数理解析研究所講究録
第39巻 1968年 105-129

補間空間と函数近似

東大 理学部 小松彦三郎

1. 序

われわれの目標は，Poisson 核あるいは Gauss 核による積分変換など線型の積分型函数近似の近似度と函数の正則性の関係について，Bernstein 型および Jackson 型の定理を証明することである．しかし，この他に二つばかりの動機あるいは問題がある．

まず第一は Poisson 積分についての Fatou および Riesz [16] の理論である．これは2位の微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y)$$

の単独初期値問題：

$$f(x, 0) = f(x)$$

が $L^p(R)$ において附帯条件

$$\| f(x, y) \|_{L^p(R)} \leq M < \infty, \quad 0 < y < \infty$$

の下で一意にとけ，well posed であることを述べている．

この一見不思議な事実がなりたつ根拠を明らかにして，一般化したい．

第一は Hardy の研究 [6] である．彼はそこで Weierstrass の函数：

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^{-pk} \exp(i b^k x),$$

ただし $0 < p < 1$, $b > 1$,

が一様に $Lip(p)$ に属し，かつどの点 x においても $Lip(p+\varepsilon)$ には属さないことをはじめて証明したのであるが，彼はそれを $f(x)$ の Poisson 積分：

$$f(x+iy) = \sum_{k=1}^{\infty} b^{-pk} \exp(i b^k (x+iy)),\ y > 0$$

の $y \to 0$ のときの挙動を調べることによってなしとげた．すなわち，このとき点 x において $f(x)$ が $Lip(\mu)$ に属することと，$y \to 0$ のとき $(\partial/\partial x) f(x+iy) = O(y^{\mu-1})$ は同等となり，後の評価は $\mu \leq p$ でなければなりたたない．

このような函数の正則性と積分近似の導函数の増大度との関係を一般化して論じたい．われわれの方法はまだ各点での正則性を扱うには不充分であるが，一様な正則性は取扱うことができる．

この講演では，以上の問題を Lions-Peetre [13] の補間空間の理論および Komatsu [11] [12] の作用素の分数巾の

理論の応用として論ずる．上の問題は抽象的にはすでにこれらの論文において解かれているといってよい．

2．補間空間

いわゆる *real method* による補間空間の理論のあらましを Lions-Peetre [13]，Peetre [15] 等に従って述べよう．

まず記号を導入する．X が Banach 空間，そして $1 \leq p \leq \infty$ のとき，$L_*^p(X)$ でもって

$$\|u\|_{L_*^p(X)} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|_X^p \frac{dt}{t}\right)^{1/p} < \infty$$

をみたす半直線 $(0, \infty)$ 上の X 値可測函数 u 全体の集合を表わす．たゞし，$p = \infty$ のときは通例のように

$$\|u\|_{L_*^\infty(X)} = \operatorname{ess.sup} \|u(t)\|$$

とする．$L_*^p(X)$ は $\|u\|_{L_*^p(X)}$ をノルムとする Banach 空間になる．なお指数として $p = \infty-$ も許し，$L_*^{\infty-}(X)$ は $L_*^\infty(X)$ の元で $t \to 0$ または $t \to \infty$ のとき $u(t) \to 0$ をみたすものの全体の作る閉部分空間とする．

さて，X_0，X_1 をある Hausdorff 線型位相空間 $\mathcal{E}$ に連続的に含まれる二つの Banach 空間とする．このとき，$0 < \theta < 1$ および $1 \leq p \leq \infty$ または $p = \infty-$ を指数とする補間空間 $(X_0, X_1)_{\theta p}$ を，

$$t^{\theta} u(t) \in L_*^p(X_0)$$
$$t^{\theta-1} u(t) \in L_*^p(X_1)$$

をみたす $u(t)$ を用いて，$\mathcal{E}$ における積分

$$x = \int_0^{\infty} u(t) \frac{dt}{t}$$

として表わされる元 x 全体の集合と定義する．$(X_0, X_1)_{\theta p}$ は

$$\|x\|_{\theta p} = \inf \left\{ \|t^{\theta} u(t)\|_{L_*^p(X_0)} + \|t^{\theta-1} u(t)\|_{L_*^p(X_1)} ; x = \int u(t) \frac{dt}{t} \right\}$$

をノルムとする Banach 空間である．

$(X_0, X_1)_{\theta p}$ には他にもいろいろ同値な定義が知られている（[13]，[15] 等を参照せよ）．

(i). $X_0 + X_1$ に含まれる Banach 空間 X が $(X_0, X_1)_{\theta 1}$ を含むための必要かつ十分な条件は

(1) $$\|x\|_X \leq C \|x\|_{X_0}^{1-\theta} \|x\|_{X_1}^{\theta}, \quad x \in X_0 \cap X_1$$

がなりたつことである．

(ii). $p \leq q$ ならば $(X_0, X_1)_{\theta p} \subset (X_0, X_1)_{\theta q}$．
したがって，任意の $X = (X_0, X_1)_{\theta p}$ に対して評価(1)が成立する．

(iii) もし $X_0 \supset X_1$ ならば，$\theta \leq \varphi$ のとき p, q の如何にかゝわらず $(X_0, X_1)_{\theta p} \supset (X_0, X_1)_{\varphi q}$ がなりたつ．

(iv). $1 \leq p \leq \infty$ ならば, $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ の中で $X_0 \cap X_1$ は稠密である.

$(X_0, X_1)_{\theta,p}$ が補間空間と名づけられる理由は次の補間定理にある.

(v). T が X_0 を Y_0 に, また X_1 を Y_1 にうつす有界一次作用素ならば, T は $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ を $(Y_0, Y_1)_{\theta,p}$ にうつす有界一次作用素である.

Banach 空間 X が $K_\theta(X_0, X_1)$ に属すとは

$$(X_0, X_1)_{\theta,1} \subset X \subset (X_0, X_1)_{\theta,\infty}$$

がなりたつことと定義する.

(vi). $Y_0 \in K_{\theta_0}(X_0, X_1)$, $Y_1 \in K_{\theta_1}(X_0, X_1)$ かつ $\theta_0 < \theta_1$ ならば

$$(Y_0, Y_1)_{\theta,p} = (X_0, X_1)_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1,\, p}.$$

3. 作用素の分数巾

この節でのべる作用素の分数巾の理論は Balakrishnan [1], Kato [9], Watanabe [19], Komatsu [11], [12] などによる.

分数巾 A^α を定義する作用素 A は Banach 空間 X での閉一次作用素であって条件

$$\text{(H)} \qquad \|\lambda(\lambda + A)^{-1}\| \leq M < \infty, \quad 0 < \lambda < \infty$$

をみたすものとする．ただし，$(0,\infty)$ がレゾルヴェント集合 $\rho(-A)$ に含まれることを仮定する．

X が反射的もしくは $(\lambda+A)^{-1}$ がある λ に対して弱コンパクトならば A の定義域 $D(A)$ は稠密である．しかし一般にはそうでない．

(H) は半直線 $(0,\infty)$ 上のみの評価であるが，このような作用素 A に対しては $0\le\omega<\pi$ をみたす ω が存在して $\{\lambda\in\mathbb{C};\ |\arg\lambda|<\pi-\omega\}$ が $\rho(-A)$ に含まれ，任意の $\varepsilon>0$ に対して

$$\|\lambda(\lambda+A)^{-1}\|\le M_\varepsilon<\infty,\quad |\arg\lambda|<\pi-\omega-\varepsilon$$

をみたす M_ε が存在する．

$D(A)$ が稠密，かつ上の角度 ω を指定した作用素 A を ω 型の作用素という．

T_t が有界な連続半群，$-A$ がその生成作用素ならば，A は $\pi/2$ 型である．しかし，$\pi/2$ 型の作用素 A で $-A$ が連続半群を生成しないものがある．例については Phillips [8] または Komatsu [11] をみよ．

連続半群 T_t が角域 $|\arg t|<\Phi$ まで解析的に接続され，任意の $\varepsilon>0$ に対して角域 $|\arg t|\le\Phi-\varepsilon$ 上一様に有界であるとき，T_t を Φ 型の解析的半群という．作用素 A が $\omega<\pi/2$ をみたす ω 型の作用素であることと，$-A$

が $\pi/2-\omega$ 型の解析的半群を生成することは同等である．
ω 型の解析的半群を一般に有界な解析的半群ということにする．

(H) をみたす作用素 A および $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，もっともな巾乗 A^α を定義することができる．

ここでは簡単のため $D(A)$ が稠密，かつ $Re\,\alpha > 0$ とする．このときなりたつ主な性質は次の通りである．

(i). $\alpha = n$ が整数のとき，　$A^\alpha = A^n$;

(ii). 加法性．

$$A^\alpha A^\beta = A^{\alpha+\beta} \quad , \quad Re\,\alpha > 0,\ Re\,\beta > 0;$$

(iii). 乗法性．　A が ω 型，かつ $0 < \alpha < \pi/\omega$ のとき，A^α は $\alpha\omega$ 型であり，

$$(A^\alpha)^\beta = A^{\alpha\beta} \quad , \quad Re\,\beta > 0;$$

(iv). 解析性および凸性　$0 < Re\,\beta < Re\,\alpha$ ならば，$D(A^\beta) \supset D(A^\alpha)$，かつ $x \in D(A^\alpha)$ に対して $A^\beta x$ は β の函数として解析的である．また，α および $\max\{|\arg\beta|, |\arg(\alpha-\beta)|\}$ にのみ関係する定数 C が存在して

$$\|A^\beta x\| \le C\,\|x\|^{1-Re\beta/Re\alpha}\,\|A^\alpha x\|^{Re\beta/Re\alpha}, \quad x \in D(A^\alpha)$$

がなりたつ．

4. $(X, D(A^\alpha))$ の補間空間

A が (H) をみたす閉作用素の場合，X と $D(A^\alpha)$ の補間空間について次のような Lions-Peetre [13] および Komatsu

[12] の結果がある.

(i). k が正の整数のとき, $D(A^k)$ は $\|x\| + \|A^k x\|$ をノルムとする Banach 空間である. $0 < \sigma < k$ とする補間空間 $(X, D(A^k))_{\sigma/k, p}$ は σ と p のみによって定まる空間である. これを $D_p^\sigma(A)$ とかく.

(ii). $x \in D_p^\sigma(A)$ であるための必要十分条件は σ より大きい (一つの) 整数 k に対して

$$\lambda^\sigma (1 - \lambda(\lambda + A)^{-1})^k x \in L_*^p(X)$$

がなりたつことである. (i), (ii) では $D(A)$ が稠密であることは必要でない.

(iii). $-A$ が有界な連続半群 T_t を生成するとき,

$x \in D_p^\sigma(A) \iff$ σ より大きい整数 k に対して

$$t^{-\sigma}(1 - T_t)^k x \in L_*^p(X).$$

(iv). $-A$ が有界な解析的半群 T_t を生成するとき,

$x \in D_p^\sigma(A) \iff$ $0 < \sigma < \mathrm{Re}\,\beta$ をみたす一つの β に対して

$$t^{\mathrm{Re}\,\beta - \sigma} A^\beta T_t x \in L_*^p(X).$$

(v). $D_1^\sigma(A) \subset D(A^\alpha) \subset D_{\infty-}^\sigma(A)$, $\sigma = \mathrm{Re}\,\alpha$.

これから $0 < \sigma < \mathrm{Re}\,\alpha$ のとき

$$D_p^\sigma(A) = (X, D(A^\alpha))_{\sigma/\mathrm{Re}\,\alpha,\, p}$$

であることがわかる.

(vi). $0 < \mathrm{Re}\,\alpha < \sigma$ のとき,

$$x \in D_p^{\sigma}(A) \Longleftrightarrow x \in D(A^{\alpha}) \text{ かつ } A^{\alpha}x \in D_p^{\sigma-\mathrm{Re}\,\alpha}(A).$$

(vii). もしある $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ とある p に対して

$$D(A^{\alpha}) = D_p^{\mathrm{Re}\,\alpha}(A)$$

がなりたてば, 任意の α に対してこの関係がなりたつ.

A が Hilbert 空間で定義された正規作用素または maximal accretive ならば $p=2$ で上の関係がなりたつ (Kato [10]). 一方いかなる p に対してもこの関係がなりたたない例が [12] にあたえられている.

なお, (i), (ii) は Grisvard [5], $\beta = 1, 2$ に対する (iv) は Berens [2] にもあたえられている.

(ii) および (iii) は函数近似の近似度と函数の正則性の関係を, また (iv) は近似函数の導函数の増大度と函数の正則性の関係を抽象的に述べたものである.

(vi) からもいろいろ興味ある事実が導きだせる. 例えば, X を $\mathbb{R}$ 上の有界かつ一様連続な函数全体の作る Banach 空間とし, $u(x) \in X$ に対して

$$T_t u(x) = u(x-t)$$

とすると, T_t は有界な連続半群となる. T_t の生成作用素

を $-A$ とすると，正に $A=\frac{d}{dx}$ である．(iii) によって，

$$
\begin{aligned}
&u(x)\in D_\infty^\sigma(A)\\
&\iff \|u(x)-u(x-t)\|=O(t^\sigma),\quad 0<\sigma<1\\
&\iff \|u(x)-2u(x-t)+u(x-2t)\|=O(t^\sigma),\quad 0<\sigma<2\\
&\iff \|u(x)-3u(x-t)+3u(x-2t)-u(x-3t)\|=O(t^\sigma),\\
&\iff \text{-----}\qquad\qquad 0<\sigma<3.
\end{aligned}
$$

(vi) によれば，$u(x)\in D_\infty^{1+\rho}(A)$，$0<\rho<1$，$\iff$ $u'(x)\in X$ かつ $u'(x)\in D_\infty^\rho(A)$ である．上のような評価から $u(x)$ の微分可能性を証明することは必ずしも初等的でない．特に $k\geqq 3$ をとったときは Zygmund [20] II巻80頁で述べられているような論法が使えない．なお，$u(x)\in D_\infty^1(A)$ は Zygmund の smooth function である．

5. 共役作用素.

A が (H) をみたす作用素のとき，A の制限 A_+ を $D(A_+)=\{x\in D(A);\ Ax\in\overline{D(A)}\}$ によって定義すると A_+ は $\overline{D(A)}$ での作用素として (H) をみたし，稠密な定義域をもつ．A と A_+ には次の関係がなりたつ．

(i). $D_p^\sigma(A)=D_p^\sigma(A_+)\subset\overline{D(A)}$, $\sigma>0$.

(ii) $A^\alpha=A_+^\alpha$, $\mathrm{Re}\,\alpha>0$.

Xがある Banach 空間Yの共役空間，BがYにおいて（H）をみたす稠密な定義域をもつ作用素である場合，AをBの共役作用素とすればAもまたXにおいて（H）をみたす作用素である．Aの定義域$D(A)$はXにおいて汎弱位相に関して稠密であるが，強位相に関しては必ずしも稠密ではない．（H）をみたす作用素でありながら，定義域が稠密にならない作用素として応用上あらわれるのは多くこのような共役作用素である．なお$-B$が有界な連続半群S_tを生成するとき，S_tの共役作用素をT_tとかくことにする．

(iii). A^αはB^αの共役作用素$(B^\alpha)'$を$\{x \in D((B^\alpha)'); (B^\alpha)'x \in \overline{D(A)}\}$に制限したものに等しい．

(iv). $-B$が有界な連続半群を生成するとき，$x \in \overline{D(A)}$と$T_t x$が$t \geq 0$で強連続なことは同等である．なお

$x \in D_p^\sigma(A) \iff T_t x$が可測かつ

$$t^{-\sigma}(1-T_t)^k x \in L_*^p(X), \quad k > \sigma.$$

(v). $-B$が有界な解析的半群を生成するとき，$T_t x$は原点を除いて解析的であって，$D(A^k)$に属する．

$x \in D_p^\sigma(A) \iff$

$$t^{k-\sigma} A^k T_t x \in L_*^p(X), \quad k > \sigma.$$

(iv) の前半は Phillips [8] による.

6. 抽象的な Fatou-Riesz の理論と Hardy の定理.

A を (H) をみたし，かつ稠密な定義域をもつ作用素とする. このとき，§3 (iii) によって $A^{1/2}$ はある $\omega < \pi/2$ に対して ω 型である. したがって $-A^{1/2}$ は有界な解析的半群 $P_t = \exp(-tA^{1/2})$ を生成する.

$u_0 \in X$ のとき，$u(t) = P_t u_0$ とおくと，$u(t)$ は次の性質をもつ：

(i). $u(t)$ は $t > 0$ で解析的，$t \geq 0$ で連続，$t > 0$ のとき $D(A)$ に属する；

(2) $$\frac{d^2}{dt^2} u(t) = A u(t), \quad 0 < t < \infty ;$$

(3) $$\| u(t) \| \leq C < \infty, \quad 0 < t < \infty ;$$

(4) $$\underset{t \to 0}{s\text{-}\lim}\, u(t) = u_0 .$$

(ii). 逆に，X 値函数 $u(t)$ が $t > 0$ で 2 回弱微分可能かつ $D(A)$ に属して，(2), (3) およびある列 $t_n \to 0$ に対して

$$w\text{-}\lim u(t_n) = u_0$$

をみたすならば，$u(t)$ は $P_t u_0$ に等しい.

この定理は幾分弱い形で Balakrishnan [1] によって証

明された.

次に, X が Y の共役空間, A が Y で (H) をみたす作用素 B の共役作用素である場合を考える. B の定義域はもちろん稠密と仮定する. このときは, $\exp(-tB^{1/2})$ の共役作用素を P_t とおく.

(iii). $u_0 \in X$ に対して, $u(t) = P_t u_0$ とすると, $u(t)$ は $t > 0$ で解析的, $t \geqq 0$ で汎弱連続, $t > 0$ のとき $D(A)$ に属し, (2), (3) および

$$(5) \qquad w^*\text{-}\lim_{t \to 0} u(t) = u_0$$

をみたす.

(iv). X 値函数 $u(t)$ が $t > 0$ で2回汎弱微分可能かつ $D(A)$ に属して (2), (3) およびある列 $t_n \to 0$ に対して

$$w^*\text{-}\lim u(t_n) = u_0$$

をみたすならば, $u(t) = P_t u_0$.

$D(A)$ が稠密な場合も, A が共役作用素である場合も次の形で抽象的な Hardy の定理がなりたつ.

(v). $x \in D_p^\sigma(A) \Longleftrightarrow$ ある整数 $k > \sigma$ に対して

$$t^{2k-2\sigma} A^k P_t x \in L_*^p(X).$$

$$\Longleftrightarrow \ \mathrm{Re}\,\beta > \sigma \text{ に対して}$$

$$t^{2\mathrm{Re}\beta - 2\sigma} A^\beta P_t x \in L_*^p(X).$$

P_t は抽象的な意味の Poisson 積分である.

7. 飽和族

§4 (ii), (iii), §5 (iv) (そして §4 (iv), §5 (v), §6 (v)) を近似度を判定する定理とみなせば, これらで考察の対象となっている $k > \sigma$ の場合ばかりでなく, $k \leqq \sigma$ の場合を考えることも興味がある.

一般に, $k < \sigma$ あるいはもっと弱く $k = \sigma$, $p = \infty$ でこれらの近似定理がなりたつためには $x \in N(A) = \{x ; Ax = 0\}$ であることが必要十分である.

すなわち, これらの近似法は位数 k で飽和する.

$k = \sigma$, $p = \infty$ でこれらの近似定理がなりたつ元全体は対応する近似法に関する飽和族と呼ばれる.

X が反射的であるか, A が共役作用素の場合, 飽和族は $D(A^k)$ と一致する.

以上の結果のうち, T_t による近似法に関するものは Butzer, Berens ([2], および [3] に引用されている論文を参照せよ) および de Leeuw [4] 等によっても得られている.

なお近似が飽和に達した後も, 適当な有限項をひきされば

さらに高い近似度が得られる．$\lambda(\lambda+A)^{-1}$ による近似については [11]，T_t による近似については Butzer-Tillmann の結果がある．飽和族についてはなお Sunouchi-Watari [17] を参照せよ．

抽象的な理論は以上で終る．この後これらを用いて函数近似についての結果を導き出そう．

8. Lipschitz 空間

$\mathbb{R}^n$ 上の Sobolev 空間は $L^p(\mathbb{R}^n)$ の元で L^p の意味で k 回微分可能なもの全体として定義される．この微分の位数 k を分数におきかえたものが Nikolskii，Uspenskii，Besov らによって研究されている．彼らの空間は互に少しずつ異っているが（[14] を参照），多くは $L^p(\mathbb{R}^n)$ と Sobolev 空間の補間空間として理解することができる．

Taibleson [18] にならって，これらの補間空間を Lipschitz 空間と呼ぶことにしよう．Hardy-Littlewood の Lipschitz 族の函数の研究 [7] を以上に述べた一連の研究の先駆とみなすことができるからである．

以下，p は $1\leq p\leq\infty$ をみたす数とし，X は，$1<p<\infty$ のとき $L^p(\mathbb{R}^n)$ を，$p=1$ のとき $L^1(\mathbb{R}^n)$ または $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)=\{\mathbb{R}^n$ 上の有限測度$\}$ を，$p=\infty$ のとき $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)=\{f\in C(\mathbb{R}^n); f:$ 有界かつ一様連続$\}$ または $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ を意味

する．$p=1$ および ∞ に対しては二つの Banach 空間が対応するが，大きい方の空間はそれぞれ $C_\infty(\mathbb{R}^n)=\{f\in C(\mathbb{R}^n)\,;\, f(x)\to 0\ |x|\to\infty\}$ あるいは $L^1(\mathbb{R}^n)$ の共役空間であり，小さい方の空間はその中で平行移動が強連続であるような最大の閉部分空間である．Lipschitz 空間の定義はどちらの空間をとるかによらないことが示される．

$P(D)=\sum a_\alpha D^\alpha$ が定数係数の微分作用素であるとき，同じ $P(D)$ でもって X における超函数の意味の微分作用素 $P(D)$ を表わす．すなわち $D(P(D))=\{f\in X\,;\, P(D)f\in X\}$．また k が正の整数のとき，$D(\nabla^k)=\bigcap_{|\alpha|=k} D(D^\alpha)$ とかく．$D(P(D))$，$D(\nabla^k)$ はグラフノルムを入れることにより，Banach 空間になる．

$\sigma>0$，$1\leq q\leq\infty$ または $q=\infty-$ のとき，$\sigma<k$ をみたす整数 k をとり

$$\Lambda(\sigma,p,q)=(X,\, D(\nabla^k))_{\sigma/k,\,q}$$

と定義し，一般に Lipschitz 空間と呼ぶ．これは整数 k のとり方にはよらない．

特に σ が整数でないとき，

$$\Lambda(\sigma,\infty,\infty)=\mathrm{Lip}\,\sigma=\Lambda_\sigma$$
$$\Lambda(\sigma,\infty,\infty-)=\mathrm{lip}\,\sigma=\lambda_\sigma$$

$$\Lambda(\sigma, p, \infty) = Lip(\sigma, p) = \Lambda_\sigma^p$$
$$\Lambda(\sigma, p, \infty-) = lip(\sigma, p) = \lambda_\sigma^p$$

そして

$$\Lambda(1, \infty, \infty) = \Lambda_*$$
$$\Lambda(1, \infty, \infty-) = \lambda_*$$

である(右辺については[20]をみよ).

9. 微分作用素 $A(D)$.

$A(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha$ を

(6) $\quad \lambda + A(\xi) \neq 0, \quad \lambda \geqq 0, \xi \in R^n, \xi \neq 0,$

をみたす定数係数の微分作用素とする. (6)で特に $\lambda = 0$ とすればわかるように $A(D)$ は楕円型である.

$n = 1$ のときは $\pm \frac{d^{2l+1}}{dx^{2l+1}}$, $\left(-\frac{d^2}{dx^2}\right)^l$ などが, $n \geqq 2$ のときは $(-\Delta)^l$ などが例になる.

(i). $A(D)$ は X において条件 (H) をみたす.

これは $1 + A(D)$ の基本解が $L^1(R^n)$ に属することから証明される.

(ii). $\Lambda(m, p, 1) \subset D(A(D)) \subset \Lambda(m, p, \infty)$.

$1 < p < \infty$ のときは

$$D(A(D)) = D(\nabla^m)$$

がなりたつ.

$1 < p < \infty$ のときは Mihlin の定理によって下の事実が容易に証明され，それから上の関係が示される．$p = 1$ または ∞ のときも前半は $D(\nabla^m) \subset D(A(D))$ より明らかである．後半は方程式 $A(D)u = f$ の解の正則性を意味し，証明はよりむつかしい．

(iii). $\mathbb{R}^{n+1}$ で作用素 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - A(D)$ は準楕円型である．さらに

(7) $$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t, x) = A(D) u(t, x)$$

の半空間 $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\ t > 0\}$ での解 $u(t, x)$ が，

(8) $$\| u(t, x) \|_X \leq C < \infty, \quad 0 < t < \infty$$

をみたすならば，$u(t, x)$ は t と x の函数として解析的であって，X での方程式

(9) $$\frac{d^2}{dt^2} u(t) = A(D) u(t), \quad 0 < t < \infty$$

の解になる．したがって，初期値 $u_0(x) \in X$ (大きい方の空間) が存在して

$$u(t, x) = P_t u_0(x),$$

ただし $P_t = \exp(-t A(D)^{1/2})$ である．すなわち有界条件 (8) つきの (7) の解は実は

(10) $$\frac{d}{dt} u(t) = -A(D)^{1/2} u(t)$$

の解である.

(iv). 逆に, $u_0(x) \in X$ のとき, $u(t,x) = P_t u_0(x)$ は附帯条件(8)つきの(7)の解を与え, $u_0(x)$ が小さい方の空間に入っているならば

(11) $$\| u_0(x) - u(t,x) \|_X \longrightarrow 0 , \quad t \longrightarrow 0 ,$$

$u_0(x)$ が大きい方の空間に入っているならば汎弱収束する.

特に, $A(D) = -\Delta$ のとき, 以上は Fatou-Riesz の定理を与える. 実際, $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - A(D)$ は R^{n+1} のラプラシアンであり, $P_t u_0$ は u_0 の Poisson 積分である.

$A(D) = \Delta^2$ のときは, $A(D)^{1/2} = -\Delta$ であることが示される. したがって (10) は熱方程式に他ならない. それ故 P_t は Gauss 核をもつ積分変換によって与えられる.

また, $n = 1$, $A(D) = \frac{d}{dx}$ のとき, (7) は x と t をとりかえた熱方程式になる. したがって, 半直線上の熱方程式は任意に境界値 $u(t,0) \in L^p(R)$ を指定したとき, 少くとも一つ大局的な解をもつ.

10. 函数近似.

Lipschitz 空間 $\Lambda(\sigma, p, q)$ の定義と, §9 (ii) および §2 (vi) によって

$$\Lambda(\sigma, p, q) = D_q^{\sigma/m}(A(D))$$

が得られる. したがって次はいずれも $u \in \Lambda(\sigma, p, q)$ と同値な条件を与える.

(i). $0 < \sigma < mk$ に対して

$$\lambda^{\sigma/m}(1 - \lambda(\lambda + A(D))^{-1})^k u \in L_*^q(X).$$

(ii) $0 < \sigma < mk/2$ に対して

$$\lambda^{2\sigma/m}(1 - \lambda(\lambda + A(D)^{1/2})^{-1})^k u \in L_*^q(X).$$

(iii) $0 < \sigma < mk/2$ に対して

$$t^{-2\sigma/m}(1 - P_t)^k u \in L_*^q(X).$$

(iv) $0 < \sigma < mk$ に対して

$$t^{2k - 2\sigma/m} A(D)^k P_t u \in L_*^q(X).$$

(v) $0 < \sigma < k$ に対して

$$t^{(2k-2\sigma)/m} \nabla^k P_t u \in L_*^q(X).$$

$A(D)$ 自身が有界な連続半群または有界な解析的半群を生成するときは,その半群を用いた類似の定理がなりたつ.

積分型函数近似について知られている定理のいくつかは上の定理の特別な場合になる.

$A(D) = -\Delta$ および Δ^2 に対する (iii) はそれぞれ Poisson 近似および Gauss 近似の近似度と正則性の関係を与える.

すなわち，それぞれ $0<\sigma<1$ あるいは $0<\sigma<2$ のとき，
$u(x)\in\Lambda(\sigma,p,\infty)$ と

$$\left\| u(x)-\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}\int\frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}u(y)\,dy\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=O(t^{\sigma}),\quad t\to 0$$

あるいは

$$\left\| u(x)-\frac{1}{2^n\pi^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}}}\int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u(y)\,dy\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=O(t^{\sigma/2}),\quad t\to 0$$

は同等である．

(iv) および (v) は Poisson 積分あるいは Gauss 積分の導函数の増大度と正則性の関係を与える．すなわち，
$0<\sigma<1$ のとき，$u(x)\in\Lambda(\sigma,p,\infty)$ と

$$\left\|\nabla\int\frac{t}{(t^2+|x-y|^2)^{\frac{n+1}{2}}}u(y)\,dy\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=O(t^{\sigma-1}),\quad t\to 0$$

あるいは

$$\left\|\nabla\int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u(y)\,dy\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=O(t^{\frac{\sigma-1}{2}}),\quad t\to 0$$

あるいは

$$\left\|\Delta\int e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}u(y)\,dy\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=O(t^{\frac{\sigma-2}{2}}),\quad t\to 0$$

は同等である．

これらの結果は1次元のときは Hardy-Littlewood [7] に

よって，多次元のときは Taibleson [18] によって全く別の方法で証明された．

最後に (i) の例を示そう．$A(D) = -\Delta$ のとき，

$$\lambda(\lambda-\Delta)^{-1}u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int \sqrt{\lambda}^{\frac{n+2}{2}} |x-y|^{\frac{2-n}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{\lambda}|x-y|)u(y)dy$$

である．ただし $K_\nu(z)$ は第3種の変形 Bessel 函数

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi i e^{\frac{i\nu\pi}{2}} H_\nu^{(1)}(iz)$$

である．これは n が奇数のとき初等函数で表わすことができる．特に $n=1$ および 3 のときを考えると，$0<\sigma<2$ のとき $u \in \Lambda(\sigma, p, \infty)$ と

$$\left\| u(x) - \frac{\sqrt{\lambda}}{2}\int e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}u(y)dy \right\|_{L^p(R)} = O(\lambda^{-\frac{\sigma}{2}}),\ \lambda\to\infty,$$

$$\left\| u(x) - \frac{\lambda}{4\pi}\int \frac{1}{|x-y|} e^{-\sqrt{\lambda}|x-y|}u(y)dy \right\|_{L^p(R^3)} = O(\lambda^{-\frac{\sigma}{2}}),\ \lambda\to\infty$$

はそれぞれ同等である．

参考文献

[1]. A. V. Balakrishnan: Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them, Pacific J. Math. 10 (1960), 419-437.

[2]. H. Berens: Approximationssätze für Halbgruppenoperatoren in intermediären Räumen, Schriftreihe Math. Inst. Univ. Münster, 32 (1964), 1-59.

[3]. H. Berens - P. L. Butzer; Über die Stetigkeit von Halbgruppen von Operatoren in intermediären Räumen, Math. Ann. 163 (1966), 204-211.

[4]. K. de Leeuw; On the adjoint semi-group and some problems in the theory of approximation Math. Z. 73 (1960), 219-234.

[5]. P. Grisvard; Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications, J. Math. Pure Appl. 45 (1966), 143-206.

[6]. G. H. Hardy: Weierstrass's non-differentiable function, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916),

301-325.

[7]. G. H. Hardy - J. E. Littlewood : Some properties of fractional integrals, I. Math. Z. 27 (1928), 565-606.

[8]. E. Hille - R. S. Phillips : Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 31, New York, 1957.

[9]. T. Kato; Note on fractional powers of linear operators, Proc. Japan Acad. 36 (1960), 94-96.

[10]. T. Kato : Fractional powers of dissipative operators, J. Math. Soc. Japan 13 (1961), 246-274.

[11]. H. Komatsu : Fractional powers of operators, Pacific J. Math. 19 (1966), 285-346.

[12]. H. Komatsu : Fractional powers of operators, II, interpolation spaces, Pacific J. Math. 21 (1967), 89-111.

[13]. J.-L. Lions - J. Peetre : Sur une classe d'espaces d'interpolation, Publ. Math. I.H.E.S. 19 (1964), 5-68.

[14]. S. M. Nikol'skii : On imbedding, continuation

and approximation theorems for differentiable functions of several variables, Uspehi Mat. Nauk 16 (1961), 63-114.

[15]. J. Peetre : Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d'interpolation, Ricerche Mat. 12 (1963), 248-261.

[16]. F. Riesz : Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Math. Z. 18 (1923), 87-95.

[17]. G. Sunouchi - C. Watari : On determination of the class of saturation in the theory of approximation of functions, Proc. Japan Acad. 34 (1959), 477-481.

[18]. M. H. Taibleson : On the theory of Lipschitz spaces of distributions on euclidean n-space, I, principal properties, J. Math. Mech. 13 (1964), 407-479.

[19]. J. Watanabe : On some properties of fractional powers of linear operators, Proc. Japan Acad. 37 (1961), 273-275.

[20]. A. Zygmund, Trigonometric Series, Cambridge, 1959.