数理解析研究所講究録
第 39 巻 1968 年 87-104

閉作用素の摂動について

京大 数研　浅野 潔

§1. 準備

1. 記号.

$\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1, \cdots$ Banach spaces (norm : $\| \ \|$)

$\mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$ $\mathfrak{X} \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow \mathcal{R}(T) \subset \mathfrak{X}_1$ なる closed linear operator T の全体

$\mathcal{L}_0(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}_1) = \{ T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1) ; \mathcal{D}(T)^a = \mathfrak{X} \}$

$\mathcal{B}(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}_1) = \{ T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1) ; \mathcal{D}(T) = \mathfrak{X} \}$

$\|T\|$. $T \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$ の operator norm

$\mathcal{N}(T) = \{ u \in \mathcal{D}(T) ; Tu = 0 \}$, $T \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$

$\Phi(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}_1) = \{ T \in \mathcal{L}_0(\mathfrak{X}; \mathfrak{X}_1) ; \dim \mathcal{N}(T) < \infty,$
$\mathcal{R}(T)$ closed in $\mathfrak{X}_1$, $\dim \mathfrak{X}_1/\mathcal{R}(T) < \infty \}$

$=$ $\mathfrak{X}$ から $\mathfrak{X}_1$ への Fredholm operator 全体

$T \in \Phi(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$ に対して, $\alpha(T) = \dim \mathcal{N}(T)$

$\beta(T) = \dim \mathfrak{X}_1/\mathcal{R}(T)$

$\kappa(T) = \alpha(T) - \beta(T)$

$$\Phi_j(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1) = \{T\in\Phi(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1)\ ;\ \kappa(T)=j\}$$

$\mathbb{C}_\infty(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1)$ = $\mathfrak{X}$から$\mathfrak{X}_1$への compact linear operator の全体 $\subset \mathcal{B}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1)$

$$\mathbb{C}_0(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1) = \{T\in\mathcal{B}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1)\ ;\ \dim \mathcal{R}(T)<\infty\}$$

$\mathcal{L}(\mathfrak{X}) = \mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$, $\mathcal{B}(\mathfrak{X})=\mathcal{B}(\mathfrak{X},\mathfrak{X})$ etc.

$T\in\mathcal{L}_0(\mathfrak{X})$ に対して,

$\rho(T)$ = resolvent set of T, $\sigma(T)$ = spectrum of T

$\sigma_p(T)$ = Tの（代数的）重複度有限の孤立固有値の全体

$$\Phi(T)\ (\Phi_j(T)) = \{\lambda\in\mathbb{C}\ ;\ \lambda-T\in\Phi(\mathfrak{X})\ (\Phi_j(\mathfrak{X}))\}$$

$$\bar{\rho}(T) = \rho(T)\cup\sigma_p(T) \subset \Phi_0(T)$$

$\sigma_e(T) = \Phi(T)^c$ essential spectrum of T

U を $\mathbb{C}^n$ の domain（又は open set）とするとき,

$\mathcal{A}(U;\mathfrak{X})$ = Uで定義された$\mathfrak{X}$-valued analytic function の全体

$\mathcal{M}(U;\mathfrak{X})$ = Uで定義された$\mathfrak{X}$-valued meromorphic function の全体

$\mathcal{B}(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1)$ は operator norm を norm として Banach space になるが, $\mathbb{C}_0(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1)$ は（$\dim\mathfrak{X}_1=\infty$ である限り）Banach space にならない。しかし, 後の便利のため $\mathcal{A}(U;\mathbb{C}_0(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1))$ 等を次の如く定義する.

定義 1. $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ (or $\mathcal{M}(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$)

$\Longleftrightarrow$

i) $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ ($\mathcal{M}(U; \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$)

ii) $^\forall a \in U$ に対して，a のある近傍 $U(a)$ が存在し，$T(z)$ は $U(a)$ で次の形に展開される：

(1.1.) $$T(z) = \sum_{j=1}^{k} \langle\ , x_j(z)\rangle \varphi_j(z) = \sum \varphi_j(z) \otimes x_j(z)^*,$$

ここで $\varphi_j(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathfrak{X}_1)$，$x_j(z)^* \in \mathcal{A}(U(a); \mathfrak{X}^*)$ ($\mathcal{M}(U(a); \mathfrak{X}^*)$)，$\mathfrak{X}^* = \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathbb{C})$ = dual space of $\mathfrak{X}$.

定義 2. $T(z) \in \mathcal{A}_0(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ (or $\mathcal{M}_0(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$)

$\Longleftrightarrow$

i) $\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\}$ 定義 1 に同じ。
ii)

iii) (1.1) において，$z \in U(a)$ のとき $\{\varphi_j(z); j=1, \cdots, k\}$ は 1 次独立．

注意 1. $m = 1$ のときは，$\mathcal{A}(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)) = \mathcal{A}_0(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$，$\mathcal{M}(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)) = \mathcal{M}_0(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$．

注意 2. $T(z) \in \mathcal{A}_0(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ ($\mathcal{M}_0(U; \mathbb{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$) は次のことと同値である：

i) $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ ($\mathcal{M}(U; \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$)

ii) $^\forall a \in U$, $^\exists U(a)$ a の近傍，$^\exists P(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}(\mathfrak{X}_1))$;

$$P(z)^2 = P(z) \quad \& \quad P(z)T(z) = T(z) \qquad z \in U(a).$$

注意 3. 注意 2 ii) ($P(z)T(z) = T(z)$ を除き) をみたす $P(z)$ は, $\mathcal{A}_0(U(a); \mathcal{C}_0(\mathfrak{X}_1))$ に属する。従って a のある近傍 $V(a)$ で次の形をもつ:

(1.2) $\quad P(z) = \sum_{j=1}^{k} \langle\ , \psi_j(z)\rangle \varphi_j(z) = \sum \varphi_j(z) \otimes \psi_j(z)^*$,

ここに $\varphi_j(z) \in \mathcal{A}(V(a); \mathfrak{X}_1)$, $\psi_j(z)^* \in \mathcal{A}(V(a); \mathfrak{X}_1^*)$ $\not\in$

$\langle \varphi_i(z), \psi_j(z)\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, k$, $z \in V(a)$.

従って, $T(z)$, $P(z)$ が注意 2 i), ii) をみたすときは,

(1.3) $\quad t_{ij}(z) = \langle T(z)\varphi_j(z), \psi_i(z)\rangle = \langle \varphi_j(z), \chi_i(z)\rangle$

とおくと,

(1.4) $\quad T(z)P(z) = \sum \varphi_i(z)\, t_{ij}(z) \otimes \psi_j(z)^*$, $\quad z \in V(a)$.

次に $\mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1) = \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1) \cap \Phi_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$ とおき, $\mathcal{A}(U; \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ 等を定義する. ($\mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$ は $\mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$ の open set である.)

定義 3. $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$

$\Longleftrightarrow$

i) $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$

ii) $T(z) \in \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$, $\forall z \in U$.

定義 4. $T(z) \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ $(\mathcal{M}_0(U; \mathcal{C}_\infty(\mathfrak{X})))$

$\Longleftrightarrow$

i) $T(z) \in \mathcal{M}(U; \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ $\quad (\mathcal{M}(U; \mathcal{C}_\infty(\mathfrak{X})))$

ii) $T(z)$ の singularity を ω_1 とすると, $T(z) \in \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$, $z \in U - \omega_1$,

iii) $^\forall a \in \omega_1$ に対して，a のある近傍 $U(a)$ で $^\exists T_0(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ $(\mathcal{A}(U(a); \mathfrak{C}_\infty(\mathfrak{X})))$，$^\exists T_1(z) \in \mathcal{M}_0(U(a); \mathfrak{C}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ $(T_1(z) \in \mathcal{M}_0(U(a); \mathfrak{C}_0(\mathfrak{X})))$；

$$T(z) = T_0(z) + T_1(z), \quad z \in U(a) - \omega_1 .$$

最後に，簡単のため次の約束をする．

$$\mathcal{A}(U) = \mathcal{A}(U; \mathbb{C}), \quad \mathcal{M}(U) = \mathcal{M}(U; \mathbb{C}).$$

2. trace と determinant

$S \in \mathfrak{C}_0(\mathfrak{X})$ は，次の形にかける：

$$S = \sum_{j=1}^{k} \langle \ , x_j \rangle \varphi_j = \sum \varphi_j \otimes x_j^*$$

$$\varphi_j \in \mathfrak{X}, \quad x_j \in \mathfrak{X}^*, \qquad \{\varphi_j\}, \{x_j\} \text{ は 1 次独立.}$$

いま $\langle \varphi_j, \psi_i \rangle = \delta_{ij}$ なる $\psi_i \in \mathfrak{X}^*$ $(i = 1, \cdots, k)$ をとって

$$s_{ij} = \langle S\varphi_j, \psi_i \rangle = \langle \varphi_j, x_i \rangle$$

とおく．$\mathrm{tr}\, S$ と $\det(1-S)$ を次のように定義する：

$$\mathrm{tr}\, S = \mathrm{tr}(s_{ij}) = \sum_{i=1}^{k} \langle \varphi_i, x_i \rangle ,$$

$$\det(1-S) = \det(\delta_{ij} - s_{ij}) = \det(\delta_{ij} - \langle \varphi_j, x_i \rangle).$$

明らかに $\mathrm{tr}\, S$ および $\det(1-S)$ は，$\{\varphi_j\}, \{x_j\}$ 等のとり方によらない．かつ $S^* \in \mathfrak{C}_0(\mathfrak{X}^*)$ に対しては，

$$\mathrm{tr}\, S^* = \overline{\mathrm{tr}\, S} \quad \text{や} \quad \det(1 - S^*) = \overline{\det(1-S)} .$$

故に $P, Q \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ が projection $(P^2 = P,\ Q^2 = Q)$ で $PS = S = SQ$ のとき，

$$\mathrm{tr}\, S = \mathrm{tr}\, PSP = \mathrm{tr}\, QSQ,$$

$$\det(1-S) = \det(1-PSP) = \det(1-QSQ).$$

また，$S,\ T \in \mathfrak{C}_0(\mathfrak{X})$ のとき

$$\det((1-S)(1-T)) = \det(1-S)\det(1-T).$$

3. 問題の説明

我々は§2で，$T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ (or $\mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$) のときに，$T(z)^{-1}$ の解析的性質を考察する。§3で，$U \subset \mathbb{C}^1$ のときをやゝ詳しく調べる。このときには，適当な条件のもとで，$T(z)$ の固有値および固有ベクトルの Puiseux 展開をかなり詳しく求めることも可能である（[3] 参照）。しかしここでは，そこまで立入っては論じない。§4で，§2の結果の簡単な応用を述べる。1つは，閉作用素 A_0 を適当に摂動したときの，$\rho(A_0)$ の安定性に関すること，他の1つは，$\sigma_p(A_0)$ の変化に関する Weinstein-Aronszajn の公式の variant である。

§2. $T(z)^{-1}$ の解析的性質 (I)

補題 2.1. $U \subset \mathbb{C}^m$ は領域，$T(z) \in \mathcal{M}_0(U; \mathfrak{C}_0(\mathfrak{X}))$，$T(z)$ の特異点を ω_1 とする。$1 \in \rho(T(z_0))$ なる $z_0 \in U-\omega_1$ が存在すれば，$(1-T(z))^{-1} \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}))$ かつ $\Gamma(T(z)) \in \mathcal{M}_0(U; \mathfrak{C}_0(\mathfrak{X}))$

である。ただし

$$(2.1)\qquad \Gamma(T(z)) = -\{(1-T(z))^{-1}-1\} = -T(z)(1-T(z))^{-1}.$$

証明．任意の $a \in U$ をとる．a のある近傍 $U(a)$ で，$T(z)$ は (1.1) の形に表わされる。注意 2 と 3 により，$P(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{C}_0(\mathfrak{X}))$ が存在して，$P(z)^2 = P(z)$，$P(z)T(z) = T(z)$ かつ $P(z)$ は $U(a)$ で (1.2) のように表わされるとしてよい。$P_0(z) = 1 - P(z)$ とおくと，$P_0(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$ かつ $P_0(z)^2 = P_0(z)$ である。$z \in U(a) - \omega_1$ に対して，$1 \in \rho(T(z))$ と $1 \in \rho(T(z)P(z))$ は同値であり，

$$(2.2)\qquad (1-T(z))^{-1} = P(z)(1-T(z)P(z))^{-1}(1+T(z)P_0(z)) + P_0(z)$$
$$= P(z)\{P(z)(1-T(z)P(z))^{-1}(1+T(z)P_0(z))-1\}+1.$$

(1.4) により $t_{ij}(z)$ を定義すると，$t_{ij}(z) \in \mathcal{M}(U(a))$ かつ $1 \in \rho(T(z)P(z))$ と $\det(\delta_{ij} - t_{ij}(z)) \neq 0$ は同値である。いま，$U(a) - \omega_1$ で $\det(\delta_{ij} - t_{ij}(z)) \equiv 0$ とすると，$U - \omega_1$ が連結なることから，解析接続により任意の $z \in U - \omega_1$ に対して $1 \notin \rho(T(z))$ となる。これは $1 \in \rho(T(z_0))$ に反するから，$U(a) - \omega_1$ で $\det(\delta_{ij} - t_{ij}(z)) \neq 0$。そこで $(\Delta_{ij}(z)) = (\delta_{ij} - t_{ij}(z))^{-1}$ とおけば，$\Delta_{ij}(z) \in \mathcal{M}(U(a))$ かつ

$$(2.3)\qquad P(z)(1-T(z)P(z))^{-1} = \Sigma\, \varphi_i(z)\, \Delta_{ij}(z) \otimes \psi_j(z)^*.$$

故に $P(z)(1-T(z)P(z))^{-1} \in \mathcal{M}_0(U(a); \mathcal{C}_0(\mathfrak{X}))$．(2.1) により，証明は明らか．

定理 2.1. (i) $U \subset \mathbb{C}^m$ を領域, $T(z) \in \mathcal{A}(U; \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$ とする。ある $z_0 \in U$ で $\alpha(T(z_0)) = 0$, 即ち $T(z_0)^{-1} \in \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X})$ が存在するとする。そのとき $T(z)^{-1} \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}))$ で, $T(z)^{-1}$ の特異点は ~~$\omega =$~~ $\{ z \in U ;\ \alpha(T(z)) > 0 \}$ と一致する.

(ii) $T(z)$ は (i) と同じで, $m = 1$ であるとする。そのとき, ω は高々 U の離散集合で, 各 $a \in \omega$ は $T(z)^{-1} \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}))$ の pole であり, $z = a$ における $T(z)^{-1}$ の Laurent 展開:

$$(2.4) \qquad T(z)^{-1} = \frac{S_m}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{S_1}{z-a} + S_0(z)$$

において, $S_j \in \mathcal{C}_0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X})$, $j = 1, \cdots, m$, $S_0(z) \in \mathcal{A}(U(a); \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}))$ である. 特に

$$(2.5) \qquad S_m = \sum_{j=1}^{k} \langle\ , \psi_j \rangle \varphi_j ,$$

ここに $T(a)\varphi_j = 0$, $T(a)^* \psi_j = 0$.

証明. (i) $z_1 \in U - \omega \ (\neq \emptyset)$ ならば, $T(z_1)^{-1} \in \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X})$. z_1 の十分小さい近傍 $V(z_1)$ をとると, $\| T(z) - T(z_1) \| \leq \frac{1}{2} \| T(z_1)^{-1} \|^{-1}$, $z \in V(z_1)$。故に $z \in V(z_1)$ に対して,

$$(2.6) \qquad \begin{aligned} T(z)^{-1} &= \{ T(z_1) + (T(z) - T(z_1)) \}^{-1} \\ &= T(z_1)^{-1} \{ 1 - (T(z) - T(z_1)) T(z_1)^{-1} \}^{-1} \\ &= T(z_1)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \{ (T(z) - T(z_1)) T(z_1)^{-1} \}^j . \end{aligned}$$

$\| (T(z) - T(z_1)) T(z_1)^{-1} \| \leq \frac{1}{2}$ より, 上の級数は $V(z_1)$ で一様収束する. 故に $T(z)^{-1} \in \mathcal{A}(V(z_1); \mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}))$。次に $a \in \omega$ とすると, $\alpha(T(a)) = \beta(T(a)) = n > 0$。$\mathfrak{N}(T(a))$ の base $\{ u_j ; j = 1, \cdots, n \}$,

$\mathcal{R}(T(a))$ のある補空間 $\mathfrak{M}$ の base $\{\varphi_j\,;\,j=1,\cdots,n\}$，$\{u_j\}$ に対する biorthogonal base $\{x_j\}$ (i.e. $\langle u_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$) をとり，

$$R = \sum_{j=1}^{n} \langle\ , x_j\rangle \varphi_j = \Sigma\, \varphi_j \otimes x_j^*,$$

$$\tilde{T}(z) = T(z) + R$$

とおく。明らかに $\tilde{T}(z) \in \mathcal{A}(U(a)\,;\,\mathcal{B}_0(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1))$ かつ $\alpha(\tilde{T}(a)) = 0$。故に a のある近傍 $V(a)$ で $\tilde{T}(z)^{-1} \in \mathcal{A}(V(a)\,;\,\mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}))$ である。一方，$T(z) = \tilde{T}(z) - R = (1 - R\tilde{T}(z)^{-1})\tilde{T}(z)$ より，$\alpha(T(z)) = 0$ と $1 \in \rho(R\tilde{T}(z)^{-1})$ は同値である。$R\tilde{T}(z)^{-1} \in \mathcal{A}_0(V(a)\,;\,\mathfrak{C}_0(\mathfrak{X}_1))$，$\det(1 - R\tilde{T}(z)^{-1}) \in \mathcal{A}(V(a))$ であり，$1 \in \rho(R\tilde{T}(z)^{-1})$ はまた $\det(1 - R\tilde{T}(z)^{-1}) \neq 0$ と同値になる。いま $V(a)$ で $\det(1 - R\tilde{T}(z)^{-1}) \equiv 0$ とすると，$V(a)$ で $\alpha(T(z)) > 0$ となる。U が連結だから，解析接続により U で $\alpha(T(z)) > 0$ となり，$\alpha(T(z_0)) = 0$ に反する。故に $V(a)$ で $\det(1 - R\tilde{T}(z)^{-1}) \neq 0$。補題 2.1 により $(1 - R\tilde{T}(z)^{-1})^{-1} \in \mathcal{M}_0(V(a)\,;\,\mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1))$ かつ $\Gamma(R\tilde{T}(z)^{-1}) = 1 - (1 - R\tilde{T}(z)^{-1})^{-1} \in \mathcal{M}_0(V(a)\,;\,\mathfrak{C}_0(\mathfrak{X}_1))$ であるから，

$$\begin{aligned}(2.7)\qquad T(z)^{-1} &= \tilde{T}(z)^{-1}(1 - R\tilde{T}(z)^{-1})^{-1} \\ &= \tilde{T}(z)^{-1} - \tilde{T}(z)^{-1}\Gamma(R\tilde{T}(z)^{-1}).\end{aligned}$$

明らかに $\tilde{T}(z)^{-1}\Gamma(R\tilde{T}(z)^{-1}) \in \mathcal{M}_0(V(a)\,;\,\mathfrak{C}_0(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}))$ であるから，$T(z)^{-1} \in \mathcal{M}_0(V(a)\,;\,\mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}))$。

(ii) (2.7) と $T(a)T_m = T_m T(a) = 0$ より明らか。

定理 2.2. $U \subset \mathbb{C}^m$ は領域，$T(z) \in \mathcal{M}_0(U\,;\,\mathcal{B}_0(\mathfrak{X},\mathfrak{X}_1))$ とする。

もしある $z_0 \in U$ に対して $\alpha(T(z_0)) = 0$ ならば，$T(z)^{-1} \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}))$。

証明．大体定理 2.1 (i) と同様である。

定理 2.3．$U \subset \mathbb{C}^m$ は領域，$T(z) \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}))$ とする。もしある $z_0 \in U$ に対して，$1 \in \rho(T(z_0))$ ならば，$(1-T(z))^{-1} \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(\mathcal{X}))$ かつ $\Gamma(T(z))^{\cdot} \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}))$。

証明．次の補題 2.2 より明らか。

補題 2.2．U は $\mathbb{C}^m$ の領域，$T(z) \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}(\mathcal{X}))$（定義 3 を参照），$T(z)$ の特異点を ω とする。ある開集合 $V \subset U - \omega$ で $T(z) \in \mathcal{A}(V; \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}))$ ならば，実は $T(z) \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}))$。

§3. $T(z)^{-1}$ の解析的性質 (II) − *generalized Jordan chain*.

定理 3.1．$U \subset \mathbb{C}^1$ は領域，$T(z) \in \mathcal{A}_0(U; \mathcal{B}_0(\mathcal{X}, \mathcal{X}_1))$ とする。ある $z_0 \in U$ で $\alpha(T(z_0)) = 0$ とすると，

i) $T(z)^{-1} \in \mathcal{M}_0(U; \mathcal{B}_0(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}))$，$\omega = \{z \in U;\ \alpha(T(z)) > 0\}$ は U の離散集合で，各 $a \in \omega$ は $T(z)^{-1}$ の *pole*。

ii) $a \in \omega$ のまわりの $T(z)^{-1}$ の *Laurent* 展開：

(3.1) $$T(z)^{-1} = \frac{S_m}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{S_1}{z-a} + S_0(z),$$

(3.2) $$\begin{aligned} S_{m-l} = {} & \sum_{1}^{r_1} [\langle\ ,\psi_j^0\rangle \varphi_j^l + \langle\ ,\psi_j^1\rangle \varphi_j^{l-1} + \cdots + \langle\ ,\psi_j^l\rangle \varphi_j^0] \\ & + \sum_{r_1+1}^{r_2} [\langle\ ,\psi_j^0\rangle \varphi_j^{l-1} + \cdots + \langle\ ,\psi_j^{l-1}\rangle \varphi_j^0] + \cdots \\ & + \sum_{r_{l-1}+1}^{r_l} [\langle\ ,\psi_j^0\rangle \varphi_j^1 + \langle\ ,\psi_j^1\rangle \varphi_j^0] + \sum_{r_l+1}^{r_{l+1}} \langle\ ,\psi_j^0\rangle \varphi_j^0, \end{aligned}$$

$$(3.3)\quad T_0\varphi_j^k + T_1\varphi_j^{k-1} + \cdots + T_k\varphi_j^0 = 0,\quad \left\{\begin{array}{l} j=1,\cdots,r_{m-k} \\ k=0,1,\cdots,m \end{array}\right.$$

$$(3.3')\quad T_0^*\psi_j^k + T_1^*\psi_j^{k-1} + \cdots + T_k^*\psi_j^0 = 0$$

$$(3.4)\quad \varphi_j^k \in \mathfrak{X},\ \{\varphi_j^k;\ j=1,\cdots,r_{m-k}\}\ \text{は1次独立},$$

$$(3.4')\quad \psi_j^k \in \mathfrak{X}_1^*,\ \{\psi_j^k;\ j=1,\cdots,r_{m-k}\}\ \text{は1次独立},$$

$$(3.5)\quad \{\varphi_j^0;\ j=1,\cdots,r_m=\alpha(T(a))\}\ \text{は}\ \mathfrak{N}(T(a))\ \text{の base}$$

$$(3.5')\quad \{\psi_j^0;\ j=1,\cdots,r_m=\alpha(T(a)^*)\}\ \text{は}\ \mathfrak{N}(T(a)^*)\ \text{の base}$$

ただし $\{T_0,\cdots,T_m\}$ は $T(z)=\sum_{j=0}^{\infty}(z-a)^j T_j$ よりきまる，

注意．$(\varphi_j^0,\cdots,\varphi_j^{l-1})$ $(j=r_{m-l}+1,\cdots,r_{m-l+1})$ は $k=0,\cdots,l-1$ に対して (3.3) なる関係をみたし，φ_j^l は存在しない。このような $(\varphi_j^0,\cdots,\varphi_j^{l-1})$ を長さ l の (generalized) Jordan chain ($z=a$ において $T(z)$ に associate した) とよぶ。また (3.3)－(3.5) をみたす $\{(\varphi_j^0,\cdots,\varphi_j^{l-1});\ j=r_{m-l}+1,\cdots,r_{m-l+1},\ l=1,\cdots,m\}$ を ($z=a$ において $T(z)$ に associate した) Jordan chain の完全な1組とよぶ．上の $\{(\psi_j^0,\cdots,\psi_j^{l-1});\ j=r_{m-l}+1,\cdots,r_{m-l+1},\ l=1,\cdots,m\}$ は，($\bar z=\bar a$ において $T(\bar z)^*$ に associate した) Jordan chain の完全な1組である。$\{(\varphi_j^0,\cdots,\varphi_j^{l-1})\}$，$\{(\psi_j^0,\cdots,\psi_j^{l-1})\}$ がともに Jordan chain の完全な1組で，かつ (3.1) (3.2) により $T(z)^{-1}$ の Laurent 展開の主要部を与えるとき，pair をなすということにする。

iii) $r_0=0\le r_1\le\cdots\le r_m=\alpha(T(a))$ は unique である（完全な1組をなす Jordan chain のとり方によらない），

iv) $\{(\varphi_j^0, \cdots, \varphi_j^{l-1})\}$ (or $\{(\psi_j^0, \cdots, \psi_j^{l-1})\}$) が完全な1組ならば，これと pair をなす完全な1組 $\{(\psi_j^0, \cdots, \psi_j^{l-1})\}$ (resp. $\{(\varphi_j^0, \cdots, \varphi_j^{l-1})\}$) を求めることができる。

証明. 略

系. $T(z)$ は定理3.1のとおりとする. $a \in U$ が $T(z)^{-1}$ の simple pole となる必要十分条件は，$\alpha(T(a)) > 0$ かつ $\mathcal{R}(T(a)) \dotplus T'(a)\mathcal{N}(T(a)) = \mathfrak{X}_1$ なることである.

§4. 応用－閉作用素の摂動.

$A_0 \in \mathcal{L}_0(\mathfrak{X})$, $\rho(A_0) \neq \phi$ とする。$R_0(z) = (z - A_0)^{-1}$, $z \in \rho(A_0)$ とおく。明らかに $R_0(z) \in \mathcal{A}(\rho(A_0); \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$, $R_0(z) \in \mathcal{M}_0(\overline{\rho}(A_0); \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$。$\rho(A_0) \neq \phi$ より $A_0^* \in \mathcal{L}_0(\mathfrak{X}^*)$，かつ $\rho(A_0^*) = \rho(A_0)^* = \{\bar{z} \in \mathbb{C}\ ;\ z \in \rho(A_0)\}$, $\overline{\rho}(A_0^*) = \overline{\rho}(A_0)^*$.

$B \in \mathcal{L}_0(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X})$, $C \in \mathcal{L}_0(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1)$ が次の仮定をみたすとする：

(A.1) $\mathcal{D}(A_0) \subset \mathcal{D}(C)$, $\mathcal{D}(A_0^*) \subset \mathcal{D}(B^*)$.

(A.2) ある $z \in \rho(A_0)$ に対して，$CR_0(z)B \in \mathcal{L}_0(\mathfrak{X}_1)$ が有界な拡張 $Q_0(z) \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}_1)$ をもつ。

(A.3) $\exists z_0 \in \rho(A_0)$; $1 \in \rho(Q_0(z_0))$.

上の仮定のうち (A.1) と (A.2) から次のことが導かれる：

(4.1) i) $CR_0(z) \in \mathcal{A}(\rho(A_0); \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$;

ii) $B^*(z - A_0^*)^{-1} \in \mathcal{A}(\rho(A_0)^*; \mathcal{B}(\mathfrak{X}^*, \mathfrak{X}_1^*))$;

iii) densely defined operator $R_0(z)B$ は有界である，その unique な拡張を $[R_0(z)B]$ で表わすと，$[R_0(z)B] \in \mathcal{A}(\rho(A_0); \mathcal{B}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}))$;

iv) $[R_0(z_1)B] - [R_0(z_2)B] = -(z_1 - z_2) R_0(z_1) [R_0(z_2)B]$;

v) $^{\exists}[CR_0(z)B] = Q_0(z) \in \mathcal{A}(\rho(A_0); \mathcal{B}(\mathfrak{X}_1))$;

vi) $Q(z_1) - Q(z_2) = -(z_1 - z_2) CR_0(z_1) [R_0(z_2)B]$;

vii) $\mathcal{R}([R_0(z)B]) \subset \mathcal{D}(C)$, $C[R_0(z)B] = Q_0(z)$.

証明は Kato [1] による.

$\nabla = \{ z \in \rho(A_0) ; 1 \in \rho(Q_0(z)) \}$ とする. ∇ は $\mathbb{C}$ の open set で，$\nabla \neq \phi$. $z \in \nabla$ のとき $R_1(z) \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ を次のように定義する：

$$(4.2) \qquad R_1(z) = R_0(z) + [R_0(z)B](1 - Q_0(z))^{-1} CR_0(z).$$

$R_1(z)$ は次の性質をもつ：

(4.3) i) $R_1(z) \in \mathcal{A}(\nabla; \mathcal{B}(\mathfrak{X}))$, $CR_1(z) \in \mathcal{A}(\nabla; \mathcal{B}(\mathfrak{X}, \mathfrak{X}_1))$, $[R_1(z)B] \in \mathcal{A}(\nabla; \mathcal{B}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}))$;

ii) $CR_1(z) = CR_0(z) + Q_0(z) CR_1(z)$;

iii) $[R_1(z)B] = [R_0(z)B] + [R_1(z)B] Q_0(z)$;

iv) $R_1(z) = R_0(z) + [R_0(z)B] CR_1(z)$

$\qquad = R_0(z) + [R_1(z)B] CR_0(z)$;

v) $\mathcal{R}([R_1(z)B]) \subset \mathcal{D}(C)$, $Q_1(z) = C[R_1(z)B] \in \mathcal{A}(\nabla; \mathcal{B}(\mathfrak{X}_1))$;

vi) $(1-Q_0(z))(1+Q_1(z)) = (1+Q_1(z))(1-Q_0(z)) = 1$.

$z\in\nabla$ のとき，$\mathcal{N}(R_1(z)) = \{0\}$ かつ $\mathcal{R}(R_1(z))^a = \mathfrak{X}$。さらに

(4.4) $\quad R_1(z_1) - R_1(z_2) = -(z_1-z_2)R_1(z_1)R_1(z_2)$.

故に $\mathcal{R}(R_1(z))$ は z によらない。これを $\mathcal{D}$ とかき $A_1\in\mathcal{L}_0(\mathfrak{X})$ を次のように定義する：

$$A_1 = z - R_1(z)^{-1}, \quad \mathcal{D}(A_1) = \mathcal{D}.$$

$z_1 - R_1(z_1)^{-1} = z - R_1(z)^{-1}$ より A_1 の定義は z によらない。しかも $R_1(z) = (z-A_1)^{-1}$，$z\in\nabla$。 $A_1\supset A_0+BC$，$A_0\supset A_1-BC$ は容易にわかる。また $A_1\in\mathcal{L}_0(\mathfrak{X})$ は，方程式 (3.3) iv) より，1 意的に定まる。我々は，A_0 と A_1 の spectre の関係を調べる。

補題 4.1. $\mho$ は領域で，$\mho\subset\overline{\rho}(A_0)$，$1-Q_0(z)\in\mathcal{M}_0(\mho;\mathcal{B}_0(\mathfrak{X}_1))$ とする。ある $z_0\in\mho$ に対して $1\in\rho(Q_0(z_0))$ ならば，$\mho\subset\overline{\rho}(A_1)$.

証明．定理 2.2 と (4.2) より明らか。

定理 4.1. $\rho(A_0)$ を連結成分にわける：$\rho(A_0) = \bigcup\rho_j(A_0)$（従って $\overline{\rho}(A_0) = \bigcup\overline{\rho}_j(A_0)$ となる）。

(i) $Q_0(z)\in\mathcal{A}(\rho_j(A_0);\mathcal{C}_\infty(\mathfrak{X}_1))$ かつある $z_j\in\rho_j(A_0)$ に対して $1\in\rho(Q_0(z_j))$ ならば，$\overline{\rho}_j(A_0)$ は $\overline{\rho}(A_1)$ のある連結成分．

(ii) (i) の仮定が各 j について成立し，$\sigma(A_0)$ が内点をもたないならば，$\overline{\rho}(A_0) = \overline{\rho}(A_1)$（このときは $\sigma_e(A_0) = \sigma_e(A_1)$）。

証明．補題 2.2，定理 2.3 および $\overline{\rho}_j(A_0)$ が open なることから明らか。

仮定(A.3)より $R_j(z_0)=\tilde{A}_j$, $\tilde{A}_1-\tilde{A}_0=DF$, $D=[R_0(z_0)B]$, $F=(1-Q_0(z_1))^{-1}CR_0(z_0)$ とおくと，定理4.1をいくらか拡張できる。たとえば，(i)の条件は，$Q_0(z)-Q_0(z_j)\in\mathcal{A}(\rho_j(A_0);\mathcal{C}_\infty(\mathcal{X}_1))$ におきかえてもよい。

また $A_0, A_1\in\mathcal{L}_0(\mathcal{X})$, $\rho(A_0)\cap\rho(A_1)\ni{}^\exists z_0$; $R_1(z_0)-R_0(z_0)=DF$, ${}^\exists D\in\mathcal{B}(\mathcal{X}_1,\mathcal{X})$, ${}^\exists F\in\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{X}_1)$ なる仮定から出発して，$\tilde{Q}_0(\tilde{z})=F(\tilde{z}-R_0(z_0))^{-1}D$, $\tilde{z}=(z_0-z)^{-1}$, に適当な条件を与えることにより定理4.1をいくらか一般な形で述べることもできる。

次に補題4.1の仮定のもとで，Weinstein Aronszajn の公式のある variant を与える。定理2.1（または2.2）の証明のときと同じ考え方で，各 $a\in U$ に対して，a のある近傍 $U(a)$ をとると，$T(z)\in\mathcal{A}(U(a);\mathcal{B}(\mathcal{X}_1))$, $S(z)\in\mathcal{M}_0(U(a);\mathcal{C}_0(\mathcal{X}_1))$ が存在して，$(1-T(z))^{-1}\in\mathcal{A}(U(a);\mathcal{B}_0(\mathcal{X}_1))$ かつ $z\in U(a)$ で

(4.5) $\quad 1-Q_0(z)=(1-S(z))(1-T(z))$

が成立するようにできる。§1.2の定義で，

(4.6) $\quad w(z)=\det(1-S(z))$, $z\in U(a)$

とおく。$w(z)\in\mathcal{M}(U(a))$; $w(z)\not\equiv 0$ は明らか。簡単な計算により

(4.7) $\quad \dfrac{w'(z)}{w(z)}=-\operatorname{tr}(1-S(z))^{-1}S'(z)$

を得る。$w(z)\in\mathcal{M}(U(a))$ より，各 $b\in U(a)$ で $w(z)$ は次の形の

展開をもつ：

(4.8) $$w(z) = \sum_{j=n}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad c_n \neq 0, \quad -\infty < n < \infty.$$

このとき我々は，$n(b; w) = n$ とおく。明らかに

(4.9) $$n(b; w) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C(b,\varepsilon)} \frac{w'(z)}{w(z)}\,dz$$
$$= \frac{-1}{2\pi i}\oint tr\,(1-S(z))^{-1} S'(z)\,dz$$
$$= \frac{-1}{2\pi i}\, tr \oint (1-Q_0(z)) Q_0'(z)\,dz.$$

実際. $(1-Q_0(z))^{-1} Q_0'(z) = (1-T(z))^{-1}(1-S(z))^{-1}[(1-S(z))T'(z) + S'(z)(1-T(z))] = (1-T(z))^{-1}T'(z) + (1-T(z))^{-1}(1-S(z))^{-1}S'(z)(1-T(z))$

であるから。$Q_0'(z) = -CR_0(z)[R_0(z)B]$ を用いて，

$$(1-Q_0(z))(-Q_0'(z)) = (1-Q_0(z))^{-1} C R_0(z)[R_0(z)B]$$
$$= CR_1(z)[R_0(z)B].$$

故に次の式を得る：

$$n(b; w) = \frac{1}{2\pi i}\, tr \oint CR_1(z)[R_0(z)B]\,dz.$$

$\bar{U}(a) \subset \bar{\rho}(A_0) \cap \bar{\rho}(A_1)$ を用いると，

$$tr\oint CR_1(z)[R_0(z)B]\,dz = tr\oint [R_0(z)B]\,CR_1(z)\,dz$$
$$= tr\oint \{R_1(z) - R_0(z)\}\,dz.$$

故に，

(4.10) $$n(b; w) = \frac{1}{2\pi i}\left\{tr\oint R_1(z)\,dz - tr\oint R_0(z)\,dz\right\}$$
$$= n(b; A_1) - n(b; A_0),$$

ここに $n(b; A_j)$ は，$b \in \rho(A_j)$ ならば 0，$b \in \sigma_p(A_j)$ ならば A_j の固有値 b の代数的重複度を表わす。

定理4.2. 補題4.2の仮定のもとに，各$a \in \mho$のある近傍で(4.5)，(4.6)により$w(z)$を定義する。そうすると，Weinstein-Aronszajnの公式(4.10)がaの同じ近傍で成立する。

注意. $\mathfrak{X}_1$がHilbert spaceならば，$Q_0(z) \in \mathcal{M}_0(\mho; \mathcal{C}_p(\mathfrak{X}_1))$のときには，$\nu \geq p$として$\det_\nu(1-Q_0(z)) = w(z)$なるorder νのdeterminantを定義することができる。このとき$\nu > 1$ならば，$w(z)$は$a \in \sigma_p(A_0)$をessential singularityとする。しかし$w(z)$の特異点と零点は$\mho$内で離散集合をなし，Weinstein-Aronszajnの公式は，次の形で成立つ：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{w'(z)}{w(z)}dz = n(b; A_1) - n(b; A_0).$$

この場合は，$\mho$全体で同一の$w(z) = \det_\nu(1-Q_0(z))$を用いることができる。

文　献

[1] Kato, T., Wave operators and similarity for some non-self-adjoint operators, Math. Ann. 162 (1966) 258-279.

[2] Schechter, M., Fredholm operators and the essential spectrum, Lecture note, Courant Inst. Math. Sci. New York Univ. (1965)

[3] Visik, M.I. and Lyusternik, L.A., Solution of some perturbation problems in the case of matrices and self-adjoint or non-

self-adjoint equations, Russian Math. Surveys, 15 no. 3 (1960) 1–73.