数理解析研究所講究録
第36巻 1968年 49-58

発展方程式の特異摂動と退化

田辺広城

パラメーター $\varepsilon \geq 0$ を含む発展方程式

$$(1_\varepsilon) \qquad du_\varepsilon(t)/dt + A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t)$$

あるいは

$$(2_\varepsilon) \qquad \varepsilon\, du_\varepsilon(t)/dt + A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t)$$

について考える。種々の條件のもとで $\varepsilon \to 0$ のときの解 $u_\varepsilon(t)$ の収束を調べるのであるが $A_0(t)$ は一般に $A_\varepsilon(t)$ $(\varepsilon > 0)$ よりも弱い作用素すなわち定義域に関して $D(A_0(t)) \supset D(A_\varepsilon(t))$ が満たされている場合を主に考える。$A_\varepsilon(t)$ は通常微分作用素で定められるものであるが抽象論の枠内で特異摂動や退化を論じても微分作用素の代数的構造や陪特性曲線に関する微細な結果を得ることは一般に至難である。従って抽象的方程式のかかる摂動を論ずることに疑問が持たれるかも知れないが無意味であるとも思われないので少し考察してみることにする。主として (1_ε), (2_ε) の解が南雲先生の論文([4])の意味で完全に安定(completely stable)である條件を求めるのであるが，一般的な形に種々の定理を証明することは容易であろうがそれにあてはまる例を調べるのがかなり困難である。そこで人工的ではあるが trivial でない例を含む定理を述べ，次に加藤敏夫教授の最近の結果を紹介することにする。

準備として発展方程式

$$(3) \qquad du(t)/dt + A(t)u(t) = f(t)$$

の初期値問題の可解性についての一定理を次に述べておく。

(I) $A(t)$ は一様に解析的半群を生成する．すなわち各 $t\in[0,T]$ に対して $A(t)$ の resolvent set は一つの決まった開角領域 $\Sigma=\{\lambda:\ \arg\lambda \notin (-\theta_0,\theta_0)\}$ $(0<\theta_0<\pi/2)$ を含む．各 $t\in[0,T]$，$\lambda\in\Sigma$ に対して $\|(\lambda-A(t))^{-1}\|\leqq M/|\lambda|$ が成立する様な M が存在する．

(II) $A(t)^{-1}$ はノルム位相に関して t につき連続微分可能である．

(III) 正の数 $\rho\leqq 1$ が存在し $R(dA(t)^{-1}/dt)$ $(=dA(t)^{-1}/dt$ の値域$)$ $\subset D(A(t)^{\rho})$ かつ有限な数 N が存在して $0\leqq t\leqq T$ で

$$\|A(t)^{\rho}\cdot dA(t)^{-1}/dt\|\leqq N.$$

以上の仮定のもとで(3)の基本解 $U(t,s)$ が存在する．$U(t,s)$ は $0\leqq s\leqq t$ で定義された有界作用素の値をとる関数で

(4) $$U(s,s)=I,\qquad 0\leqq s\leqq T,$$

$s<t$ のとき $R(U(t,s))\subset D(A(t))$，t について $U(t,s)$ は微分可能で

(5) $$\partial U(t,s)/\partial t + A(t)U(t,s)=0$$

(6) $$\|\partial U(t,s)/\partial t\| = \|A(t)U(t,s)\|\leqq C/(t-s).$$

$f(t)$ が強 Hölder 連続ならば

(7) $$u(t)=U(t,s)u+\int_s^t U(t,\sigma)f(\sigma)\,d\sigma$$

が初期条件 $u(s)=u$ を満足する $s<t\leqq T$ での(3)の唯一つの解である．

証明の概略　Γ を Σ の中で $\infty e^{-i\theta_0}$ と $\infty e^{i\theta_0}$ を結ぶ滑らかな路とすると

(8) $$\exp(-\sigma A(t))=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{-\lambda\sigma}(\lambda-A(t))^{-1}\,d\lambda\qquad(\sigma>0)$$

が $A(t)$ の生成する半群である。$\lambda\in\Sigma$ のとき

$$\partial(\lambda-A(t))^{-1}/\partial t = -A(t)(\lambda-A(t))^{-1}\cdot dA(t)^{-1}/dt\cdot A(t)(\lambda-A(t))^{-1}$$

(9)

$$= -A(t)^{1-\rho}(\lambda-A(t))^{-1}\cdot A(t)^{\rho}dA(t)^{-1}/dt\cdot A(t)(\lambda-A(t))^{-1}$$

に注意すると (III) より

(10) $$\|\partial(\lambda-A(t))^{-1}/\partial t\| \leqq C/(t-s)^{\rho}$$

を得る。以下 C は種々の数を表わす。

(11) $$R_1(t,s) = -(\partial/\partial t+\partial/\partial s)\exp(-(t-s)A(t))$$

とおくと

(12) $$\|R_1(t,s)\| \leqq C/(t-s)^{1-\rho}$$

が (8) と (10) から得られる。この R_1 から出発して次々に

(13) $$R_m(t,s) = \int_s^t R_1(t,\tau)R_{m-1}(\tau,s)\,d\tau,\quad m=2,3,\cdots$$

と定義して

(14) $$R(t,s) = \sum_{m=1}^{\infty} R_m(t,s)$$

(15) $$W(t,s) = \int_s^t \exp(-(t-\tau)A(t))\,R(\tau,s)\,d\tau$$

とすると

(16) $$U(t,s) = \exp(-(t-s)A(t)) + W(t,s)$$

が求める基本解である。

§1. (1_ε) に関する特異摂動

定理2. $A_\varepsilon(t)$, $0\leqq t\leqq T$, $\varepsilon>0$ に対して定理1の仮定が一様に満足されているとする。すなわち (I), (II), (III) が ε に無関係な θ_0, ρ, N, M によって満足されているとする。次に $\delta\downarrow 0$ あるいは $\varepsilon\downarrow 0$ のときに強位相で一様に

(a) $\exp(-\delta A_0(t)) \to I,\quad 0 \leqq t \leqq T$

(b) $A_\varepsilon(t)^{-1} \to A_0(t)^{-1},\quad 0 \leqq t \leqq T$

(c) $dA_\varepsilon(t)^{-1}/dt \to dA_0(t)^{-1}/dt,\quad 0 \leqq t \leqq T$

が成立するとする.

(i) $u_\varepsilon \to u_0,$

(ii) $0 \leqq t \leqq T$ で一様に $f_\varepsilon(t) \to f_0(t),$

(iii) t, r, ε に無関係な $K, \alpha > 0$ が存在して $0 \leqq r \leqq t \leqq T$ で

$$\| f_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(r) \| \leqq K(t-r)^\alpha$$

であれば初期条件 $u_\varepsilon(s) = u_\varepsilon$ を満足する $s \leqq t \leqq T$ での (1_ε) の解 $u_\varepsilon(t;s)$ について次のことが成立する.

(17) $0 \leqq s \leqq t \leqq T$ で一様に $u_\varepsilon(t;s) \to u_0(t;s)$

$0 \leqq s < t \leqq T$ で広義一様に

(18) $du_\varepsilon(t;s)/dt \to du_0(t;s)/dt$

(19) $A_\varepsilon(t)\, u_\varepsilon(t;s) \to A_0(t)\, u_0(t;s).$

証明の主な部分は (1_ε) の基本解 $U_\varepsilon(t,s)$ 及びその導関数 $\partial U_\varepsilon(t,s)/\partial t$ の収束を調べることにある. ここでは次の予備定理を述べるにとどめる.

予備定理 1. 定理 2 の仮定のもとで $0 \leqq s \leqq t \leqq T$ で一様に強位相で

(20) $\exp(-(t-s)A_\varepsilon(t)) \to \exp(-(t-s)A_0(t)).$

証明 g を X の任意の元として証明の間中固定する. $\delta > 0$ とする.

$$\exp(-(t-s)A_\varepsilon(t))g - \exp(-(t-s)A_0(t))g$$

$$(21)\quad \begin{aligned} &= \exp(-(t-s)A_\varepsilon(t))\{I - \exp(-\delta A_0(t))\}g \\ &+ \exp(-(t-s)A_\varepsilon(t))\{\exp(-\delta A_0(t)) - \exp(-\delta A_\varepsilon(t))\}g \end{aligned}$$

$$+\{\exp(-(t-s+\delta)A_\varepsilon(t))-\exp(-(t-s+\delta)A_0(t))\}g$$

$$+\exp(-(t-s)A_0(t))\{\exp(-\delta A_0(t))-I\}g$$

η を任意の正の数とする。(a) によって $\delta>0$ が存在して $0\leqq t\leqq T$ で

$$\sup\|\exp(-(t-s)A_\varepsilon(t))\|\,\|\{I-\exp(-\delta A_0(t))\}g\|\leqq\eta/4.$$

次に

$$\|\exp(-(t-s+\delta)A_\varepsilon(t))-\exp(-(t-s+\delta)A_0(t))\|$$

$$\leqq C\int_{\lambda\in\Gamma,\,|\lambda|\leqq N}e^{-\delta\mathrm{Re}\lambda}\|\{A_\varepsilon(t)^{-1}-A_0(t)^{-1}\}A_0(t)(\lambda-A_0(t))^{-1}g\|\,|d\lambda|$$

$$+C\int_{\lambda\in\Gamma,\,|\lambda|>N}e^{-\delta\mathrm{Re}\lambda}\{\|(\lambda-A_\varepsilon(t))^{-1}g\|+\|(\lambda-A_0(t))^{-1}g\|\}\,|d\lambda|$$

であるが N を充分大きくとると第二項は $<\eta/8$ となる。次に $\{A_0(t)(\lambda-A_0(t))^{-1}g:\ |\lambda|\leqq N,\lambda\in\Gamma,\ 0\leqq t\leqq T\}$ は g のほかは N にだけ関係する compact 集合であることに注意すると $\varepsilon\to0$ のとき第一項は 0 に収束する。故に ε が充分小さければ

$$\|\{\exp(-(t-s+\delta)A_\varepsilon(t))-\exp-(t-s+\delta)A_0(t)\}g\|<\eta/8$$

となる。(21) の右辺第三項も同様に評価する (終)。

§2. (2_ε) の退化

定理3. 定理1の仮定が $A_\varepsilon(t)$, $0\leqq t\leqq T$, $\varepsilon>0$ によって一様に満たされているとする。又 $\varepsilon\to0$ のとき強位相で一様に $A_\varepsilon(t)^{-1}\to A_0(t)^{-1}$ とする。さらに $\{u_\varepsilon(s)\}$ を X の元の列として

(i) $0\leqq s\leqq T$ で一様に $u_\varepsilon(s)\longrightarrow A_0(s)^{-1}f_0(s)$,

(ii) $0\leqq t\leqq T$ で一様に $f_\varepsilon(t)\to f_0(t)$,

(iii) $\|f_\varepsilon(t)-f_\varepsilon(s)\|\leqq K(t-s)^\alpha$, $0\leqq s\leqq t\leqq T$, 但し K,α は ε,

t, x に無関係な常数,

とすると初期条件 $u_\varepsilon(t, s) = u_\varepsilon(s)$ を満足する (2_ε) の解 $u_\varepsilon(t; s)$ に関して次のことが成立する.

(22) $0 \leqq s \leqq t \leqq T$ で一様に $u_\varepsilon(t; s) \to u_0(t)$,

(23) $0 \leqq s < t \leqq T$ で広義一様に $A_\varepsilon(t) u_\varepsilon(t; s) \to A_0(t) u(t)$.

証明の概略 $\tilde{A}_\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1} A_\varepsilon(t)$ とおくと定理 1 の仮定が N を $\varepsilon^{1-\rho} N$ でおきかえて, θ_0, M, ρ はそのままで満たされる. 従って

(24) $$du(t) + \tilde{A}_\varepsilon(t) u(t) = 0$$

の基本解

(25) $$\tilde{U}_\varepsilon(t, s) = \exp(-(t-s)\tilde{A}_\varepsilon(t)) + \tilde{W}_\varepsilon(t, s)$$

が構成される.

(26) $$\|\tilde{W}_\varepsilon(t, s)\| \leqq C \varepsilon^{1-\rho} (t-s)^\rho,$$

(27) $$\|\tilde{A}_\varepsilon(t) \tilde{W}_\varepsilon(t, s)\| \leqq C \varepsilon^{1-\rho} (t-s)^\rho$$

は容易にわかる. $u_\varepsilon(t; s)$ はこの基本解を使って

(28) $$u_\varepsilon(t; s) = \tilde{U}_\varepsilon(t, s) u_\varepsilon(s) + \varepsilon^{-1} \int_s^t \tilde{U}_\varepsilon(t, \sigma) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma$$

と表わされる. (27)と

$$\varepsilon^{-1} \int_s^t \tilde{W}_\varepsilon(t, \sigma) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma = A_\varepsilon(t)^{-1} \int_s^t \tilde{A}_\varepsilon(t) \tilde{W}_\varepsilon(t, \sigma) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma$$

とによって $0 \leqq s \leqq t \leqq T$ で一様に

$$\tilde{W}_\varepsilon(t, s) u_\varepsilon(s) + \varepsilon^{-1} \int_s^t \tilde{W}_\varepsilon(t, \sigma) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma \to 0$$

であることは容易にわかる. 次に

$$\exp(-(t-s)\tilde{A}_\varepsilon(t)) u_\varepsilon(t) + \varepsilon^{-1} \int_s^t \exp(-(t-\sigma)\tilde{A}_\varepsilon(t)) f_\varepsilon(\sigma) d\sigma$$

$$= A_\varepsilon(t)^{-1} f_\varepsilon(t) + \exp(-(t-s)\tilde{A}_\varepsilon(t)) (u_\varepsilon(s) - A_\varepsilon(t)^{-1} f_\varepsilon(t))$$

$$+\ \varepsilon^{-1}\int_s^t \exp(-(t-\sigma)\widetilde{A}_\varepsilon(t))(f_\varepsilon(\sigma)-f_\varepsilon(t))\,d\sigma$$

と分解してみれば左辺が $0\leqq s\leqq t\leqq T$ で一様に $A_0(t)^{-1}f_0(t)$ に収束することは容易にわかる.

§3. 例

前の二つの節で述べたことが成立する一つの例を考える. $-\infty<a<0<T<b<\infty$ として $X=L^2(a,b)$ とする. $L^2(a,b)$ の中で境界條件 $u(a)=u(b)=0$ を満足する関数のあるクラスで定義された微分作用素

(29) $$(A_\varepsilon(t)u)(x) = -\varepsilon\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\varepsilon}{x-t}\frac{du}{dx} + \frac{u}{(x-t)^2}$$

を考える. $A_\varepsilon(t)$ の厳密な定義の一つは

(30) $$V(t)=\left\{u\in L^2(a,b):\ \frac{du}{dx},\ \frac{u}{x-t}\in L^2(a,b),\ u(a)=u(b)=0\right\}$$

として $V(t)\times V(t)$ で定義された双一次型式

(31) $$a_\varepsilon(t;u,v)=\int_a^b\left\{\varepsilon\frac{du}{dx}\overline{\frac{dv}{dx}}+\varepsilon\frac{du}{dx}\frac{\overline{v}}{x-t}+\frac{u\overline{v}}{(x-t)^2}\right\}dx$$

によって

(32) すべての $v\in V(t)$ に対して $a_\varepsilon(t;u,v)=(f,v)$ であるとき
$u\in D(A_\varepsilon(t))$ かつ $A_\varepsilon(t)u=f$

と定義されるが他方 $A_\varepsilon(t)u=f$ の解を具体的に表わすことも出来る([5]). この $A_\varepsilon(t)$ に対して定理1の仮定が ε に関して一様に $\rho=1/2$ として満たされる([5]). その際 [3] の 245 頁にある不等式 (9.9.8), (9.9.9) と双一次型式に関する結果([1], [2]) が重要である. 次に $f\in C_0^\infty(a,b)$ であれ

ば $A_\varepsilon(t)^{-1}f$ の具体的な表現の式の積分で部分積分を行なって一様に

(33) $\qquad A_\varepsilon(t)^{-1}f \longrightarrow A_0(t)^{-1}f, \quad dA_\varepsilon(t)^{-1}f/dt \rightarrow dA_0(t)^{-1}f/dt$

であることがわかるが $C_0^\infty(a,b)$ が $L^2(a,b)$ で稠密であることを用いれば

(33)は任意の $f \in L^2(a,b)$ に対しても成立することがわかる、最後に定理

2の (a)については $f \in L^2(a,b)$ に対して

$$f_n(t) = (I + n^{-1}A_0(t))^{-1}f$$

とおくと $n \to \infty$ のとき $0 \leqq t \leqq T$ で一様に $f_n(t) \to f$ であることに注意すれば容易に確かめられる.

§4. 加藤教授の結果

加藤敏夫先生は12月3日の Washington, D.C. での会合で次の結果を発表された、

定理4、$\varepsilon > 0$ のとき (I_ε) の基本解が存在して

$$\| U_\varepsilon(t,s) \| \leqq M < \infty, \qquad 0 \leqq s \leqq t \leqq T, \quad \varepsilon > 0.$$

$u_0(t)$ は初期条件 $u_0(0) = \phi_0$ を満足する

$$du_0(t)/dt + A_0(t)u_0(t) = f_0(t)$$

の解で $A_0(t)u_0(t)$ は t について $[0,T]$ で連続微分可能, $A_\varepsilon(t)^{-1}$, $dA_\varepsilon(t)^{-1}/dt$ は一様有界で $\varepsilon \to 0$ のとき強位相で

$$A_\varepsilon(t)^{-1} \longrightarrow A_0(t)^{-1}, \quad dA_\varepsilon(t)^{-1}/dt \longrightarrow dA_0(t)^{-1}/dt$$

また $f_\varepsilon(t)$ も一様有界で $\varepsilon \to 0$ のとき

$$f_\varepsilon(t) \longrightarrow f_0(t), \quad \phi_\varepsilon \longrightarrow \phi_0$$

とすると初期条件 $u_\varepsilon(0) = \phi_\varepsilon$ を満足する (I_ε) の解 $u_\varepsilon(t)$ は t に関して一様に $u_0(t)$ に収束する.

注意、この定理で (1_0) の可解性は仮定されていない。又方程式系 (1_ε) は双曲型，放物型等の制限はない。

証明の概略　$v_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t)^{-1} A_0(t) u_0(t)$ とおくと

$$d v_\varepsilon(t)/dt + A_\varepsilon(t) v_\varepsilon(t) = f_\varepsilon(t) + g_\varepsilon(t)$$

但し $g_\varepsilon(t) = (d/dt)\{(A_\varepsilon(t)^{-1} - A_0(t)^{-1}) A_0(t) u_0(t)\}$.

$g_\varepsilon(t)$ は一様有界で $g_\varepsilon(t) \to 0$, 又 $v_\varepsilon(0) = A_\varepsilon(0)^{-1} A_0(0)\phi_0 \to \phi_0$ から一様に $v_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(t) \to 0$. 他方 $A_\varepsilon(t)^{-1} \to A_0(t)^{-1}$ により $v_\varepsilon(t) \to u_0(t)$. 従って $u_\varepsilon(t) \rightrightarrows u_0(t)$ (終)

この定理の要点は $A_0(t)u_0(t)$ が微分可能という仮定にある。(1_0) が可解であることは仮定しないが，もしその基本解 $U_0(t,s)$ が存在し，さらに $U_0(t,s)\phi$ が t について $s \leqq t \leqq T$ で二回連続微分可能である様な ϕ が稠密に存在すれば上の結果を用いて $U_\varepsilon(t,s) \to U_0(t,s)$ が得られる。

注意. 上の定理で $A_0(t)u_0(t)$ が微分可能としたが実は $A_0(t)u_0(t)$ 及びその超関数微分が $[0,T]$ で絶対可積ならば十分である。

[1] T. Kato: Fractional powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan, 13 (1961), 246–274.

[2] T. Kato: A generalization of the Heinz inequality, Proc. Japan Acad. 37 (1961), 305–308.

[3] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya: Inequalities, Cambridge University Press, 1959.

[4] M. Nagumo: Perturbation and degeneration of evolutional equations in Banach space, Osaka Math. J., **15** (1963), 1-10.

[5] H. Tanabe: Note on singular perturbation for abstract differential equations, Osaka J. Math. **1** (1964), 239-252.