数理解析研究所講究録
第 39 巻 1968 年 11-18

特異積分による函数の近似について

東北大 理　洲之内 源一郎

I. 一変数の場合

§1. 一般の定理

E を $L^p(-\infty,\infty)$ $(1\leqq p<\infty)$ 又は C_0 空間とし，$f\in E$ に対して合成型の特異積分

$$K(x,\rho;f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-u)\,dk(\rho u)$$

を作り f の近似を考える。ここに核 $k(x)$ は

$$(1)\qquad \int_{-\infty}^{\infty}|dk(x)|<\infty,\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{0}dk(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}dk(x)=1$$

をみたすとする。この時

$$\lim_{\rho\to\infty}\|K(\cdot,\rho,f)-f(\cdot)\|_E=0$$

が成立する。さらに $k(x)$ の Fourier-Stieltjes 変換 $\hat{k}(v)$ に対して

(2) (i) $\lim_{v\to 0} \dfrac{\hat{k}(v)-1}{|v|^{r}} = c \neq 0$, (ii) $\dfrac{\hat{k}(v)-1}{|v|^{r}} \in (S, S)$

が成立するとする．(ii)の条件は有界変分の函数 $h(x)$ が存在して

$$\frac{\hat{k}(v)-1}{|v|^{r}} = c\,\hat{h}(v)$$

とかけることと同等である．

註．条件 (2, i) が成立しても (2, ii) は必しも成立しない事が知られている．（P. Malliavin, 1961, 未発表）．

$\mathcal{D}$ を無限回微分可能，compact support を持つ函数の集合とすると

（補題 1）．$\varphi \in \mathcal{D}$，核 k が (1), (2) をみたすならば

$$\left\| \frac{K(\cdot, \rho; \varphi) - \varphi(\cdot)}{\rho^{-r}} - c\,(-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \varphi^{\{r\}}(\cdot) \right\|_{E} \to 0 \quad (\rho \to \infty)$$

が成立する．ここに

$$\varphi^{\{r\}}(x) = \varphi^{(r)}(x) \quad (r = \text{偶数}), \quad = (\tilde{\varphi})^{(r)}(x) \quad (r = \text{奇数}).$$

（証明）

$$\frac{K(x, \rho; \varphi) - \varphi(x)}{\rho^{-r}} - c\,[-1]^{\left[\frac{r}{2}\right]} \varphi^{\{r\}}(x)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\hat{k}(v/\rho)-1}{(|v|/\rho)^{r}} - c \right\} |v|^{r} \hat{\varphi}(v)\, e^{-ivx}\, dv$$

$$= \frac{c}{\sqrt{2\pi}} (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^{\{r\}}(x-u)\, d h(\rho u) - \varphi^{\{r\}}(x) \right\}.$$

(命題 1) 核 k が (1) (2) をみたすならば

$$\| K(\cdot, \rho; f) - f(\cdot) \|_E = o\left(\rho^{-r}\right) \qquad (\rho \to \infty)$$

となるための必要十分条件は $f(x) = 0$, (a.e.) である。

(証明) 必要性を示せばよい。$\varphi \in \mathcal{D}$ に対して補題1の結果が成立することと、函数合成の交換可能性から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi^{\{r\}}(x)\, dx = 0, \qquad \varphi \in \mathcal{D}$$

超函数に関する微分の定理から $f(x) = 0$, a.e.

(命題 2) 核 k が (1), (2) をみたすとき

$$\| K(\cdot, \rho; f) - f(\cdot) \|_E = O\left(\rho^{-r}\right) \qquad (\rho \to \infty)$$

となるための必要十分条件は

$$\tilde{f}^{\{r-1\}} \in BV \ (E = L^1),\quad f^{\{r\}} \in L^p \ (E = L^p (1<p<\infty)),\quad f^{\{r\}} \in L_0^\infty (E = C_0)$$

(証明) 必要性. 例えば $E = L^1$ の時は補題1と (BV) の空間の単位球が w^*-compact なることを用いれば、$\varphi \in \mathcal{D}$ に対し

$$c(-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi^{\{r\}}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, d g(x), \qquad g \in BV.$$

十分性. (2, ii) によって $\{\hat{k}(v/\rho)-1\}/(|v|^r/\rho)$ が BV に属する函数のフーリエ変換の持続因子であることによる.

(定義)(命題1, 2) の結論が成立するような場合, この特異積分による近似法は次数 ρ^{-r} で飽和に達するといい, 命題2できまる函数族を, その飽和族という.

(定理1) 核 k が条件 (1)(2) をみたす時, 特異積分 $K(x,\rho;f)$ による飽和次数は ρ^{-r} で, 飽和族は

$$\tilde{f}^{\{r-1\}} \in BV\ (E=L^1),\quad f^{\{r\}} \in L^p\ (E=L^p),\quad f^{\{r\}} \in L^\infty_0\ (E=C_0).$$

ここに $f^{\{r\}}(x)=f^{(r)}(x)$, $(r=偶)$, $=(\tilde{f})^{(r)}$ $(r=奇)$

(但し $E=C_0$ の時 $\tilde{f}$ は Wiener の拡張した共軛函数とする).

§2. 応用例

上に述べた一般定理を応用する場合 $k(x)$ が条件 (2)(ii) をみたすことを示すのが問題である. この判定条件には Nagy, Beurling 等によるものがあるが, ここでは近似論の場合に有用な簡単なものを与える.

(定理2) $\hat{h}(t)$ がある有界変分函数のフーリエ-スチルチェス積分なる時

$$\hat{k}(t)-1=\int_0^t r\,\hat{h}(\tau)\,\tau^{r-1}\,d\tau$$

が成立すれば, k は (2, ii) をみたす.

(証明) 与えられた式で変数 $\tau=tu$ と変換すると

$$\hat{k}(t)-1 = t^{\gamma}\int_0^1 \gamma\,\hat{h}(tu)\,u^{\gamma-1}\,du$$

右辺のリーマン積分の近似和 R_n をつくると

$$R_n = \frac{1}{n^{\gamma}}\sum_{k=0}^{n-1} \gamma\,\hat{h}\left(t\cdot\frac{k}{n}\right)k^{\gamma-1}$$

$\|\hat{h}\|'$ で h の全変分を示すことにすれば

$$\|R_n\|' = \frac{1}{n^{\gamma}}\sum_{k=0}^{n-1}\|\hat{h}\|'\,\gamma\,k^{\gamma-1} \leqq \|\hat{h}\|'$$

従ってその一様極限もまた BV の函数のフーリエスチルチェス変換で表され，そのノルムは有界である．

(例1) Gauss-Weierstrass の特異積分

$$k(u) = 2^{\frac{1}{2}} e^{-|u|^2} \in L, \qquad \hat{k}(v) = e^{-\frac{1}{4}v^2}$$

$$\frac{\hat{k}(t)-1}{t^2} \to -\frac{1}{4}, \qquad \hat{k}(t)-1 = -\frac{1}{2}\int_0^{t} \tau\, e^{-\frac{1}{4}\tau^2}\,d\tau$$

故に $\gamma=2$ で一般定理の仮定をみたす．

(例2) Cauchy-Poisson の特異積分．

$$k(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+u^2} \in L, \qquad \hat{k}(v) = e^{-|v|}$$

$$\frac{\hat{k}(t)-1}{|t|} \to -1, \qquad \hat{k}(t)-1 = -\int_0^{t} e^{-|\tau|}\,d\tau$$

故に $\gamma=1$ で定理の仮定をみたす．

(例3) Bochner-Riesz の特異積分

$$k(u) = 2^{\alpha}\Gamma(\alpha+1)\, V_{\alpha+\frac{1}{2}}(|u|) \in L^{1} \quad (\alpha>0)$$

$$\hat{k}(v) = (1-|v|^{2})^{\alpha} \quad (|v|\leqq 1), \quad = 0 \quad (|v|\geqq 1)$$

$$\lim_{v\to 0}\frac{\hat{k}(v)-1}{v^{2}} = -\alpha \neq 0, \quad \hat{k}(v)-1 = -2\alpha\int_{0}^{v}\tau(1-|\tau|^{2})^{\alpha-1}d\tau$$

よって $\alpha>1$ ならば $r=2$ で定理の仮定をみたす.

II. 多変数の場合

$f\in E$ に対して

$$K(x,\rho;f) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n}}\int_{E_n} f(x-u)\rho^{n}k(\rho u)\,du$$

を考える. 簡単のため核は密度 k を持つとする. $k(u)$ が

(1) $k\in L(E_n)$, radial function で $\|k\|_1 = (\sqrt{2\pi})^{n}$

をみたすとする. k が radial 故 そのフーリエ変換もまた radial であり, さらにこれが

(2) (i) $\displaystyle\lim_{v\to 0}\frac{\hat{k}(v)-1}{|v|^{r}} = c \neq 0$, (ii) $\displaystyle\frac{\hat{k}(v)-1}{|v|^{r}} \in (S, S)$

とする. この時 $\varphi\in\mathcal{D}$ に対して次の補題が成立する.

(補題1) $\varphi\in\mathcal{D}$, 核 k が (1) (2) をみたすならば

$$\left\| \frac{K(\cdot,\rho;\varphi)-\varphi(\cdot)}{\rho^{-r}} - c\,(-1)^{[\frac{r}{2}]}\varphi^{\{r\}}(x) \right\|_{E} \to 0 \quad (\rho\to\infty)$$

ここで $\varphi^{\{\gamma\}}(x)$ は γ の偶数か奇数かによって

$$\varphi^{\{\gamma\}}(x) = \Delta^m \varphi \quad (\gamma = 2m) \quad = \Delta^m \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial x_j}\right) \quad (\gamma = 2m+1).$$

但し $(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2, \cdots, \tilde{\varphi}_n)$ は φ の vectorial conjugate (Riesz 変換) である.

証明はフーリエ変換

$$(\Delta^m \varphi)^\wedge = |v|^{2m} \hat{\varphi}, \quad \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{\varphi}_j}{\partial x_j}\right)^\wedge = \frac{-\sum (i v_j)^2}{|v|} \hat{\varphi}(v) = |v| \hat{\varphi}(v)$$

を用いれば一変数と同様. 命題1,2も大体一変数と同様にして次の一般定理が成立する.

(定理1) 核 k が条件(1), (2) をみたす特異積分 $K(x, \rho, f)$ による飽和次数は $\rho^{-\gamma}$ で飽和族は

$$\int_E f^{\{\gamma\}}(x)\,dx \in C_0^1 \;(E = L^1), \qquad f^{\{\gamma\}} \in L^p \;(E = L^p,\ 1 < p < \infty)$$

$$f^{\{\gamma\}} \in L_0^\infty \quad (E = C_0).$$

但し

$$f^{\{\gamma\}}(x) = \Delta^m f \quad (\gamma = 2m), \; = \Delta^m \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}_j}{\partial x_j}\right) \quad (\gamma = 2m+1)$$

で微分及び共軛は一般には超函数の意味とする.

応用に関して定理2は一変数と同様な形で成立する.

(例1) Gauss-Weierstrass の特異積分

$$k(u) = 2^{n/2} e^{-|u|^2}, \qquad |u| = \left(\sum u_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\hat{k}(v) = e^{-\frac{1}{4}|v|^2} \qquad \frac{\hat{w}(v)-1}{|v|^2} \to -\frac{1}{4}$$

$r=2$ で定理の仮定をみたす.

(例2) Cauchy-Poisson の特異積分

$$k(u) = \frac{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\{1+|u|^2\}^{\frac{1}{2}(n+1)}}$$

$$\hat{k}(v) = e^{-|v|}, \qquad \frac{e^{-|v|}-1}{|v|} \to -1.$$

$r=1$ で定理の仮定をみたす.

(例3) Bochner-Riesz の特異積分

$$k(u) = 2^{\alpha}\,\Gamma(\alpha+1)\,\mathcal{V}_{\frac{n}{2}+\alpha}(|u|)$$

$$\hat{k}(u) = (1-|v|^2)^{\alpha} \quad (|v| \leqq 1), \quad = 0 \quad (|v| \geqq 1)$$

$\alpha > \frac{1}{2}(n-1)+1$ の時 $r=2$ で定理の仮定をみたす.

文献

(1) H. Buchwalter, Comptes Rendus Paris, 250 (1960), 3562–64

(2) R. J. Nessel, Proc. Amsterdam, 70 (1967), 52–73.

(*) 本論は十島迪孝氏と共著である。