数理解析研究所講究録
第 38 巻 1968 年 89-100

不確定型の特異点の近傍における有界な解について

都立大 理　岩野 正宏

§1 まえがき

不確定型の特異点をもつ連立方程式

$$\begin{cases} xy' = f(x, y, z) & y, f \text{ は } l\text{-vectors} \\ x^{\sigma+1} z' = g(x, y, z) & z, g \text{ は } m\text{-vectors} \end{cases}$$

$f(0,0,0)=0,\ g(0,0,0)=0,\quad \sigma>0$ は整数

の有界な解のつくり方を考える。この型の方程式に関しては Annali di Mat. Pura Apl. (1957, 1959) に有界な解をつくる一般理論を発表した。この方法を二つの例題——一つは境界層の方程式，もう一つは Briot-Bouquet 型の特異点；$xy' = f(x,y)$, $f_y(0,0)=0$ ——に応用しようとしたが，x のベキの order で 0 に近づく解の漸近展開の有効な範囲があまり狭くなるために，一般理論の方法は少しもよくないことがわかった。これらの二つの例題から説明しよう。

§2 境界層の方程式

数理科学研究班の会合が行なわれていた頃のことであるが，流体関係者から次の境界値問題が提出されたことがあった：

$$w''' + 2ww'' + 2\lambda(k^2 - w'^2) = 0, \quad ' = \frac{d}{dz}$$

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w'(\infty) = k > 0.$$

$$\lambda < 0.$$

そのとき福原先生と私とでこの問題を解こうと努力したがうまくいかなかったことを覚えている．

wを独立変数，$W = w'^2$を未知関数にとることにより，与えられた境界値問題は

$$\sqrt{W}\,\frac{d^2W}{dw^2} + 2w\frac{dW}{dw} + 4\lambda(k^2 - W) = 0$$

$$W(0) = 0, \qquad W(\infty) = k^2.$$

となる．私の分擔は"$w \to \infty$のとき$W \to k^2$となる解の漸近展開式を求める"ことであった．古屋先生のお話では"$w \to \infty$（実軸上）のとき一つは指数関数のorderで，もう一つはベキのorderでk^2に近づく解があるらしい"とのことであったが，私の方法ではベキのorderでk^2に近づく解の存在は証明できなかった．最近このような解をつくる方法を考えついた．与えられた方程式を一つの標準形になおすために，

$$W = k^2 + u, \quad du/dw = v,$$

つぎに主要項をとりだすために

$$u=\eta-\frac{1}{4}kw^{-1}(2-kw^{-1})\xi,\ v=\lambda w^{-1}(2+kw^{-1})\eta+\xi$$

とおくと，変換された方程式は次のように書ける：

$$\eta'=w^{-1}\{2\lambda\eta+w^{-1}(\alpha(w^{-1})\eta+\beta(w^{-1})\xi)+$$
$$+2a(u)\,g(w^{-1})(2\lambda u-wv)k^{-1}\},$$

$$\xi'=w\{(-\frac{2}{k}-2\lambda w^{-2})\xi+w^{-1}(\gamma(w^{-1})\eta+\delta(w^{-1})\xi)+$$

$$+2a(u)w^{-1}(1+s(w^{-1})w^{-2})(2\lambda u-wv)k^{-1}\},$$

$$a(u)=(1+u/k^2)^{-\frac{1}{2}}-1.$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ g,\ s$ は w^{-1} の正則関数.

さらに，

$$\xi=w^{-1}\zeta,\qquad w^{-1}=x$$

とおけば，$\eta,\ \zeta$ に関する方程式が得られる．記号をかえれば，これらの方程式は次の2連立方程式に含まれることがわかる：

$$(A)\qquad xy'=f(x,y,z),\quad x^{\sigma+1}z'=g(x,y,z),$$

$$f(x,0,0)\equiv 0,\quad f(x,y,z)=\mu y+[x,y,z]_2,\quad \mu>0,$$

$$g(x,0,0)\equiv 0,\quad g(x,y,z)=\nu y+[x,y,z]_2,\quad \nu>0.$$

問題は(A)の一般解の展開式を求めることである.

f と g の x,y,z の2次以上の項を無視すれば，$x\to 0$

(実軸上)のとき, $O(x^{\mu})$と$O(e^{-\nu/\sigma x^{\sigma}})$ の大きさで0に近づく解の存在が予想される。しかし古い方法ではxのべきのorderで0に近づく解の漸近展開が有効な範囲は実軸を含み得ない.

§3 Briot-Bouquetの特異点をもつ方程式

$$xy' = f(x, y),\quad f(0,0)=0,\quad f_y(0,0)=0,\quad y, f \text{ は } n\text{-vectors.}$$

fがscalarのときは福原先生により研究され, 彼の結果は木村氏の理論(Malmquistの定理の拡張)で大切な役目を果した. fがvectorの場合に福原の結果の拡張を試みた.

まず記号の説明をする. $\mathbf{1}_n(y)$はn次の対角行列でその対角要素からなるn次のvectorがyに等しいもの. $M=(m_1,\dots,m_n)$のとき, $|M|=\sum m_j$, $y^M = y_1^{m_1} y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}$.

$f(0,y)$にたいして次の二つの仮定をおく.

1) $f(0,y) = y^M \mathbf{1}_n(f(y))\, y$, $\quad m_i \geq 0,\ |M| \geqq 1.$

2) $\mathrm{Re}\,\dfrac{\alpha_j}{M\cdot\alpha} > 0$, $\alpha = \{\alpha_j\}$, $\alpha = f(0)$, $(\cdot)$は内積.

対角行列$\mathbf{1}_n(f(y))$をn次行列でおきかえると, 形式変換がうまくいかない。fが scalarの場合には, 1)も2)も自動的に満足される

説明を簡単にするために, αの要素は互にincomensurableであると仮定する. そうすると"成分はzの形式的べき級数であるn-vectors $p_k(z)$ $(k=0,1,\dots)$を適当に選んで形式変換

$$y \sim z + 1_n(z)\,p_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z)\,x^k$$

を行なうことによって，

(*) $$x z' = z^M\, 1_n(\alpha + \alpha^* z^M)\, z$$

に帰着できる．"

この形式変換の意味を考えるまえに，各係数の解析的な意味を調べねばならない．$p_0(z)$ が $z=0$ の近傍で正則な関数として決まることをみるのはむづかしくはないが，$p_k(z)$ の漸近展開の有効な範囲をできるだけ広げようとすれば少し面倒なことがおこる．　$p_1(z)$ は偏微分方程式

(#) $$z^M \frac{\partial p}{\partial z}\, 1_n(\alpha + \alpha^* z^M)\, z = -p + H(z)\,p + h(z),\quad H(0)=0$$

をまんぞくする．$H(z)$, $h(z)$ は $z=0$ で正則．

(*)の解は $n+1$ 連立方程式

$$w^2 \frac{dx}{dw} = \frac{x}{M\cdot\alpha + M\cdot\alpha^* w}, \quad w\frac{d\tilde{z}}{dw} = 1_n\left(\frac{\alpha + \alpha^* w}{M\cdot\alpha + M\cdot\alpha^* w}\right)\tilde{z}$$

の解に含まれることに注意して，(#) の代わりに次の $2n$ 連立方程式を考える：

(1)
$$w\frac{d\tilde{z}}{dw} = 1_n\left(\frac{\alpha + \alpha^* w}{M\cdot\alpha + M\cdot\alpha^* w}\right)\tilde{z},$$
$$w^2 (M\cdot\alpha + M\cdot\alpha^* w)\frac{dp}{dw} = -p + H(\tilde{z})\,p + h(\tilde{z}).$$

仮定により $Re\,\alpha/M\cdot\alpha>0$ であるから，第一の方程式は

(2) $\tilde{z}=u+1_n(u)\phi(u)$, $\phi(0)=0$

なる形の正則な変換で

$$w\,du/dw=1_n(\alpha/M\cdot\alpha)u$$

と変換される．第二の方程式の解で w と u のみに関係するものを $p=\varphi(w,u)$ とかくことにする．(2) の逆変換を $u=\tilde{z}+1_n(\tilde{z})K(\tilde{z})$ とかけば，簡単な計算で，

$$p(z)\equiv\varphi(z^M,\ z+1_n(z)k(z))$$

は (#) の解となることがわかる．

したがって (1) の代りに，もう少し一般な形の方程式

(B) $xy'=1_\ell(\kappa)y$, $x^{\sigma+1}z'=g(x,y,z)$

$$Re\,\kappa>0,\quad g(x,y,z)=\Lambda y+[x,y,z]_2,\ \det\Lambda\neq0$$

を考える．今の場合は $\Lambda=\delta 1_m$ (1_m は m 次の単位行列) で十分である．ここで Λ は Jordan 形であるとしてよい．

問題は x と y だけに関係する解の展開式を求めることである。

しかし古い方法では Λ が一般の正則な行列である場合はこのような解の存在が少しもいえない。$\Lambda=\delta 1_n$ のときは解の存在はいえるが，漸近展開の有効な範囲があまり狭すぎて都合が悪い。((#)に応用したとき z が scalar の場合の結果を含

まない)。

§4 (A)と(B)を含む方程式

(A)と(B)よりも，もう少し一般な形の方程式を考える：

(C) $xy'=f(x,y,z)$, $x^{\sigma+1}z'=g(x,y,z)$

f は l-vector, g は m-vector, f と g は $(0,0,0)$ で 0.

仮定1). $F\equiv f_y(0,0,0)$ の Jordan 形は対角型で，その固有値 $\{\mu_j\}$ の実部はすべて正.

仮定2) $f_x(0,0,0)=0$, $\mu_j\neq k_0+K\cdot\mu$ $(k_0+|K|\geq 2,\ \mu=\{\mu_j\})$.

仮定3) $G\equiv g_z(0,0,0)$ は non-singular で，その固有値 $\{\nu_j\}$ から成る m-vector を ν とすれば $H\cdot\nu\neq 0$ $(|H|\geq 2)$.

これら三つの仮定のもとに次の問題が考えられる；

$\boxed{\text{問題1}}$. $x\to 0$ のとき x のベキの order で 0 に近づく解の漸近展開式を求める.

一般解をつくるために，さらに次の仮定をおく：

仮定4) ν_j を複素平面上の点と考えるとき，原点を通るある直線に関してすべて同じ側にあり，かつ $\{\nu_j\}$ は互に異なる。

$\boxed{\text{問題2}}$ $x\to 0$ のとき 0 に近づく一般解の漸近展開式を求める.

ここでは問題1の解法を方程式(B)について説明するだけ

にとどめておく.

§5 x のベキの order で 0 に近づく解のつくり方

(3) $$z \sim \sum p_K(x) y^K$$

を (B) の第2式 —— 以下 $(B)_2$ とかく —— に代入すると, $p_K(x)$ を決める不確定型の特異点をもつ方程式が得られる. よく知られた存在定理により, 次のことがわかる:

"$p_K(x)$ は $\theta_1 < \arg x < \theta_2$, $|x| < a$ で正則有界かつ x のベキ級数に漸近展開可能な関数として一意的に決まる. $\theta_1 < \arg x < \theta_2$ は, 各々の番号 j に対して, x がこの角領域にぞくする任意の点 x_0 から原点に近づくとき, $\exp(\nu_j / \sigma x^\sigma)$ ($\{\nu_j\}$ は Λ の固有値) の絶対値が単調に減少しながら 0 になるような道 $\Gamma_{j x_0}$ (x_0 と 0 を結ぶ) がとれる という条件できまる."

(3) の収束を証明するために, $(B)_1$ の解で $x = x_0$ のとき $y = y_0$ となるものを $Y(x)$ とかき,

$$z = u + \sum_{|K|<N} p_K(x) Y(x)^K,$$

$$u = e^{-\mathbb{1}_m(\nu)/\sigma x^\sigma} \mathfrak{z}, \qquad \nu = \{\nu_j\}$$

とおけば, $(B)_2$ は

(4) $$\mathfrak{z}' = x^{-\sigma-1} e^{\mathbb{1}_m(\nu)/\sigma x^\sigma} g(x, Y(x), e^{-\mathbb{1}_m(\nu)/\sigma x^\sigma} \mathfrak{z})$$

の形の方程式に変換される．かつ

$$\| G(x, y, u) \| \leq A \| u \| + B_N \| y \|^N.$$

関数族 $\mathfrak{F} = \{ \phi(x, y) \}$ として，

(5) $\hat{\Theta}_1 < \arg x < \hat{\Theta}_2$, $|x| < a_1$, $\| y \| < b_1$

において (x, y) の関数として正則かつ不等式

$$|\phi_j(x, y)| \leqq K_N \| y \|^N e^{\mathrm{Re}(\nu_j / \sigma x^\sigma)}$$

を満足する m-vector 関数 $\phi(x, y)$ の全体をとる。

(x_0, y_0) を (5) から任意に選び，$Y(x)$ を定義して，

$$\bar{\Phi}(x_0, y_0) = \int_0^{x_0} x^{-\sigma-1} e^{\Lambda_m(\nu)/\sigma x^\sigma} G(x, Y(x), e^{-\Lambda_m(\nu)/\sigma x^\sigma} \phi(x, Y(x))) dx$$

によって $\bar{\phi}(x, y)$ を定義する．$\phi(x, y)$ に $\bar{\phi}(x, y)$ を対応させる写像を T とし，この T に不動点があることを証明する。この不動点に対応する $\mathfrak{F}$ の要素を $\Phi(x, y)$ とかけば $\Phi(x, Y(x))$ が (4) の解になることを証明することによって (4) の解の存在の証明がおわる．

$\hat{\Theta}_1$, $\hat{\Theta}_2$ を決める条件としては，古い方法では各々の j に対して次の二つの条件を満足する $\tilde{\Gamma}_{jx_0}$（x_0 と原点を結ぶ道）の存在を要求したのである：

a) $\tilde{\Gamma}_{jx_0} \ni x \to 0$ のとき，$|\exp(\nu_j / \sigma x^\sigma)| \to 0$（単調に）．

b) $\|Y(x)\| \to 0$ （単調に）

このために $\hat{\theta}_1 < \arg x < \hat{\theta}_2$ は 係数 $p_K(x)$ の定義されている角領域よりも本質的にせまくなる．ただし a_1 は $\hat{a}_1 \cdot \mathcal{X}(\arg x)$ なる形の正値連続有界な関数でおきかえねばならない． 条件 b) は可成り強い条件であるから，y の偏角が特別な条件を満足していない限り a) と b) とは両立しない．実は 条件 b) は，$|Y_k(x)/y_{0,k}|$ （k は成分の番号）が x_0 と y_0 とのとり方に無関係に，$\tilde{\Gamma}_{jx_0}$ の上で 一様に有界という条件で 十分である．

このような方針のもとに，領域(5)を

$$(5^*) \quad \theta_1 < \arg x < \theta_2,\ |x| < \hat{a}_1 \mathcal{X}(\arg x),\ |y_j| < \hat{b}_1 \cdot \rho_j(\arg x)$$

$\mathcal{X}(\varphi)$, $\rho_j(\varphi)$ は 正値連続 有界な関数

でおきかえれば，係数 $p_K(x)$ が定義されているのと同じ角領域で 形式解(3)の 収束 が証明できる．(5^*) は

$$\theta_1 < \arg x < \theta_2,\quad |x| < a_2,\quad \|y\| < b_2$$

と同等な領域である．

この結果を §2 で説明した η, ζ に関する方程式に応用すれば，w^{-1} のベキの order で 0 に近づく解の漸近展開が有効な角領域は，

$$-\frac{\pi}{4} < \arg w < \frac{5\pi}{4} \quad \text{または} \quad -\frac{5\pi}{4} < \arg w < \frac{\pi}{4}$$

となる。この二つの角領域はどちらも w 平面上の正の実軸を内部に含む。(古い方法を用いる場合は，$0<\arg w<\pi$ または $-\pi<\arg w<0$ となる)

§3 の方程式(1) にこの結果を応用すれば，偏微分方程式 (#)(§3) の解の漸近展開が有効な角領域は

$$-\arg M\cdot\alpha - \frac{3\pi}{2} < \arg z^M < -\arg M\cdot\alpha + \frac{3\pi}{2}$$

となる。(古い方法を用いる場合は，$-\pi-\min\{\arg\alpha_j\} < \arg z^M < \pi - \max\{\arg\alpha_j\}$)。$\alpha$, z と M を scalar とすれば，この角領域は福原の角領域と全く一致する。(古い方法を用いるとき，z, M, α を scalar としても福原の角領域よりずうと狭くなる。)

§6　あとがき

問題1も問題2もまだ完全には解いていない。形式変換の計算の基本的な部分はすんでいる。

方程式$(B)_1$で右辺にxの単独の項がある(残っている)場合には，新しい方法を用いて解の漸近展開の有効な範囲を広げることはむずかしいように思う。すなわち，$|Y_k(x)/y_{0,k}|$ が x_0 と y_0 に無関係に $\check{\Gamma}_{x_0}$ の上で一様有界という条件をつけると，技術的に$Y(x)$は適当なノルムに関して $\check{\Gamma}_{x_0}$ の上で単調になるように

$\tilde{\Gamma}_{jx_0}$ を決めざるを得ないように思う.

Briot-Bouquet の特異点で, $f_y(0,0)=0$ の代わりに,

$$f_y(0,0)=\begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 : \text{non-singular}$$

のとき, 与えられた方程式に適当な変換を行なうことによって簡単にしようという場合, 形式変換の係数を決めるさいに (B) の型の方程式があらわれる. このとき Λ は一般の non-singular な三角型の行列になる. (古い方法ではそのような方程式に漸近解の存在すら主張できない).

新しい方法についての基本的な考えは, Funkcialaj Ekvacioj 10 (1967) に発表した.

境界層の方程式に関しては, Boundary Layer Theory, Herman Schlichting, McGraw Hill がある.