

線型函数微分方程式系の
基本行列について

東北大理 加藤 順二

§1. 序

ユークリッド空間 R^n 上の線型常微分方程式系

$$(1) \quad \dot{x} = A(t)x$$

の (t_0, x_0) を通る解 $x(t; x_0, t_0)$ は基本行列 $X(t, s)$ を用いて

$$(2) \quad x(t; x_0, t_0) = X(t, t_0)x_0$$

によって表わされる。この基本行列の意味をいろいろに解釈することができる。まず、定義として、(i) $X(t, s)$ は系 (1) の (n, n) -行列解、すなわち、その各列が (1) の解となっている (n, n) -行列であって条件

$$X(s, s) = E \text{ (単位行列)}$$

をみたしている。また、(ii) (1) の解の全体は n 次元の線型空間をなしているが、 $X(t, s)$ はこの空間の基底を与えており、したがって、逆に、(iii) 与えられた $X(t, s)$ を基本行列とするような方程式系は高々一通りに定まる。さらに、(iv) 固定

された t, s に対して、 $X(t, s)$ は (2) によって定められた \mathbb{R}^n から \mathbb{R}^n への 連続な 線型作用素を表わしている。

系 (1) の随伴方程式系は内積のとり方に依存しているが、内積を $(x, y) = {}^T y x$ (左肩の T は転置を表わす) によって与えれば、これはまた (1) の基本行列 $X(t, s)$ に対して ${}^T X(s, t)$ を基本行列とする方程式系であると述べることができる。そして、非同次系

$$\dot{y} = A(t)y + g(t)$$

の (t_0, x_0) を通る解 $y(t; x_0, t_0)$ は

$$(3) \quad y(t; x_0, t_0) = x(t; x_0, t_0) + \int_{t_0}^t X(t, s)g(s)ds$$

によって与えられることも周知の事実である。

性質 (iv) に注目して (1) の零解が安定であること、有界な定数 $M(s)$ があって、すべての $t \gg s$ に対して

$$\|X(t, s)\| = \sup_{\|x\|=1} \|X(t, s)x\| \leq M(s)$$

が成り立っていることが同値、したがって、(1) の解が同等有界であることが同値となる。さらに、(i) から (1) の解の有界性と同等有界性が同値となり、安定性の理論における次の定理が得られる。

定理 A. (1) の零解が安定であることと (1) の解が有界であることは同値である。

さらに、(1) の解の一意性によって、基本行列が性質

$$(4) \quad X(t, s)X(s, \tau) = X(t, \tau)$$

を持ってゐることを用いて、

定理B. (1)の零解が一様漸近安定であれば、これは指数的安定である。

を証明することが出来る。

こゝでは、線型函数微分方程式系に対して、このような性質をもった基本行列、あるいは、線型作用素が存在するかどうか、あるいは、上に述べたいくつかの事象がこの場合にも成り立っているかどうか考えてみたい。

3.2. 基本行列。

$h > 0$ を与えられた定数として C によつて区間 $[-h, 0]$ から R^n への連続函数の全体を表わし、連続函数 $x(s)$ に対して、 x_t によつて $s=t$ における segment、すなわち、

$$x_t(s) = x(t+s) \quad s \in [-h, 0]$$

によつて定められた C に属する函数を表わし、 $x(t)$ を $s=t$ における右側微係数とする。

線型函数微分方程式系

$$(5) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t)$$

を考える。こゝで、 $F(t, \varphi)$ は $[0, \infty) \times C$ において定義され、

(t, φ) に関して連続で φ に関して線型であるとする (このことを $F(t, \varphi) \in \mathcal{L}$ で表わす)。たとえば、 $h(t) \geq 0$ を有界な連続

函数、 $A(t)$ 、 $B(t)$ を連続な行列函数としたとき差分微分方程式系

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(t-h(t))$$

はこの系 (5) の特別な場合となっている。

このとき、 n 次の基本補題が得られる。

補題 1. $F(t, \varphi) \in \mathcal{L}$ ならば、ある連続函数 $L(t)$ に対して、

$$\|F(t, \varphi)\| \leq L(t) \|\varphi\|_h$$

が $[0, \infty) \times C$ において成り立っている。ここで、 $\|\varphi\|_h$ は C における一様 norm、すなわち、

$$\|\varphi\|_h = \sup\{\|\varphi(s)\|; s \in [-h, 0]\}.$$

この補題によつて、(5) の解の存在とこの一意性が保証されている。

直ちにわかるように、(5) の解の全体はやはり線型空間をなしている (但し、このとき初期時刻は固定されているものとして、 $t \geq t_0$ においてのみ考へている)。これから、このときこの空間の次元は無限次元である。したがつて、(ii) のような意味をもつた $X(t, s)$ を見出すことはまずあきらめねばならない。 $X(t, s)$ を (5) の (n, n) -行列解と

$$X(s, s) = E, \quad X(s+\theta, s) = 0 \quad (\text{零行列}) \quad \theta \in [-h, 0)$$

をみたすものとしたとき、Halalay [1] は非同次線型系

$$\dot{y}(t) = F(t, y_t) + g(t)$$

の (t_0, φ_0) を通る解 $y(t; \varphi_0, t_0)$ は (5) の (t_0, φ_0) を通る解 $x(t; \varphi_0, t_0)$ を表わす。

$$y(t; \varphi_0, t_0) = x(t; \varphi_0, t_0) + \int_{t_0}^t X(t, s) g(s) ds$$

と与えられることを示した。ここで、 $X(t, s)$ の初期函数は連続であるが、上の補題によつて、 $F(t, \varphi)$ が φ に関して Lipschitz の条件をみたしていることから、 $X(t, s)$ は一意に存在している (例えば、Krasovskii [3] 参照)。この結果を (3) 式と比較して、この $X(t, s)$ が (5) に対して基本行列の役割を果たしているように思われる。そこで、これを (5) の基本行列と呼んで、その性質を、三調べてみよう。

$X_t(s)$ によつて $X(t, s)$ の segment を表わす。

$$X_t(s)(\theta) = X(t+\theta, s)$$

なる函数を表わし、同様に $x_t(\varphi_0, t_0)$ によつて $x(t; \varphi_0, t_0)$ の segment を表わす。次の補題を証明することが出来る。

補題 2. 任意に $\varphi \in C$ 、 $t \geq h$ 、 $\varepsilon > 0$ に対して、自然数 m 、数の組 θ_i 、 $-h \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_m \leq 0$ 、および、ベクトル $c_i \in R^n$ ($i=0, 1, \dots, m$) を適当にえらんで、

$$\|\varphi - \sum_{i=0}^m X_t(t+\theta_i) c_i\|_{\infty} < \varepsilon$$

が成り立つようにすることが出来る。さらに、 $L > 0$ に対して

$$\|\varphi(\theta) - \varphi(\theta')\| \leq L|\theta - \theta'|, \quad \theta, \theta' \in [-h, 0]$$

がみたされるるとき、

$$\overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^m \|c_i\| \leq (2h \cdot \max\{L, M(t)\} + 1) \|y\|.$$

$$\therefore \text{z. } M(t) = \sup \left\{ L(u) \exp \left[\int_s^u L(c) dt \right]; t \geq u \geq s \geq t-h \right\}.$$

この補題の前半によつて、 $H(t, \varphi) \in \mathcal{L}$ かつ、任意の $t \geq s \geq 0$ 、 $c \in \mathbb{R}^n$ に対して、 $H(t, X_t(s)c) = 0$ ならば、すべての $\varphi \in \mathcal{C}$ に対して $H(t, \varphi) = 0$ となることが示される。したがって、

$$\dot{x}(t) = G(t, x_t), \quad G(t, \varphi) \in \mathcal{L}$$

も (5) と同じ基本行列 $X(t, s)$ を持つことれば、 $[h, \infty) \times \mathcal{C}$ において、 $G(t, \varphi) = F(t, \varphi)$ ではなくてはならない。すなわち、この意味で $X(t, s)$ は性質 (iii) をみたしていることがわかる。

さて、 $\eta(t, \theta) \in [0, \infty) \times [-h, 0]$ で定義された (n, n) -行列関数 η に関しては、 t の連続関数、 θ に関しては有界変動 η の全変分は t の連続関数 η 上界に持つ $\eta(t, 0) = 0$ のとき系

$$(b) \quad \dot{x}(t) = \int_{-a}^0 [d_\theta \eta(t, \theta)] x(t+\theta)$$

の随伴方程式系を Halanay [1] は

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^0 \eta(t-\theta, \theta) y(t-\theta) d\theta + y(t) \right] = 0$$

によつて与えた。こゝで、 $\theta < -h$ に対して $\eta(t, \theta) = \eta(t, -h)$ と定めよう。一方、Hale [2] は (b) において η が t を含まないときに、 η の随伴方程式系を

$$\dot{y}(t) = - \int_{-a}^0 [d^T \eta(\theta)] y(t-\theta)$$

で定義した。こゝで、上の $\frac{d}{dt}$ 、 $\dot{y}(t)$ は左側微係数を表わしている。これらは一見異なる随伴方程式系を与えているよう

に思われるが、いざれも、(b) の基本行列を $X(t, s)$ としたときとの随伴方程式系の基本行列は $X(s, t)$ であることと述べている。したがって、いざに述べたことから、 η が t を含んでいないときはこれらは一致してはならない。一般に、 $\eta(s)$ が有界変動で、 $s \geq 0$ において $\eta(s) = 0$ 、 $s \leq -h$ において $\eta(s) = \eta(-h)$ とおいたとき、 $\varphi(s)$ が $(-\infty, a)$ ($a > 0$) で連続で

$$\int_{-\infty}^0 \|\varphi(s)\| ds < \infty$$

をみたすならば、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 [d\eta(s)] \varphi(s) &= \int_{-h}^0 [d\eta(s)] \varphi(s) = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^0 \eta(s) \varphi(s-t) ds \right] \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{-t} \eta(t+s) \varphi(s) ds \right] \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^0 \eta(t+s) \varphi(s) ds \right] \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち、ある、ほく云って、Stieltjes 積分においても微分と積分の順序が交換可能である。

補題 2 の後半を用いて、

$$M^*(t) = \sup \{ M(s); t+h \geq s \geq t \}, \quad B(t) = \exp \left[\int_t^{t+h} L(s) ds \right],$$

$$\Phi(t, s) = \begin{cases} \sup \{ |X(t, \tau)|; s+h \geq \tau \geq s \}, & t \geq s+h \\ 1, & s+h > t \geq s \end{cases}$$

とおいたとき、(5) の解 $X(t; \varphi_0, t_0)$ は評価式

$$\|X(t; \varphi_0, t_0)\| \leq (1 + 2h M^*(t_0)) B(t_0) \Phi(t, t_0) \|\varphi_0\|_h$$

をみたしていることが示される。この事実から、 F が t を含んでいないときは、 $X(t, s) = X(t-s, 0)$ 、かつ、 $X(t, 0)$ は有限個の解からなることよって、(5) に対しては定理 A が正しい。

ことが判かる。しかし、 F が $t \in$ 含む場合は互に異なる情報
が得られないう限り、この事実から定理Aの正否について判断
することができない。

与る。線型作用素。

(5)の解を(2)式に対応して

$$x_t(\varphi_0, t_0) = T(t, t_0)\varphi_0$$

と書き表わす。このとき、解の性質から、 $T(t, s)$ は C から C
への線型作用素、さらに、 F がLipschitzの条件をみたすこと
から、これが連続な作用素であることが示される。明らかに
、これは性質(4)、すなわち、 $t > s > \tau$ において

$$T(t, s)T(s, \tau) = T(t, \tau)$$

が成り立っている。したがって、この事実を用いて定理Bが
この場合にも正しいことが示される。(Halany)。

次の定理はよく知られている。

Banach-Steinhausの定理(Zygmund [4])。 $u_m(\varphi) \in$ Banach
空間 Ω 上の有界な線型作用素として $M_m \in u_m$ の norm とす
る。このとき、 Ω の σ -稠密な集合 Ω^* に属する各点 φ に対して
 $\sup_m \|u_m(\varphi)\|$ が有界であれば、ある $M > 0$ に対して、 $M \geq M_m$ 、す
なわち、すべての $\varphi \in \Omega^*$ と自然数 m に対して

$$\|u_m(\varphi)\| \leq M \|\varphi\|$$

が成り立っている。ここで、 $\|\varphi\|$ は Ω における norm。

さて、 $t_0 \in \mathbb{R}$ を固定して、 $\{t_m\} \in [t_0, \infty)$ において dense 点列
 とし、

$$u_m(\varphi) = T(t_m, t_0)\varphi$$

と定義する。 $\Omega = \mathbb{C}$ は Banach 空間である。今、(5) のま
 での解が有界であるとは仮定すれば、すべての $(t_0, \varphi_0) \in [0, \infty) \times \mathbb{C}$
 に対し $\beta = \beta(t_0, \varphi_0) > 0$ が存在して、

$$\|x(t; \varphi_0, t_0)\| \leq \beta \quad (t \geq t_0)$$

が成り立ち、 β は φ_0 に依る。したがって、 $\sup \|u_m(\varphi_0)\|_a \leq \beta$ 。ゆえに
 Banach-Steinhaus の定理によつて、ある $M(t_0) > 0$ に対し

$$\|u_m(\varphi)\| \leq M \|\varphi\|_a$$

が成り立ち、 $\|T(t_m, t_0)\varphi\|_a \leq M \|\varphi\|_a$ がすべての φ と m に対し
 成り立ち、 β は φ_0 に依る。さらに、 $x(t; \varphi_0, t_0)$ は t に依りて連続
 だから、 $T(t, t_0)$ も t に依りて連続となる。このことと $\{t_m\}$ が
 $[t_0, \infty)$ において dense であることを用いて、

$$\|T(t, t_0)\varphi\|_a \leq M(t_0) \|\varphi\|_a$$

を得る。このことは (5) の解が同等有界であることと示して
 おり、同時に、

$$\|\varphi_0\| < \varepsilon / M(t_0) \text{ ならば、 } \|x(t; \varphi_0, t_0)\| < \varepsilon \quad (t \geq t_0),$$

が成り立ち、(5) の零解は安定となる。逆に、(5) の零解が安
 定ならば、直ちに、(5) の解の同等有界性が得られる。したが
 って、定理 A の成り立ちが示される。

参考文献

- [1] A. Halanay, Differential Equations, Academic Press, New York, 1966.
- [2] J. K. Hale, Linear functional-differential equations with constant coefficients, Contr. Diff. Eqs., 2(1964), 291-317.
- [3] N. N. Krasovskiĭ, Some Problems in the Theory of Stability of Motion, Stanford Univ. Press, California, 1963.
- [4] A. Zygmund, Trigonometrical Series, 1935, p165.