

## 加速行列を用いる無反射法

東大 工 森 口 繁 一

### まえがき

楕円型の偏微分方程式の数値解法としてよく使われるものに「逐次加速緩和法 (SOR)」がある。これは Liebmann 式緩和法を加速係数  $\omega$  で加速するものである。ここで、いくつかの点での値をまとめてベクトルと考え、 $\omega$  の代りに行列  $\Omega$  を用いて加速するものとすれば新しい一つの手法が生まれる。しかもその加速行列  $\Omega$  が一定のものでなく、場所によって変わってもよいことにすれば、自由度はきわめて高くなる。その自由度を利用して、有限区で完全な解に収束するようにできる。

こういう方法に到達した考察の経緯と、いくつかの数値例を示すのが本稿の趣意である。

## I コブと反射

### 1. 加速 Liebmann 緩和法

2次元のラプラス微分方程式

$$\Delta u = 0 \quad (1.1)$$

を、差分方程式

$$u_{ij} = c(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) \quad (1.2)$$

で近似する。ここに

$$c = 1/4 \quad (1.3)$$

である。境界上では  $u$  の値が与えられているものとし、内部の点では、まず適当な本発値を与えておいてから、各点でまわりの値を (1.2) に用いて

$$u'_{ij} = c(u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) \quad (1.4)$$

を求め、これを  $u_{ij}$  の新しい値とする。これが Richardson 緩和法である。

これに対し、たとえば左下の隅から次第に右上の方へ緩和を進めてゆくものとして、 $u_{ij}$  のところへ来たときにはすでに  $u_{i-1,j}$  と  $u_{i,j-1}$  とは新しい値  $u'_{i-1,j}$  と  $u'_{i,j-1}$  が定まっているわけだから、それを使うことにすると、

$$u'_{ij} = c(u'_{i-1,j} + u'_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) \quad (1.5)$$

という Liebmann 緩和法になる。

加速 Liebmann 法では、 $u_{ij}$  の新しい値として (1.5) の右辺をただちに採用しないで、「残差」

$$e_{ij} = c(u'_{i-1,j} + u'_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) - u_{ij} \quad (1.6)$$

を  $\omega$  倍した  $\omega e_{ij}$  を修正量として採用する。すなわち

$$\begin{aligned} u'_{ij} &= u_{ij} + \omega e_{ij} \\ &= (1-\omega)u_{ij} + c\omega(u'_{i-1,j} + u'_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}) \end{aligned} \quad (1.7)$$

を  $u_{ij}$  の新しい値として採用する。この係数  $\omega$  — 「加速係数」 — を領域に応じてうまく選ぶことによって収束の速さが格段に改良されることが知られている。

## 2. 修正量のグラフとそのコブ

正方形を  $6 \times 6$  に等分して加速 Liebmann 法で計算した例について、修正量の絶対値の和

$$\text{NORM} = \omega \sum |e_{ij}| \quad (2.1)$$

が反復回数  $C$  の進むにつれてどのように推移したかを図1, 図2に示す (文献[1]の170ページより)。

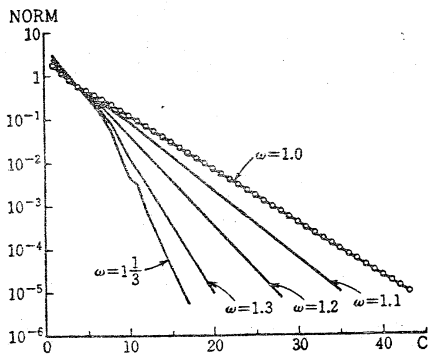


図1.

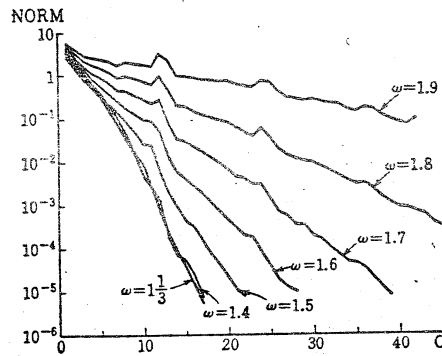


図2.

この図で、右下りの傾斜が収束の速さを表わしているわけで、それは Young [3] の理論とよく合っている。そして、この場合の最適の  $\omega$  が

$$\omega_{opt} = 4/3 \quad (2.2)$$

であることも確認できているし、 $\omega < \omega_{opt}$  のときグラフが滑らかで、 $\omega > \omega_{opt}$  のときグラフがギクシャクとしている点も、後の場合に差分方程式の固有値入がすべて複素根であることから一応は納得できることではある。

しかし筆者は、図2に見られる特殊なコブがたいそう気になった。 $C = 12, 24, 36$  のあたりで、修正量がグッと大きくなる傾向が、図2のすべてのグラフに見られるのである。

同様のコブが、他の報告(たとえば清野[4])にも見られ、しかもその周期はだいたい正方形の分割数の2倍と一致するようである。

荏高[2]はこの現象をさらにいろいろと実験しながら考察した。その結果わかったことは、

- (1)  $\omega > \omega_{opt}$  のとき、(1.7) による反復の様子は波動拡散方程式で近似でき、右下りの45°の波の線が、1段ごとに右下へ向かって移動すること、
  - (2) コブのところでは、ほとんどすべての点で修正量が同じ符号をもつこと、
- などであった。

### 3. 1次元の模型

そこで筆者は、この現象の本質を備えた最も簡単な模型を考えた。それは1次元のラプラス方程式

$$u'' = 0 \quad (3.1)$$

の差分近似

$$u_i = (u_{i-1} + u_{i+1})/2 \quad (3.2)$$

の場合である。このとき、加速Liebmann法の公式は

$$u'_i = (1-\omega)u_i + \omega(u'_{i-1} + u'_{i+1})/2 \quad (3.3)$$

となる。

ここで、 $\omega = 2$  ととると、

$$u'_i = -u_i + (u'_{i-1} + u'_{i+1}) \quad (3.4)$$

となる。

いま線分を5等分し、 $i=1, 2, \dots, 5$  の5点を内点としたものとし、境

界条件  $u_0 = u_6 = 0$  の下で、初期値

$$u_i = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, 5) \quad (3.5)$$

から出発して (3.4) を用いると、表 1 のような経過をたどることになる。

第 7 回以後は第 1 回～第 6 回と同じ

ことの繰返しである。明らかに過程は収束しない。そして周期 6 で修正量のコブが出る。

コブの原因は、左へ伝わってきた波が左端で「反射」することにある。その反射の結果が右のほうへ伝わるのはきわめて速い。1 段で右端まで行って

表 1.

回	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$
1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	-1
3	0	0	0	-1	0
4	0	0	-1	0	0
5	0	-1	0	0	0
6	-1	0	0	0	0
7	1	1	1	1	1
8	0	0	0	0	-1

しまう。そのときコブが出るのである (第 7 回)。その次にそれがまた 1 段でサッと消えてゆく。すっかり消えるかと思ったら、今度は右端で反射が起って、衝撃波が一発発生する。それが 1 段に 1 きざみずつ左へ伝わってゆく。それが左端に達したらまたコブが出る。

こういうふうにして、修正量のグラフにコブができる事情がだいぶ明らかになった。

## II 1次元の場合の対策

### 4. 無反射方式

表 1 をながめてまず思いつくことは、左端 (あるいは右端) での反射を

なくしたらどうかということである。端では $\omega=1$ ととって修正の行き過ぎを防ごうというわけである。そういう考えで、このような数値実験を繰り返しているうちに、次のような考えが出てきた。

まず(3.3)式で、 $\omega$ が点によってちがっていてもよいとすれば

$$u'_i = (1-\omega_i)u_i + \omega_i(u_{i-1} + u_{i+1})/2 \quad (4.1)$$

となる。  $i=1$  に対しては  $u_{i-1} = u_0$  はつねに0と考えているから

$$u'_1 = (1-\omega_1)u_1 + \omega_1 u_2/2 \quad (4.2)$$

となる。それで

$$\omega_1 = 1 \quad (4.3)$$

とすれば、

$$u'_1 = u_2/2 \quad (4.4)$$

が成り立つ。すなわち  $\omega_1 > 1$  のときに見られるような修正の行き過ぎはなくなって、右隣りの影響が—半分になって—伝わってくるだけ、ということになる。

つぎに、 $i=2$  に対する(4.1)に(4.4)を代入すると

$$u'_2 = (1-\omega_2)u_2 + \frac{\omega_2}{2} \frac{u_2}{2} + \frac{\omega_2}{2} u_3 \quad (4.5)$$

となる。そこで

$$1-\omega_2 + \frac{\omega_2}{2} \frac{1}{2} = 0 \quad (4.6)$$

を満足するように  $\omega_2$  を定めると、(4.5)は

$$u'_2 = \frac{\omega_2}{2} u_3 \quad (4.7)$$

となって、「無反射」が実現する。

一般にある  $i$  に対して

$$u'_{i-1} = \frac{\omega_i - 1}{2} u_i \quad (4.8)$$

が成り立っているものとするればこれを(4.1)に代入して

$$u'_i = (1 - \omega_i) u_i + \frac{\omega_i}{2} \frac{\omega_i - 1}{2} u_i + \frac{\omega_i}{2} u_{i+1} \quad (4.9)$$

を導くことができるから、 $\omega_i$ を

$$1 - \omega_i + \frac{\omega_i}{2} \frac{\omega_i - 1}{2} = 0 \quad (4.10)$$

を満足するように定めることにより

$$u'_i = \frac{\omega_i}{2} u_{i+1} \quad (4.11)$$

が得られ、「無反射」が実現することになる。これは点がいくつ並んでいても同じである。

## 5. 加速係数の値

初期条件

$$\omega_1 = 1 \quad (5.1)$$

表2.

$i$	$\omega_i$
1	1
2	$4/3 = 1.333$
3	$3/2 = 1.500$
4	$8/5 = 1.600$
5	$5/3 = 1.667$
6	$12/7 = 1.714$
7	$7/4 = 1.750$
8	$16/9 = 1.778$
9	$9/5 = 1.800$
10	$20/11 = 1.818$

から出発し、漸化式(4.10)、すなわち

$$\omega_i = \frac{1}{1 - \frac{\omega_{i-1}}{4}} \quad (5.2)$$

によって $\omega_2, \omega_3, \dots$ を作り出してみると、

表2のような値が得られる。

この表で見ると、 $\omega_i$ は一定の極限值に近

づくらしい。その極限值を $\omega$ とすると、

$$\omega = \frac{1}{1 - \frac{\omega}{4}} \quad (5.3)$$

が成り立つべきだから、

$$\omega = 2 \quad (5.4)$$

でなければならない。

6. 幅を2等分した帯板の場合

2次元の問題でも、図3のような場合には1次元のときと同じに扱える。ただしこんどは差分方程式は

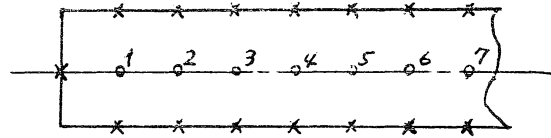


図3.

$$u_i = c(u_{i-1} + u_{i+1}) \tag{6.1}$$

で、 $c = 1/4$ である。したがって(5.2)の代わりに

$$\omega_i = \frac{1}{1 - \omega_{i-1}/16} \tag{6.2}$$

表3.

$i$	$\omega_i$
1	1
2	$16/15 = 1.06667$
3	$15/14 = 1.07143$
4	$224/209 = 1.07177$
5	$209/195 = 1.07179$
6	$3120/2911 = 1.07180$

を使うことになり、数値は表3のようになる。

こんども $\omega_i$ は一定の値 $\omega$ に近づき、

その $\omega$ は

$$\omega = \frac{1}{1 - \omega/16} \tag{6.3}$$

の根として

$$\omega = 4(2 - \sqrt{3}) = 1.0717968 \tag{6.4}$$

と定まる。

一例として、

	1	1	1	1	1
0	.5	.5	.5	.5	.5
	0	0	0	0	0

のような境界値ならびに初期値の下で表3の $\omega_i$ を用いた無

表4.

回	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$u_4$	$u_5$
0	.5	.5	.5	.5	.5
1	.37500	.46667	.49107	.49761	.36539
2	.36667	.46429	.49043	.46154	.36538
3	.36607	.46411	.48077	.46154	.36538
4	.36603	.46154	.48077	.46154	.36538
5	.36538	.46154	.48077	.46154	.36538



反射方式」で計算してみると、表4のような結果になる。

5回の後に最終解に達したわけである。一般に上の方式によれば $N$ 点の問題では $N$ 回の反復で真の解に達するはずである。

### III ベクトルの場合

#### 7. 一般式

上の考えを、ベクトル $u_i$ に関する差分方程式

$$u_i = B_i u_{i-1} + C_i u_{i+1} \quad (7.1)$$

に拡張することはやさしい。——拡張しようと思いつきさえすれば……

すなわち、残差

$$e_i = (B_i u_{i-1} + C_i u_{i+1}) - u_i \quad (7.2)$$

に「加速行列」 $\Omega_i$ を掛けて修正量 $\Omega_i e_i$ を求め、

$$u'_i = u_i + \Omega_i e_i \quad (7.3)$$

を $u_i$ の新しい値とするのである。

そうすると、

$$u'_i = (I - \Omega_i) u_i + \Omega_i (B_i u_{i-1} + C_i u_{i+1}) \quad (7.4)$$

となるが、ここで、もしも

$$u'_{i-1} = \Omega_{i-1} C_{i-1} u_i \quad (7.5)$$

が成り立っていたとすれば、 $\Omega_i$ を

$$I - \Omega_i + \Omega_i B_i \Omega_{i-1} C_{i-1} = 0 \quad (7.6)$$

が成り立つように、すなわち

$$\Omega_i = (I - B_i \Omega_{i-1} C_{i-1})^{-1} \quad (7.7)$$

と定めることによつて

$$u_i' = \Omega_i C_i u_{i+1} \quad (7.8)$$

が成り立つようになる。

$i=1$  に対しては  $u_{i-1}$  の項が欠けているので、

$$\Omega_1 = I \quad (7.9)$$

ととりさへすれば  $u_1' = C_1 u_2$  が成り立ち、あとは漸化式(7.7)で  $\Omega_2, \Omega_3, \dots$  を定めてゆけばよい。

### 8. 9点の例

正方形を  $4 \times 4$  に等分した場合、9個の内点に  
図4のような番号を付けたとして、

$$u_1 = [u_1], \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix},$$

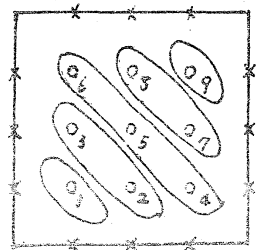


図 4.

$$u_4 = \begin{bmatrix} u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}, \quad u_5 = [u_9] \quad (8.1)$$

という5個のベクトルを作ると、差分方程式(1.2)は次のように表現できる:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= c[1 \ 1]u_2, \\ u_2 &= c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 + c \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u_3 \\ u_3 &= c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_2 + c \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_4 \\ u_4 &= c \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} u_3 + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_5 \\ u_5 &= c[1 \ 1]u_4 \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} B_2 = C'_1 = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_3 = C'_2 = c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_4 = C'_3 = c \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_5 = C'_4 = c [1 \ 1] \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

である。ここに  $c = 1/4$  である。

それで、(7.9)から始めて、(7.7)で順々に $\Omega_i$ を定めると、次のようになる。

$$\Omega_1 = [1], \quad (8.4)$$

$$\Omega_2^{-1} = I - \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1] [1 \ 1] = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 15 & -1 \\ -1 & 15 \end{bmatrix},$$

$$\therefore \Omega_2 = \frac{16}{15^2 - 1} \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}, \quad (8.5)$$

$$\Omega_3^{-1} = I - \frac{1}{14 \times 16} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{224} \begin{bmatrix} 209 & -16 & -1 \\ -16 & 192 & -16 \\ -1 & -16 & 209 \end{bmatrix},$$

$$\therefore \Omega_3 = \frac{1}{36960} \begin{bmatrix} 39872 & 3360 & 448 \\ 3360 & 43680 & 3360 \\ 448 & 3360 & 39872 \end{bmatrix} = \frac{1}{165} \begin{bmatrix} 178 & 15 & 2 \\ 15 & 195 & 15 \\ 2 & 15 & 178 \end{bmatrix} \quad (8.6)$$

$$\Omega_4^{-1} = \frac{1}{2640} \begin{bmatrix} 2237 & -227 \\ -227 & 2237 \end{bmatrix}, \quad \therefore \Omega_4 = \frac{1}{1876} \begin{bmatrix} 2237 & 227 \\ 227 & 2237 \end{bmatrix}, \quad (8.7)$$

$$\Omega_5^{-1} = \frac{56}{67}, \quad \therefore \Omega_5 = \frac{67}{56}. \quad (8.8)$$

数値を小数にすると、

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= [1], \quad \Omega_2 = \begin{bmatrix} 1.07143 & .07143 \\ .07143 & 1.07143 \end{bmatrix}, \\ \Omega_3 &= \begin{bmatrix} 1.07879 & .09091 & .01212 \\ -.09091 & 1.18182 & .09091 \\ .01212 & .09091 & 1.07879 \end{bmatrix}, \\ \Omega_4 &= \begin{bmatrix} 1.19243 & .12100 \\ .12100 & 1.19243 \end{bmatrix}, \quad \Omega_5 = [1.19643] \end{aligned} \right\} \quad (8.9)$$

が得られる。

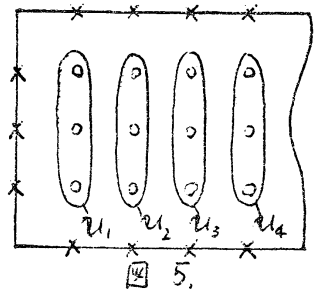
この場合、5回の反復で真の解に到達するはずである。しかも1回目に

$u_5$  が, 2 回目に  $u_4$  が, ..., 5 回目に  $u_1$  が, それぞれ真の値になるはずである。

### 9. 半 Liebmann

たとえば帯板の問題で, 図5のようにベクトル  $u_i$  を定義すると, 差分方程式 (1.2) は

$$u_i = \begin{bmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{bmatrix} u_i + \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} u_{i-1} + \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} u_{i+1} \quad (9.1)$$



と書けることになる。

一般に,

$$u_i = A_i u_i + B_i u_{i-1} + C_i u_{i+1} \quad (9.2)$$

の形の差分方程式に対して

$$u_i' = A_i u_i + B_i u_{i-1}' + C_i u_{i+1}' \quad (9.3)$$

という形の反復を考えると, これは「半分だけ Liebmann 型になっている」といえよう。これにただいまの加速を行なうと,

$$u_i' = (I - \Omega_i + \Omega_i A_i) u_i + \Omega_i B_i u_{i-1}' + \Omega_i C_i u_{i+1}' \quad (9.4)$$

ということになる。それで,

$$\Omega_i = (I - A_i)^{-1} \quad (9.5)$$

から出発して,

$$\Omega_i = (I - A_i - B_i \Omega_{i-1} C_{i-1})^{-1} \quad (9.6)$$

を順々に  $\Omega_2, \Omega_3, \dots$  を定めてゆけば, つねに

$$u_i' = \Omega_i C_i u_{i+1}' \quad (9.7)$$

が成り立って「無反射方式」が実現することになる。

#### 10. 2列の例

帯板の幅を3等分した2列の内点のある場合,

$$A_i = A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_i = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_i = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10.1)$$

だから, (9.5), (9.6) で作り出される  $\Omega_i$  は次のようになる。

$$\Omega_1^{-1} = I - A = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \therefore \Omega_1 = \frac{4}{15} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.06667 & .26667 \\ .26667 & 1.06667 \end{bmatrix}.$$

$$\Omega_2^{-1} = I - A - \Omega_1/16 = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ -4 & 14 \end{bmatrix}, \quad \therefore \Omega_2 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.16667 & .33333 \\ .33333 & 1.16667 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_3^{-1} = I - A - \Omega_2/16 = \frac{1}{96} \begin{bmatrix} 89 & -26 \\ -26 & 89 \end{bmatrix}, \quad \therefore \Omega_3 = \frac{32}{2415} \begin{bmatrix} 89 & 26 \\ 26 & 89 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.17930 & .34451 \\ .34451 & 1.17930 \end{bmatrix}$$

この  $\Omega_i$  の系列が, もし

$$\Omega = \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \quad (10.2)$$

に収束するとすれば,

$$\Omega^{-1} = I - A - \Omega/16 \quad (10.3)$$

すなわち

$$I = \Omega - A\Omega - \Omega^2/16 \quad (10.4)$$

が成り立たねばならないから,

$$\left. \begin{aligned} 1 &= x - y/4 - (x^2 + y^2)/16, \\ 0 &= y - x/4 - 2xy/16. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

これを解いて

$$\left. \begin{aligned} x+y &= 2(3-\sqrt{5}) = 1.52786, \\ x-y &= 2(5-\sqrt{21}) = 0.83485 \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

が得られ、したがって

$$\left. \begin{aligned} x &= 1.18135, \\ y &= 0.34651 \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

となる。

上の  $\Omega_3$  がもうかなりこの  $\Omega$  に近いのはおもしろいことである。

いま

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & .66667 & .66667 & .66667 & 0 \\ 0 & .33333 & .33333 & .33333 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

のような境界値と初期値で、上の  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  を用いて計算を進めると、各回での残差  $e_i$  と新しい値  $u_i$  は次のようになる。

$$\begin{array}{l} \text{第1回 } e_i: \begin{array}{|ccc|} \hline -.16667 & -.05000 & -.18403 \\ -.08333 & -.03333 & -.09722 \\ \hline \end{array} \quad u_i: \begin{array}{|ccc|} \hline .46667 & .59722 & .41615 \\ .20000 & .27778 & .15528 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{第2回 } e_i: \begin{array}{|ccc|} \hline -.01736 & -.06263 & 0 \\ -.01389 & -.04452 & 0 \\ \hline \end{array} \quad u_i: \begin{array}{|ccc|} \hline .44444 & .50932 & .41615 \\ .18056 & .20497 & .15528 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{第3回 } e_i: \begin{array}{|ccc|} \hline -.02197 & 0 & 0 \\ -.01821 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad u_i: \begin{array}{|ccc|} \hline .41615 & .50932 & .41615 \\ .15528 & .20497 & .15528 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

## 11. 菱形求心

ベクトルの定義のしかたは、いろいろおもしろいものがある。

たとえば図6のように菱形に並んだ点列での値を一まとめにして一つの

ベクトルとし、外から内に向かって緩和を進めるなどというやり方もなかなかよいところがあるのではなからうか。

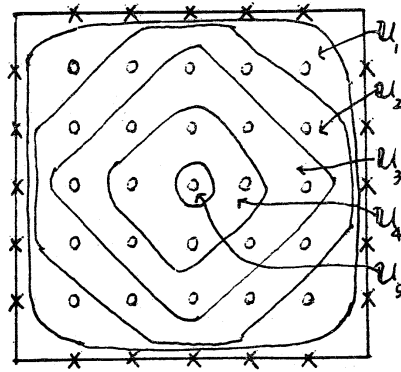


図 6.

#### IV 直接法

##### 12. 直接法との関係

たとえば

$$\Delta u + \rho = 0 \quad (12.1)$$

の形の Poisson 微分方程式を差分近似して

$$u_i = B_i u_{i-1} + C_i u_{i+1} + P_i, \quad (12.2)$$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

$$u_0 = u_{n+1} = 0$$

としたとする。 (12.3)

この第1式に  $B_2$  を左から掛けて第2式に加えると

$$u_2 = B_2 C_1 u_2 + C_2 u_3 + P_2 + B_2 P_1 \quad (12.4)$$

となる。そこで、

$$\Omega_1 = I_1 \text{ (単位行列)}, \quad (12.5)$$

$$\Omega_2^{-1} = I_2 - B_2 \Omega_1 C_1 \quad (12.6)$$

とすると、(12.4) は

$$u_2 = \Omega_2 C_2 u_3 + \Omega_2 (P_2 + B_2 P_1) \quad (12.7)$$

と書きなおせる。それで

$$\sigma_1 = P_1, \quad (12.8)$$

$$\sigma_2 = \Omega_2 (P_2 + B_2 \sigma_1) \quad (12.9)$$

と置いて、

$$u_2 = \Omega_2 C_2 u_3 + \sigma_2 \quad (12.10)$$

を得る。

以下同様に進んで、一般に

$$u_{i-1} = \Omega_{i-1} C_{i-1} u_i + \sigma_{i-1} \quad (12.11)$$

が得られているとして、これに  $B_i$  を左から掛けて (12.2) に加えると、

$$u_i = B_i \Omega_{i-1} C_{i-1} u_i + C_i u_{i+1} + P_i + B_i \sigma_{i-1} \quad (12.12)$$

となる。そこで

$$\Omega_i^{-1} = I_i - B_i \Omega_{i-1} C_{i-1}, \quad (12.13)$$

$$\sigma_i = \Omega_i (P_i + B_i \sigma_{i-1}) \quad (12.14)$$

とすると、(12.12)は

$$u_i = \Omega_i C_i u_{i+1} + \sigma_i \quad (12.15)$$

と書きなおせて、(12.11)と同じ形になる

このようにして  $i=n$  まで進むと、(12.15)に相当する式は

$$u_n = \sigma_n \quad (12.16)$$

になる。



ここから「逆行」に移り、(12.16)を  $i=n-1$  に対する(12.15)に代入し、そうしてきまる  $v_{n-1}$  を、こんどは  $i=n-2$  に対する(12.15)に代入し、……というやり方ですべての  $v_i$  が定められる。

これが直接法の要領であり\*、三項方程式の解法として知られている方法の、ベクトルの場合への自然な拡張である。

以上の過程をわれわれの立場から解釈すると、「順行部分」はまさしくわれわれの「逐次緩和和」(ただし初期値を0としたもの)であり、その結果得られる値が  $v_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) である。それで、前節まではこの過程を反復して、 $n$  回で真の解に達する方法を述べたのであるが、ここの解釈によれば、「逆行」の緩和をやることによって、1往復するだけで真の解に達するはずであることに気がつく。

### 13. 往復法の例

往復法の手続は次のとおり：

- (1) 初期値はすべて0とする。
- (2) 順行部分は一節までに述べたものと同じで、まず残差

$$e_i = B_i v_{i-1} + p_i \quad (13.1)$$

を述べ、これに「加速行列」  $\Omega_i$  をかけて修正量を出し、

$$v_i = \Omega_i e_i \quad (13.2)$$

を  $v_i$  の新しい値とする ( $i=1, 2, \dots, n$ )。

\* 新谷尚義[数理解析研究所講究録17(1966), pp. 53-77]も、このものは少しちがうが、一つの直接法を(方形の場合に)提案している。

(3) 逆行部分では, まず

$$u_n'' = u_n' \tag{13.3}$$

から始めて,

$$u_i'' = u_i' + \Omega_i C_i u_{i+1}'' \quad (i = n-1, \dots, 1) \tag{13.4}$$

で順々に新しい値を定めてゆく. こうして定まる値  $u_i''$  は真の解である. —

Poisson 形でなくて Laplace 形の方程式の境界値問題のときも, われわれの立場からは上と全く同じ話になる.

数値例として次のような9点の例をかかげる(初期値は(1)に従って0とする).

	1	1	1	
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
	0	0	0	

	1	1	1	
0	(.25)	(.32311)	(.35821)	0
0	.26970	.38607	.42857	0
0	0	(0)	(.00644)	0
		.02273	.04678	
0	0	0	(0)	0
			.00303	
	0	0	0	

[順行部分]

	.13170	(.10714)	—
	.42858	.52680	.42857
	(.16964)	(.17858)	(.10914)
	.18750	.25000	.18751
	(.07143)	(.08036)	(.04688)
	.07143	.09822	.07143

[逆行部分]

加速行列  $\Omega_i$  としては  $\delta$  のものをそのまま用いる.

#### 14. 対称往復法

左下の隅から始めて右上の隅に至り、そこから逆行して左下の隅で終るというやり方は必ずしも必要ではない。むしろ左下の隅と右上の隅とからそれぞれ出発して「順行積分」を行ない、両方の波がぶつかったところで「逆行」に移るのがよいかもしれない。上の9点の例でいうと、

$$\Omega_1 = [1], \quad \Omega_2 = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \quad (14.1)$$

は前と同じものをそれぞれ用いればよく、波がぶつかったところで

$$\begin{aligned} \Omega_3^{-1} &= I - \frac{2 \times \frac{1}{16}}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Omega_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{16 \times 7} \begin{bmatrix} 97 & -16 & -17 \\ -16 & 80 & -16 \\ -1 & -16 & 97 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (14.2)$$

$$\therefore \Omega_3 = \frac{1}{56} \begin{bmatrix} 67 & 14 & 3 \\ 14 & 84 & 14 \\ 3 & 14 & 67 \end{bmatrix} \quad (14.3)$$

として求めた  $\Omega_3$  を用いる。

前節と同じ例をこの方法で扱くと次のようになる:

	1	1	1	
0	(.33482)	(.3125)	(.25)	0
	.42856	.33928	.25	
0	0	(.10714)	(.0625)	0
		.4999	.08928	
0	0	0	(.02232)	0
			.07142	
0	0	0	0	0

[順行積分]

	(.16963)	(.17856)	
.42856	.52676	.42856	
(.16963)		(.08035)	
.18748	.24999	.18748	
(.07142)	(.08035)		
.07142	.09820	.07142	

[逆行積分]

Ⅶ 加速行列について

15. 加速行列  $\Omega_i$  の意味

§12 の前論から  $\Omega_i$  の一つの解釈を導くことができる。すなわち、(12.2) で、 $P_1 = P_2 = \dots = P_{i-1} = 0$ ,  $P_i \neq 0$  の場合を考えると、(12.14) で作り出される  $\sigma_1, \sigma_2, \dots$  は、 $\sigma_{i-1}$  まではすべて 0 であり、

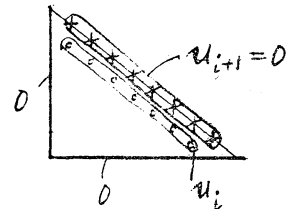
$$\sigma_i = \Omega_i P_i \quad (15.1)$$

となる。したがって (12.15) はこの場合

$$u_i = \Omega_i C_i u_{i+1} + \Omega_i P_i \quad (15.2)$$

となる。そこで図のようにかりに  $u_{i+1} = 0$  が条件として与えられたものと考え、他の境界値も 0 となった「三角形」の領域で、 $u_i$  の各成分に対応する  $P_i$  の各成分が「外力」として作用するときの「応答」 $u_i$  は

$$u_i = \Omega_i P_i \quad (15.3)$$

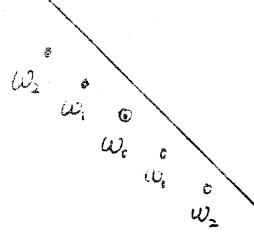


で与えられることになる。すなわち  $\Omega_i$  は、このような境界値問題に対する「Green 函数」にあたるものである。

この認識は「加速行列」 $\Omega_i$  の性質、とくに漸近的な性質に関してたいへんよい見とろしを与えてくれる。

16. 広い領域の内部の点での加速係数

境界から十分離れた内部の点で、たとえば図の④での修正量を定めるときに、自分自身のところでの残差にかける重み $w_0$ 、両隣の残差にかける重み $w_1$ 、……は点によらずにほぼ一定の値をもつと考えられる。すなわち、加速行列のその辺の部分は $i$ によらずに



$$\Omega = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & w_0 & w_1 & w_2 & \dots \\ \dots & w_1 & w_0 & w_1 & \dots \\ \dots & w_2 & w_1 & w_0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (16.1)$$

の形をしているものと想像される。このような $w_0, w_1, w_2, \dots$ の値を定めることを試みてみよう。

いま母函数

$$f(s) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} w_p s^p \quad (16.2)$$

を考える\*。ただし一般に $w_p = w_{-p}$ とする。ところで、関係式

$$\Omega^{-1} = I - B\Omega B' \quad (16.3)$$

で、行列 $B$ は、問題の部分では

$$B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (16.4)$$

の形をしているから、 $B\Omega B'$ の第 $p$ 行、第 $q$ 列の要素は、 $q-p=t$ として $\frac{1}{16}(w_{t-1} + 2w_t + w_{t+1})$ の形をしている。したがって(16.3)を

\*母函数の使用は伊理正夫君の示唆による。

$$\Omega = I + (B\Omega B')\Omega \quad (16.5)$$

と書きなおして, 要素間の関係になおすと,

$$\omega_p = \delta_{p0} + \frac{1}{16} \sum_{t=-\infty}^{\infty} (\omega_{t-1} + 2\omega_t + \omega_{t+1}) \omega_{t+p} \quad (16.6)$$

となる. ここに

$$\delta_{p0} = 1 (p=0), \quad = 0 (p \neq 0) \quad (16.7)$$

である.

(16.7)に  $s^p$  をかけて合計し, 変形すると,

$$f(s) = 1 + \frac{1}{16}(s+2+s^{-1})f(s^{-1})f(s) \quad (16.8)$$

となる. 一方,  $\omega_p = \omega_{-p}$  から  $f(s^{-1}) = f(s)$  が得られるので, 結局  $f(s)$  は

$$1 - f(s) + \frac{1}{16}(s+2+s^{-1})f(s)^2 = 0 \quad (16.9)$$

を満たすことがわかる. これを解くと

$$f(s) = \frac{4}{2 + \sqrt{2 - s - s^{-1}}} \quad (16.10)$$

が得られる. とくに  $s = e^{i\theta}$  と置くと ( $i = \sqrt{-1}$ ),

$$f(e^{i\theta}) = \frac{4}{2 + \sqrt{2 - 2 \cos \theta}} = \frac{2}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} \quad (16.11)$$

一方, (16.2)から

$$f(e^{i\theta}) = \omega_0 + 2\omega_1 \cos \theta + 2\omega_2 \cos 2\theta + \dots \quad (16.12)$$

となるので, Fourier級数の理論から

$$\omega_p = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{2 \cos p\theta}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} d\theta \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (16.13)$$

が得られる. ここで

$$\theta = \pi - 2\varphi \quad (16.14)$$

という変換を行なうと, (16.13)は

$$\omega_p = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^p \cos 2p\varphi}{1 + \cos \varphi} d\varphi \quad (16.15)$$

となる. たとえば,

$$\omega_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{1 + \cos \varphi} = \frac{4}{\pi} \tan \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{\pi} = 1.27324, \quad (16.16)$$

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{-\cos 2\varphi}{1 + \cos \varphi} d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{-2\cos^2 \varphi + 1}{1 + \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left( -2\cos \varphi + 2 - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi} \left( -2 + 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 1 \right) = 4 - \frac{12}{\pi} = 0.18028. \end{aligned} \quad (16.17)$$

一般に  $p \neq 0$  のとき

$$\begin{aligned} &\omega_{p-1} + 2\omega_p + \omega_{p+1} \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^{p-1} \cos(2p-2)\varphi + (-1)^p 2\cos 2p\varphi + (-1)^{p+1} \cos(2p+2)\varphi}{1 + \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(-1)^p \{ 2\cos 2p\varphi - 2\cos 2p\varphi \cos 2\varphi \}}{1 + \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (-1)^p \cos 2p\varphi \frac{2 - 2(2\cos^2 \varphi - 1)}{1 + \cos \varphi} d\varphi = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (-1)^p \cos 2p\varphi (-4\cos \varphi + 4) d\varphi \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (-1)^p \{ -\cos(2p-1)\varphi - \cos(2p+1)\varphi + 2\cos 2p\varphi \} d\varphi \\ &= \frac{8}{\pi} (-1)^p \left[ -\frac{\sin(2p-1)\varphi}{2p-1} - \frac{\sin(2p+1)\varphi}{2p+1} + \frac{\sin 2p\varphi}{2p} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{8}{\pi} (-1)^p \left( -\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} - \frac{(-1)^p}{2p+1} \right) \\ &= \frac{16}{(2p+1)(2p-1)\pi} \end{aligned} \quad (16.18)$$

となるので, これを漸化式として用いて, (16.16), (16.17) から

順々に

$$\omega_2 = \frac{16}{3 \times 1 \pi} - 2 \left( 4 - \frac{12}{\pi} \right) - \frac{4}{\pi} = -8 + \frac{76}{3\pi} = 0.06385,$$

$$\omega_3 = \frac{16}{5 \times 3\pi} - 2(-8 + \frac{26}{3\pi}) - (4 - \frac{12}{\pi}) = 12 - \frac{188}{5\pi} = 0.03155,$$

$$\omega_4 = \frac{16}{7 \times 5\pi} - 2(12 - \frac{188}{5\pi}) - (-8 + \frac{26}{3\pi}) = -16 + \frac{5284}{105\pi} = 0.04857,$$

$$\omega_5 = \frac{16}{9 \times 7\pi} - 2(-16 + \frac{5284}{105\pi}) - (12 - \frac{188}{5\pi}) = 20 - \frac{3956}{63\pi} = 0.21216,$$

-----

を求めてゆくことができる。

5点ぐらい先になるともう重みが1%ぐらいになってしま  
うのはおもしろいことである。

このような漸近値を知っておくことは、たとえば $100 \times 100$   
のような大きい格子上を扱うときに、 $\Omega_i$ の計算の手間および記  
憶場所を節約するのに役立つものと思われる。

### おすび

このような加速行列による無反射方式が実用計算の上でど  
んな利害得失を持つか。それはこれからよく研究してみたい  
と思っている。また加速行列 $\Omega_i$ の具体的な数値も、もっと  
大きい領域についていろいろ求めてみようと思っている。

いままでに得た部分的な結果から想像すると、加速行列の  
要素の数値は、境界から少し中にはいればほぼ一定の値にな  
ってしまうらしく、そんなところに案外な実用性の根拠があ  
りそうである。

加速係数を場所によって変えてみようという考えと、Iに



述べた1次元の無反射方式は筆者の着想であるが、Ⅱで加速係数を加速行列にしたのは伊理正夫君の提案である。この研究のそもそもの発端からの同君の数々の有益な討論に深く感謝の意を表す。

### 参考文献

- [1] 山内・森ロー一松：電子計算機のための数値計算法Ⅰ，培風館，昭40。
- [2] 荘島二郎：2次元ラプラス方程式を解く際の逐次式加速緩和法の収束について，東大工学部計数工学科卒業論文，昭40
- [3] Young, D., "Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 76 (1954), pp. 92-111.
- [4] 清野武：電子計算機によるラプラスの方程式の解法——特に加速係数の推定について——，KDC-ILレポート，NC 002, 1962/003, 京都大学電子計算機室。