数理解析研究所講究録
第38巻 1968年 101-108

力学系と Structural Stability

東工大 理　　西本敏彦

§1. 序

ある領域で定義された vector field 又は dynamical system のいわゆる大域的定性理論（qualitative theory in the large）とはその dynamical system によってつくられる積分曲線族の topological structure の研究であって究極的には積分曲線族の間に適当な同値関係、例えば homeomorphism を入れてそれによって dynamical system の classification を行うことである。qualitative というのは numerical 又は analytial theory に対応する言葉で或いは幾何学的理論ともいえる。この大域的定性理論は最近になって Markus, Peixoto, Smale, Thom, および Pugh らによっていちぢるしい発展をとげた。M^n を n 次元の compact な可微分多様体としその上で定義された C^r-topology をもつ力学系全体の集合を $\mathfrak{X}^{(r)}$ とかく。大域的定性理論の基本問題とは $\mathfrak{X}^{(r)}$ の中に適当な open dense subset をとりだし、

それらに対応する積分曲線族の図形が何らかの単純な性質を有し classificationが可能であるようにすることでありこれは次の2つの問題に分けられる：

(1) density problem 又は approximation problem.

(2) classification problem.

M^2の場合にはこの基本問題は Peixoto によって本質的に解決された．即ち compact なM^2の上の dynamical system 全体の集合$\mathfrak{X}$に $C^{(r)}$ topology $(r\geq 1)$ を導入したとき structurally stable system の集合 $\mathcal{S}$ は$\mathfrak{X}$の中で open dense subset を為し $\mathcal{S}$ の積分曲線族は十分簡単な図形（§ 参照）をもつことが示された．かくしてM^2の場合には基本問題は解決されたのであるがしかし解析的な見方からすればM^2において或いは平面上においてさえも全てが終ったというわけではない．即ち我々には与えられた dynamical system が structurally stable system であるかどうかを判定できるような方法はもっていない．従って解析的に与えられた dynamical system の集合についての解曲線の topological structure の研究は実際には不可能である．

さて $n\geq 3$ の場合には色々と困難があり問題は解決されていない．現在のところ次の§2でのべるような概念や$\mathfrak{X}$の部分空間が定義されそれらの性質，相互関係等，基本問題と関連して活発に研究されている．

§2. 定義および諸結果

$M^{(n)}$ を n 次元 compact 可微分多様体で Riemann metric をもつものとする。$M^{(n)}$ 上で定義された C^r-級力学系 X は local coordinate を用いて

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

とかける。X_i は各変数につき r 回連続的微分可能。$M^{(n)}$ 上の C^r $(r \geq 1)$ 級力学系の全体を $\mathfrak{X}^{(n)}$ とかき次のような metric を入れる。M^n 上の有限閉被覆 $M_1,\cdots,M_m$ を1つとり固定する。ここで $\overline{M}_j$ は coordinate neighborhood に含まれるようにとっておく。$X, Y \in \mathfrak{X}^{(n)}$ のとき

$$\rho(X,Y) = \max_{1 \leq j \leq m} \rho_j(X,Y)$$

$$\rho_j(X,Y) = \max_{\substack{M_j \\ i,k,l,s,t}} \left| \frac{\partial^{s+t} X_i}{\partial x_k^s \partial x_l^t} - \frac{\partial^{s+t} Y_i}{\partial x_k^s \partial x_l^t} \right|, \quad \left(\begin{array}{l} i,k,l=1,\cdots,n \\ 0 \leq s+t \leq r \end{array} \right)$$

1. S-system ≡ Structurally stable system

$X \in S$ とは $^\forall \varepsilon > 0$ に対し X の近傍 Δ があって $Y \in \Delta$ なる限り X と Y は ε-equivalent である。ここで ε-equivalent とは M から M の上への homeomorphism がありそれは X の解曲線を Y の解曲線へ方向を保ち写像しかつ対応する点は距離が ε 以内にあるときにいう。

2. P-system ≡ Peixoto system.

P_1 Xは有限個の特異点をもちそれらは全て generic.

P_2 Xは有限個の周期解をもちそれらは全て simple.

P_3 全ての解曲線の α, ω-limit は特異点か周期解

P_4 saddle point を結ぶ解曲線はない.

3. G-system

G_1 Xは有限個の特異点をもちそれらは全て generic

G_2 全ての周期解は generic

G_3 全ての解曲線の α, ω-limit は全ての周期解と特異点の集合の closure に含まれる.

G_4 周期解と特異点の stable, unstable manifolds は normal intersection property をもつ.

4. M-system ≡ Morse-Smale system

M_1 Xは有限個の特異点をもちそれらは全て generic.

M_2 Xは有限個の周期解をもちそれらは全て simple.

M_3 全ての limit set は特異点か周期解

M_4 周期解と特異点の stable, unstable manifolds は normal intersection property をもつ.

M_5 β_i を周期解とすると $\lim_{t \to \pm\infty} \varphi_t(y) = \beta_i$ となる点 y は

存在しない．ここで $\ell(y)$ は y を通る解曲線．

定理1　$n=2,\ r\geqq 1$ ならば $\mathcal{S}\cong\mathcal{P}$ かつ $\overline{\mathcal{S}}=\mathfrak{X}^{(2)}$

Peixoto, M. M.　Topology 2 (1962) 101～121.

定理2　$n\geqq 2,\ r=1$ ならば $\mathcal{G}$ は $\mathfrak{X}$ の中で dense.

Pugh, C. C.　to appear.

定理3　$n=2,\ r=1$ のとき $X\in\mathcal{G}$ ならば $X\in\mathcal{P}$.

Pugh, C. C.　Diff. equations and Dyn. system (1967) 481～482.

定理4　$X\in\mathcal{M}$ ならば Morse inequality が成立.

Smale, S.　Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) 43－49.

定理5　$X\in\mathcal{S}$ かつ有限個の周期解をもてば $X\in\mathcal{M}$.

Smale, S.　Bol. dela Soc. Mate. Mexicana. Ser II Vol 1～5 (1960) 195～198.

定理6　$n\geqq 4$. のとき $\mathcal{S}$ は $\mathfrak{X}$ で dense でない.

Smale, S.　Amer. J. Math. 86, 491－496 (1966).

以上の他に第一積分の存在や minimal set と Structurally stable system との関係，Hyperbolic structure をもつ dynomical system とについての研究も行われている．つぎに $n=2$ の場合には Structurally stable system はその解曲線は $P_1\sim P_4$ をみたす．これらのことを用いもう少しくわしく解曲線の様子をしらべる．

§3　$n=2$の場合

Smaleの定理を適用することによりM^2の上のS-system又はR-systemは次のMorse inequalityをみたす：

$g = M^2$の genus,

$N_0 =$ sourse pointの数，$N_1 =$ saddle pointの数，

$N_2 =$ sink pointの数，

$N_3 =$ unstable limit circleの数，$N_4 =$ Stable limit circleの数

とするとき

$$1 \leqq N_0 + N_3 \quad , \quad 1 \leqq N_2 + N_4$$

$$2g-1 \leqq N_1 + N_3 - N_2, \quad 2g-1 \leqq N_1 + N_4 - N_0$$

$$2-2g = N_0 - N_1 + N_2$$

ゆえに S^2（2次元球面）および T^2（2次元トーラス）上の最も簡単な例をあげると

S^2	T^2
$N_0\ N_1\ N_2\ N_3\ N_4$	$N_0\ N_1\ N_2\ N_3\ N_4$
1 0 1 0 0	0 1 1 1 0
2 0 0 0 1	1 2 1 0 0
0 0 2 1 0	1 1 0 0 1
	0 0 0 1 1

上記のMorse inequalityをみたすように $N=(N_0\ N_1\ N_2\ N_3\ N_4)$ を与えたとき topologially distinct types は有限個であることが知られている．故にM^2上のS-systemは可付番無限個の元から

成りたっていることが分る. topological type は separatrix と canonical region によって決定されるといってよい. そこで S-system ≡ P-system の separatrix と canonical region の様子をしらべてみよう. P-system の性質から次のことが分る;

任意の特異点又は周期解から出て再び同じ特異点又は周期解に帰ることはできない.

S-system の separatrix は critical points, limit circles および saddle point から出る又は入る解曲線である. separatrix の全体を S とすると $M^2 - S$ の各 component を canonical region という. Morse inequality から separatrix の集合 S は空でない. R を1つの canonical region とすると $\overline{R}$ は compact で connected である. つぎに canonical region R の typical な形をみてみるが簡単のため S^2 および T^2 の場合について図示する. いずれにしても与えられた M^2 に対しこのような canonical region の typical な形は有限個であることは明らかである.

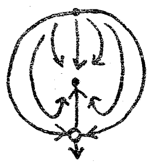
§4. Canonical region の形

homeomorphic な図形は同一視して簡単なものからかく.

1. M^2 全体から sink point 又は source point をとりのぞいたもの
2. 同心円でかこまれた円環又は円の内部から1点: sink 又は source point をとりのぞいたもの.

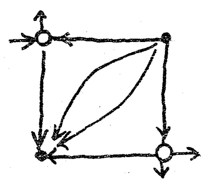
3. 2つの円で境された円筒部分.

4. saddle point からでる separatrix と特異点で囲まれたもの

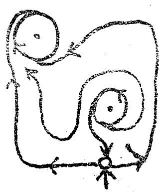


・ 特異点で sink 又は source point

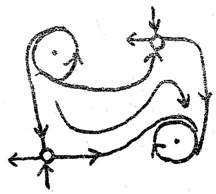
○ saddle point



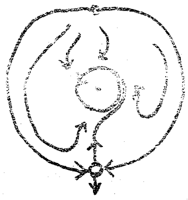
5. saddle point からでる separatrix と円で囲まれたもの

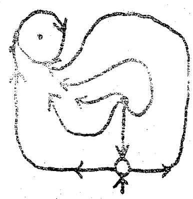


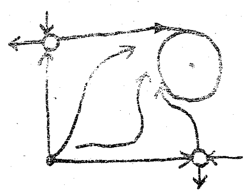
⊙ 極限円



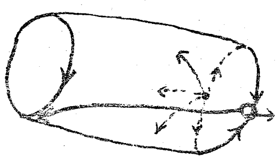
6. saddle point からでる separatrix, 特異点および円で囲まれるもの.

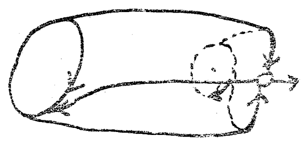






7、円筒状のもの





上図で矢印は $t \to \infty$ に対応する曲線であるが矢印が逆であるような図形も Canonical region である.