数理解析研究所講究録
第38巻 1968年 29-36

差分微分方程式の解の漸近的性質について.

京大 数研　栗原光信

§1. 序

差分微分方程式

(1)　$u'(t)+[a_0+a(t)]u(t)+b_0u(t-\omega)=0$

の解のある漸近的性質について考察しよう。(1)において、a_0, b_0は定数、ωは正の定数、$a(t)$は連続な函数とする。さらに、$t\to+\infty$のとき$a(t)=o(1)$とする。この函数に関して次のような定義を導入する。

定義. 函数$a(t)$は$t_0\leqq t<+\infty$で連続、$t\to+\infty$のとき$a(t)=o(1)$であるとする。このとき、函数$a(t)$が性質(A)をもつとは、次の(i)〜(vi)を満足する函数$E(t)$, $F(t)$が存在することである。

(i) $E(t)$, $F(t)$はともに$t_0\leqq t<+\infty$で連続であり、かつ十分大きなあるt_1に対して$t_1\leqq t<+\infty$で連続微分可能で

であるとする。

(ii)　$|a(t)| \leqq F(t)$

(iii)　$t \to +\infty$ のとき　$F(t) = o(1)$ かつ $\int^{+\infty} F(t)^2 dt < +\infty$

(iv)　$t_1 \leqq t < +\infty$ において

$$-F'(t) \leqq E(t)F(t), \quad -E(t)F'(t) \leqq E(t)^2 F(t).$$

(v)　$t \to +\infty$ のとき　$E(t) = o(1)$ かつ

$$\int^{+\infty} |E'(t) - E(t)^2| \, dt < +\infty.$$

(vi)　$\int^{+\infty} |E(t) F(t)| \, dt < +\infty.$

性質(A)をもつような函数 $a(t)$ の例を以下で3つ挙げよう。

例1.　$t_0 \leqq t < +\infty$ で2階連続微分可能な函数 $a(t)$ が次の(i)～(iv)の条件をみたすならば、この $a(t)$ は性質(A)をもつ。

(i)　$t \to +\infty$ のとき　$a(t) = o(1)$.

(ii)　$t \geqq t_0$ に対して　$a(t) \neq 0$.

(iii)　$t \to +\infty$ のとき　$a'(t) = o[|a(t)|]$.

(iv)　$\int^{+\infty} a(t)^2 dt < +\infty, \quad \int^{+\infty} |a'(t)| \, dt < +\infty,$

$$\int^{+\infty} |a''(t)/a(t)| \, dt < +\infty.$$

例2. 福原氏[3]によって次の補題が導かれている。

福原の補題. $t_0 \leqq t < +\infty$ で連続, $t \to +\infty$ のとき $a(t) = o(1)$ なる正の函数 $a(t)$ について, 任意の正定数 α に対し次の性質をもつ函数 $F(t)$ が存在する。

(i) $F(t)$ は $t_0 \leqq t < +\infty$ で連続微分可能である。

(ii) $t \geqq t_0$ において $a(t) \leqq F(t)$ 。

(iii) $t \to +\infty$ のとき, $F(t) = o(1)$ かつ

$$F'(t) = O(F(t)^{1+\alpha}) .$$

ここで, もし $F(t)$ が $\int^{+\infty} F(t)^2 \, dt < +\infty$ を満足していたとすると, 上の $a(t)$ は性質(A)をもつことが示される。

例3. $t_0 \leqq t < +\infty$ で連続な函数 $a(t)$ が, $t \to +\infty$ のとき $a(t) = O(t^{-\alpha})$, $\alpha > 1/2$ を満すならば, この $a(t)$ は性質(A)をもつ。

上で定義された性質(A)を用いて方程式(1)解の漸近的性質を示す一定理を以下で導くことにする。

定理. 方程式(1)に関する特性方程式

(2) $\qquad h(s) \equiv s + a_0 + b_0 e^{-\omega s} = 0$

の根 $s=\lambda$ は最大の実部をもつ特性根であって、かつ real で simple な根であるとする。$t_0 \leqq t < +\infty$ で連続な函数 $a(t)$ が $t \to +\infty$ のとき $a(t) = o(1)$ の場合性質(A)をもつとする。このとき、方程式(1)は $t \to +\infty$ の[redacted]とき

(3) $\qquad u(t) = c[1 + o(1)] \exp\left[\lambda t - c_1 \int_{t_0}^{t} a(r)\,dr\right]$

の形の解をもつ。ただし、c と c_1 は定数であり、とくに

(4) $\qquad c_1 = (1 - b_0 \omega e^{-\lambda\omega})^{-1}$

ととれる。

この定理は Bellman R. & K. L. Cooke [1] [2] の同種の定理の拡張になっている。次の2節で上の定理の証明を与えよう。

§2. 証明(I)

方程式(1)を一つの kernel 函数を用いることによって、積分方程式に変形する。すなわち、(1)より

(5) $\qquad u'(t) + a_0 u(t) + b_0 u(t-\omega) = -a(t)u(t)$

とすると、(5)をみたす連続な解は次の形に書き表わされる。(Bellman R. & K.L. Cooke [2] 参照)

(6) $$u(t)=u(t_0)k(t-t_0)$$
$$-b_0\int_{t_0-\omega}^{t_0}u(t_1)k(t-t_1-\omega)\,dt_1-\int_{t_0}^{t}a(t_1)u(t_1)k(t-t_1)\,dt_1$$
$$(t>t_0)$$

しかも．kernel 函数 $k(t)$ について．

(i) $k(t_0)=1$，$t<t_0$ では $k(t)=0$．

(ii) $k(t)$ は $t_0\leqq t<+\infty$ で連続．

(iii) $k(t)$ は $t>t_0$ で $k'(t)+a_0k(t)+b_0k(t-\omega)=0$ をみたす。

(iv) $k(t)=c_1e^{\lambda t}+k_1(t)$，$|k_1(t)|\leqq ce^{kt}$，$k<\lambda$．

なる性質をもつことが知られている。そこで．とくに $u(t)\equiv 0$ $(t_0-\omega\leqq t\leqq t_0)$ とおき、さらに $ce^{\lambda t}$ が(5)の homogeneous な方程式の解であることに注意すれば、(6)より

(7) $$u(t)=ce^{\lambda t}-\int_{t_0}^{t}a(t_1)u(t_1)k(t-t_1)\,dt_1$$

を満足する解がまた方程式(1)の解にもなっていることがわかる。積分方程式(7)が解をもつことは逐次近似法により容易に導かれる。方程式(7)に $k(t)$ の性質(iV)の等式を代入し

(8) $$p(t)\equiv-\int_{t_0}^{t}a(t_1)u(t_1)k_1(t-t_1)\,dt_1$$

とおくと．(7)式の両辺を微分することによって．

$$w(t) = u(t) - p(t)$$

に関する微分方程式

(9) $$w'(t) = [\lambda - c_1 a(t)]\, w(t) - c_1 a(t) p(t)$$

が得られる。そこで、

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(t_1)\, dt_1, \quad \lambda(t) = \lambda - c_1 a(t)$$

とおくと、(9)式より、$u(t)$に関する積分方程式

(10) $$u(t) = c e^{s(t)} + p(t) - c_1 e^{s(t)} \int_{t_0}^{t} e^{-s(t_1)} a(t_1) p(t_1)\, dt_1$$

が導かれる。この積分方程式(10)について$u(t)$の評価を行っていくのである。

§3. 証明(II)

まず、

$$m(t) = \max_{t_0 \leqq t_1 \leqq t} |u(t_1) e^{-s(t_1)}|$$

とおくと、$k(t)$に関する性質(iv)を用いて、

(11) $$|p(t)| \leqq C\, m(t)\, e^{kt} e^{-\lambda_0 t} \times \int_{t_0}^{t} F(t_1) \exp\left[(\lambda - k) t_1 - c_1 \int_{t_0}^{t_1} a(r)\, dr\right] dt_1$$

となる。然るに $F(t)$に関する条件式(iv)を用いながら、部分積分を2回行うと、t_0を十分大きくとることによって、

$$\int_{t_0}^{t} F(t_1)\exp\left[(\lambda-k)t_1 - c_1\int_{t_0}^{t_1} a(r)dr\right]dt_1$$
$$\leqq C\,F(t)\exp\left[(\lambda-k)t - c_1\int_{t_0}^{t} a(r)dr\right]$$
$$+C\int_{t_0}^{t}\left[-E'(t_1)+E(t_1)^2+E(t_1)F(t_1)+F(t_1)^2\right]F(t_1)$$
$$\times\exp\left[(\lambda-k)t_1 - c_1\int_{t_0}^{t_1} a(r)dr\right]dt_1$$

$E(t)$, $F(t)$に関する残りの条件と $F(t)\exp[\qquad]$が増加函数であることを用いると、(11)より

$$|p(t)| \leqq C\,m(t)\,F(t)\,e^{S(t)}$$

が得られる。さらに、

$$\left|\int_{t_0}^{t} e^{-S(t_1)} a(t_1)p(t_1)\,dt_1\right| \leqq C\,m(t)\int_{t_0}^{t} F(t_1)^2 dt_1 \quad .$$

したがって、(10)式より、

$$(12) \qquad m(t) \leqq C + C\,m(t)\,F(t) + C\,m(t)\int_{t_0}^{t} F(t_1)^2 dt_1$$

が得られるが、さらにt_0を十分大きくとることによって

$$m(t) \leqq C$$

となる。再び(12)式に戻ると、

$$|u(t)| \leqq c\,[\,1 + F(t)\,]\,e^{S(t)}$$

が導かれる。これは求める式(3)に他ならない。これで定理の証明が完成した。

参考文献

[1] Bellman R. & K. L. Cooke ; Asymptotic Behavior of Solutions of Differential-difference Equations, Mem. Amer. Math. Soc. No.35, 1959.

[2] Bellman R. & K. L. Cooke ; Differential-Difference Equations, Academic Press, 1963.

[3] 福原満洲雄 ; 常微分方程式論(Ⅲ), 岩波講座・数学 1934年。