数理解析研究所講究録
第38巻 1968年 67-78



# An invariance principle in the theory of stability

東北大理　吉　沢　太　郎

最初につぎの例を考える。 $f(x)$, $g(x)$ はすべての $x$ に対して連続であるとし，二階の微分方程式

(1) $$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \qquad (\,' = \frac{d}{dt}\,)$$

においてつぎの条件が満たされているとする。

(i) $xg(x) > 0 \quad (x \neq 0)$, $g(0) = 0$,

(ii) $f(x) > 0$ $(x \neq 0)$, $f(0) \geqq 0$, $F(x) = \int_0^x f(u)du \to \pm\infty \ (x \to \pm\infty)$。

(1) と同値な連立方程式

(2) $$x' = y - F(x), \quad y' = -g(x)$$

と Liapunov function $V(x,y) = G(x) + \frac{y^2}{2}$ を考える。 ここで $G(x) = \int_0^x g(u)du$。 $V(x,y)$ は正定値で，$V(0,0) = 0$, かつ $\dot{V}(x,y) = -g(x)F(x)$。 ここで $\dot{V}(x,y)$ は (2) の解に沿っての微係数を表わす。 $\dot{V}(x,y)$ は負定値でないから，漸近安定を結

論するために Liapunov の定理を適用することはできない。しかし(1)のどの解 $x(t)$ に対して, $t\to\infty$ のとき $x(t)\to 0$, $x'(t)\to 0$ となる。

LaSalle [1] は autonomous system に対して, $\dot{V}$ の負定値性なしに漸近安定性を示す定理を得た。筆者もまたさらに一般な場合すなわち nonautonomous system

$$(3)\qquad x' = F(t,x) + G(t,x)$$

について考察した。 $F(t,x)$, $G(t,x)$ は $I\times Q$ ($I: 0\leqq t<\infty$, $Q$: open set in $R^n$) で連続で, $x(t)$ が $t_0\leqq t<\infty$ で連続かつ有界ならば,

$$(4)\qquad \int_{t_0}^{\infty} \| G(s, x(s)) \| ds < \infty$$

であると仮定し, つぎの結果を得た。

<u>定理 1</u>. $F(t,x)$ は $x$ が $Q$ の compact set に属するときすべての $t$ に対して有界であるとする。 さらに負でない連続函数 $V(t,x)\in C_0(x)$ が存在し,

$$\dot{V}(t,x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(t+h,\ x+hF(t,x)+hG(t,x)) - V(t,x)\} \leqq -W(x)$$

であると仮定する。 ここで $W(x)$ は $Q$ における閉集合 $\Omega$ に関して正定値である。 このとき (3) のどの有界な解も,

$t\to\infty$ のとき集合 $\Omega$ に近ずく。

証明については [2] を参照。 この定理から (2) のどの解も $y$ 軸に近ずくことがわかる。

最近 LaSalle [3] が無限遠点を相空間に附加することにより Liapunov の安定理論の統一的な表現を与え，定理 1 の一つの拡張をあたえた。 ここでは考察を簡単にするため彼の結果を簡単な形で述べる。

<u>定理 2.</u> $F(t,x)$ は $I\times Q$ で連続であるとして，方程式

$$(5) \qquad x' = F(t,x)$$

に対して負でない連続な函数 $V(t,x)\in C_0(x)$ が存在して，

$$\dot{V}(t,x) = \overline{\lim_{h\to 0^+}}\ \frac{1}{h}\left\{V(t+h,\ x+hF(t,x)) - V(t,x)\right\} \leqq -W(x)$$

であると仮定する。 ここで $W(x)$ は連続で $W(x)\geqq 0$ 。 $E$ を $W(x)=0,\ x\in Q$ であるような点 $x$ の集合とする。 このときつぎの条件のいづれかが満足されるならば $t\to\infty$ のとき，(5) の有界な解 $x(t)$ は集合 $E$ に近ずく。

(i) おのおのの $p\in Q$ に対して，$p$ のある近傍が存在してすべての $t\geqq 0$ とこの近傍のすべての $x$ に対し，$\|F(t,x)\|$ は有界である。

(ii) $W(x(t))$ は絶対連続で，ほとんど到る所でその微係数は

上から(または下から)有界である。

証明については[4] を参照。 条件(i)は本質的には定理I における ものと同じである。 条件(ii)が満たされて条件(i)が満たされない簡単な例を見てみよう。 この例はまた定理の結論は可能な最良のものであることを示している。 線形の方程式

$$x'' + p(t)x' + x = 0 \tag{6}$$

において，$p(t)$ は連続で $p(t) \geqq \delta > 0$ とする。 $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$，$y = x'$，とすれば，$\dot{V}(x,y) = -p(t)y^2 \leqq -\delta y^2$。 この場合，$W = \delta y^2$，$\dot{W} = 2\delta y y' = -2\delta(xy + p(t)y^2) \leqq -2\delta xy$ 。 あきらかにすべての解は $t \geqq 0$ に対し有界であるから，条件(ii)がみたされる。 集合 E は $x$ 軸 $(y=0)$ であり，解 $x(t)$ に対して $t \to \infty$ のとき $y(t) = x'(t) \to 0$。 方程式 $x'' + (2+e^t)x' + x = 0$ は解 $x(t) = 1 + e^{-t}$ を持つことに注意すれば，上のことは $p(t)$ にさらに条件をつけない限り可能な最良の結論であることがわかる。

前に述べたように，定理の結論は可能な最良のものであるが，解の極限集合が *invariance property* を持つことが知られているときは，より詳細な結果を得ることができる。 一般に $x(t)$ が (5) の解であれば，その正極限集合は閉連結集合

であることが知られている。 もし $x(t)$ が有界ならばその正極限集合は compact である。 解の極限集合が定理2の結論をより詳細にするような invariance property を持つ特別な微分方程式の class がある。 これらの中のまず最初に考えられるものは autonomous system

$$(7) \qquad x' = F(x)$$

である。 以下 invariance property を考えるため微分方程式の解はつねに初期値問題に対して唯一つ存在するものとしておく。

もし (7) の解 $x(t)$ が $t \geqq 0$ に対して有界ならば，その正極限集合 $\Omega$ は空でなく，compact, invariant である。 autonomous system (7) の解の極限集合の invariance property は定理2を改良することを可能にする。

<u>定理3</u>. (7) の $F(x)$ は $Q$ において連続かつ負でない連続函数 $V(x) \in C_0(x)$ が存在して，$Q$ 上で $\dot{V}(x) \leqq 0$ であるとする。 ここで $\dot{V}(x) = \overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(x+hF(x)) - V(x)\}$。 $E$ を $\dot{V}(x)=0$, $x \in Q$, となるような点 $x$ の集合, $M$ を $E$ に含まれる最大の invariant set とする。 このとき (7) の有界な解は $t \to \infty$ のとき集合 $M$ に近ずく。

ここで方程式 (1) をみてみよう。 この場合集合 $E$ は $y$ 軸

$(x=0)$ である。 $y$軸上では原点が唯一の invariant set である。 すなわち集合Mは原点である。 したがって定理3から $t\to\infty$ のとき $x(t)\to 0$, $x'(t)\to 0$ であることがわかる。

解の極限集合が invariance property を持つ nonautonomous system の特別な class がある。 これらの中の一番簡単なものは周期系

$$(8) \qquad x' = F(t, x), \quad F(t+\omega, x) = F(t, x)$$

である。 $\Omega$を(8)の有界な解の正極限集合とし, $p$を$\Omega$の点とすれば, 適当な時間に$p$から出てすべての $t\in(-\infty,\infty)$ に対し$\Omega$にとどまっている(8)の解がある。 この意味において$\Omega$が invariant set である。 [5]を参照。

invariance principle の他の例は asymptotically autonomous system で, それは定理2とこのような系の極限集合に対する Markus, Opial の結果に基ずく。 $t\to\infty$ とき $Q$の任意の compact set の $x$ に対して一様に $g(t,x)\to 0$ で, $[0,\infty]$ 上で有界, 連続なすべての$\varphi$に対して $\int_0^\infty \|G(t,\varphi(t))\|dt < \infty$ のとき, 方程式

$$(9) \qquad x' = F(x) + g(t,x) + G(t,x)$$

は asymptotically autonomous であると云われる。 このとき

(9) の有界な解の正極限集合は $x'=F(x)$ の invariant set である。さらに一般に方程式 (3) を考え，条件 (4) を仮定する。(3) の $F(t,x)$ はまたつぎの条件を満たすものとする。

(a) $\Omega$ を $Q$ の閉集合とし，$t\to\infty$ のとき $x\in\Omega$ に対し $F(t,x)$ はある正数 $H(x)$ に収束する。そして $\Omega$ の任意の compact set の上で，この収束は一様である。

(b) 任意の $\varepsilon>0$ と任意の $y\in\Omega$ に対して，$\delta(y)>0$ と $T(y)>0$ が存在して $\|x-y\|<\delta(y)$，$t\geqq T(y)$ ならば $\|F(t,x)-F(t,y)\|<\varepsilon$。

これらの仮定のもとで，(3) の有界な解 $x(t)$ が $\Omega$ に近ずけば，$x(t)$ の正極限集合は $\Omega$ 上で定義された方程式 $x'=H(x)$ の $\Omega$ に含まれる invariant set である。したがって，つぎの定理が得られる。

定理 4. 負でない連続函数 $V(t,x)\in C_0(x)$ が存在して，

$$\dot V(t,x)=\overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\{V(t+h,x+hF(t,x)+hG(t,x))-V(t,x)\}\leqq -W(x)。$$

ここで $W(x)$ は $Q$ の閉集合 $\Omega$ に関して正定値である。さらに $F(t,x)$ は $\Omega$ に対して条件 (a),(b) を満たすとする。このとき (3) の有界な解は $\Omega$ 上の方程式 $x'=H(x)$ の最大の invariant set に近ずく。

証明については [2] または [6] を参照。

Miller [7] は almost periodic system の解の極限集合は類似の invariance property を持つことを示した。 これは LaSalle の周期系の場合を含む。 Miller は方程式

$$(10) \qquad x' = P(t,x) + R(t,x) + G(t,x)$$

を考え，つぎのような仮定をおいた。 $R(t,x)$, $G(t,x)$ は $I \times Q$ で連続，$P(t,x)$ は $(-\infty,\infty) \times Q$ で連続で $t$ について almost periodic，$x \in \Omega$ に対して $t \to \infty$ のとき $\Omega$ の compact set 上で一様に $R(t,x) \to 0$ 。 ここで $\Omega$ は $Q$ の中の閉集合である。 彼はさらに $R(t,x)$ は $F(t,x)$ に対する条件と同じ条件を満たし，$G(t,x)$ は条件 (4) を満たすものと仮定した。 $Q$ の部分集合 $A$ は，各 $p \in A$ に対して $P(t,x)$ の hull の中の函数 $P^*(t,x)$ と almost periodic system $x' = P^*(t,x)$ の解 $y(t)$, $y(0) = p$，が存在して $y(t)$ がすべての $t \in (-\infty,\infty)$ に対し $A$ の compact set にとどまるとき almost periodic system

$$(11) \qquad x' = P(t,x)$$

に関して invariant であると云われる。

<u>定理 5.</u> 上述の仮定のもとで，$x(t)$ を (10) の $t_0 \leq t < \infty$ 上で有界な解とし，$t \to \infty$ のとき $x(t) \to \Omega$，さらに $\Omega_0$ を (11) に関する $\Omega$ の最大の invariant subset とする。 このとき $t \to \infty$ の

とき $x(t) \to \Omega_0$。すなわち $x(t)$ の正極限集合の各点 $p$ に対して $P(t, x)$ の hull の中の函数 $P^*(t, x)$ と $m \to \infty$ のとき $t_m \to \infty$ となる数列と函数 $y(t)$ が存在して，

(i) $y(t) = p + \int_0^t P^*(s, y(s))\,ds$,

(ii) $m \to \infty$ のとき，$-\infty < t < \infty$ の compact subset 上で一様に $x(t+t_m) \to y(t)$,

(iii) $m \to \infty$ のとき，$t \in (-\infty, \infty)$ と $Q$ の compact subset 上の $x$ に対して一様に $P(t+t_m, x) \to P^*(t, x)$。

Hale [8] は定理 3 を autonomous functional-differential equation

(12) $$\dot{x} = F(x_t),$$

に拡張した。$C$ を $[-r, 0]$ で定義された連続な n-vector function の空間とする。さらに $F(\varphi)$ は Lipschitz の条件をみたすものとする。$C$ が方程式 (12) の相空間で，$C$ の各点 $\varphi$ を通り，$t=0$ のとき初期条件 $\varphi$ をみたす (12) の解 $x(t)$ により定義される motion $x_t$ が存在する。$x_t$, $0 \leqq t < \infty$ が $t=0$ のとき $\varphi$ から出発する $C$ における curve である。$x_t(\varphi)$ の正極限集合 $\Omega(\varphi)$ を次のように定義する。もし $x(\varphi)$ が $[-r, \infty)$ で定義されていて，$\| x_{t_m}(\varphi) - \psi \| \to 0$, $m \to \infty$ となる数列 $t_m$, $t_m \to \infty$ $(m \to \infty)$, が存在するならば，$\psi$ は $\Omega(\varphi)$ の点である。$C$ の集合 $M$ は，$x_t$ が $M$ の点からでる motion

ならば，$x(t)$ がすべての $t \in (-\infty, \infty)$ に対して (12) の解であり，$x_t$ がすべての $t$ に対して $M$ にとどまるような $(-\infty, -r]$ 上の extension が存在するとき，invariant set であるといわれる。Hale は有界な motion $x_t$ の正極限集合は空でなく，compact，connected，invariant な集合であることを示し，定理 3 に対応して次の定理をえた。

<u>定理 6.</u> $V(\varphi)$ を $S$，$S=\{\varphi \in C ;\ \|\varphi\|<H\}$，上の連続函数とする。$U_l$ を $V(\varphi)<l$ なる $\varphi$ の集合とし，$U_l$ の中のすべての $\varphi$ に対し，$|\varphi(0)| \leqq K$ なる定数 $K\,(<H)$ が存在し，かつ $V(\varphi) \geqq 0$，$\dot{V}(\varphi)=\overline{\lim_{h \to 0^+}} \frac{1}{h}\{V(x_h(\varphi))-V(\varphi)\} \leqq 0$ であると仮定する。$R$ を $\dot{V}(\varphi)=0$ である $U_l$ のすべての点の集合とし，$M$ が $R$ の中の最大の invariant set ならば，$U_l$ に初期値をもつ (12) のどの解も $t \to \infty$ のとき $M$ に近づく。

Miller [9] もまた方程式 (10) に対する彼の結果を functional-differential equation に拡張した。

Liapunov 理論の拡張の一つは抽象的な dynamical system に対してであり，Zubov により始められ，特に Auslander，Seibert によりさらにすすめられた。しかし dynamical system に対するこれらの理論は，functional-differential equation に対する Hale の拡張を含まない。

最近 Hale と Infante [10] が，かれらが extended dynamical system とよぶところの概念を導入することにより，dynamical system についてある考察をした。かれらは適当な空間で定義され，ある性質をもつ operator の one-parameter family を考えてこれを dynamical system とよんだ。これは微分方程式，函数微分方程式，ある種の偏微分方程式の自然の拡張で，かれらは dynamical system へ前述のある結果を拡張した。このようにして，得られた invariance principle と安定性に関する定理はまた偏微分方程式の広い範囲に適用される。dynamical system の研究に対する自然な空間は Banach space で，微分方程式の場合はユークリッド空間であり，函数微分方程式の場合は有限区間の上で定義された連続函数の空間，ある双曲型偏微分方程式の場合は Sobolev space である。

## References

[1] J. P. LaSalle and S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*, Academic Press, New York, 1961.

[2] T. Yoshizawa, *Asymptotic behavior of solutions of a system of differential equations*, Contributions to Diff. Eqs., 1 (1963), 371-387.

[3] J. P. LaSalle, An invariance principle in the theory of stability Differential Equations and Dynamical Systems, Proc. of the international Symposium, Puerto Rico, Academic Press, New York, 1967, 277-286.

[4] J. P. LaSalle, Stability theory for ordinary differential equations, J. Differential Eqs., 4 (1968) (to appear).

[5] J. P. LaSalle, Asymptotic stability criteria, Proc. of Symposia in Applied Math., Vol 13, Amer. Math. Soc., 1962, 299-307.

[6] T. Yoshizawa, Stability Theory by Liapunov's Second Method, The Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1966.

[7] K. R. Miller, Asymptotic behavior of solutions of nonlinear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc., 115 (1965), 400-416.

[8] J. K. Hale, Sufficient conditions for stability and instability of autonomous functional-differential equations, J. Diff. Eqs., 1 (1965), 452-482.

[9] K. R. Miller, Asymptotic behavior of nonlinear delay-differential equations, J. Diff. Eqs., 1 (1965), 293-305.

[10] J. K. Hale and E. F. Infante, Extended dynamical systems and stability theory (to appear).