

[3] S. B. Steckin, On the best approximation of continuous functions. Izv. Akad. Nauk. 15(1951), 219-242.

[4] C. Watari. Best approximation by Walsh polynomials, Tôhoku Math. J., 15(1963), 1-5.

[5] ________, A note on saturation and best approximation, Tôhoku Math. J.. 15(1963), 273-276.

[6] S. Yano, On approximation by Walsh function, Proc. Amer. Math. Soc., 2(1951), 962-967.