数理解析研究所講究録
第 40 巻 1968 年 37-45

ナヴィエ＝ストークス方程式の解に対する一意接続定理

(東大・理) 増 田 久 弥

§ 1. はしがき、 次の方程式を考えよう。

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \mathrm{grad})u = \Delta u - \nabla p$$

$$\mathrm{div}\, u = 0, \quad x \in G, \quad 0 < t < T$$

境界条件は,

$$(2)\qquad u = 0 \quad \text{on } \partial G.$$

ここで, Gは, なめらかな有界超曲面の外部領域,
uは, x, tの3-次元ベクトル値函数, pは, x, tの
スカラー値函数である。 我々の問題は, 次の通りである。
"(1), (2) で その行動が規定されている静止していない
非圧縮性粘性流体の流れが, Gの適当な小部分をとった
とき, その上で, 有限時間たって 静止することが, あ
りえるだろうか?" いいかえると, Navier-Stokes
方程式は, 有限伝播速度の現象をもつか?
上の問に対する我々の結果をのべる前に記号を導入する。

$C_{0,s}^{\infty}(G) = \{\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3);\ \mathrm{div}\,\varphi = 0,\ \varphi \in C_0^{\infty}(G)\}$;

$L_s^2\ (\equiv L_s^2(G)) \equiv$ the closure of $C_{0,s}^{\infty}(G)$ in $L^2(G)$;

$\underline{P}$; $L^2(G)$ から $L^2_s(G)$ の上への直交射影.

A ; $\mathcal{D}(-P\Delta) = \{u ; u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G}),\ \mathrm{div}\, u = 0,\ u = 0 \text{ on } \partial G\}$

$$(-P\Delta)u \equiv -P(\Delta u)$$

なる L^2_s の中の対称作用素 $-P\Delta$ の Friedrichs 拡大を A とする。

X ; $\mathcal{D}(A^{\frac{4}{5}})$ にグラフノルム $\|u\|_X \equiv \|A^{\frac{4}{5}}u\| + \|u\|$ を入れた B-space. ($\|\cdot\|$ は、スカラー積 $(\cdot,\cdot)$ をもつ $L^2(G)$ の中のノルム)

$H^1_{0,s}$ = the completion of $\{u \in C^1_0 ; \mathrm{div}\, u = 0\}$ in the norm of $\|\nabla u\| + \|u\|$.

さて我々の結果は、次の通りである。

<u>定理 1</u>

u を、(1), (2) の解で且 $H^1_{0,s}$ − 値の t $(0<t<T)$ の連続函数とする。そのとき、$u(x,t)$ は $G \times (0,T)$ で(零集合の修正の後に)x, t につき実解析的である。

<u>定理 2</u>

u を定理 1 の中の条件をみたす解とする。もし、G の開部分集合 G_1 $(\neq \emptyset)$ と t_1 $(0<t_1<T)$ で、

$u(x,t_1)=0$, $x\in G_1$, なるものがあれば, uは
$G\times(0,T)$全体で恒等的にzeroである。

<u>定義</u> (1), (2)の解uとは,

(i) $u(x,t)\in L^2_{loc}(G\times(0,T))$

(ii) $\int (u, \mathrm{grad}\,\omega)\,dt=0$ がすべての スカラー

値の $C_0^\infty(G\times(0,T))$ 函数ωに対して成立.

(iii) $\int\{(u,\Phi_t)+(u,\Delta\Phi)+(u,u\cdot\mathrm{grad}\,\Phi)\}dt=0$

が, $\mathrm{div}\,\Phi=0$なるすべてのベクトル値の $C_0^\infty(G\times(0,T))$
函数Φに対して成立する。

§2. 補題.

<u>補題 1</u>

(a) $\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})=H^1_{0,s}$, $\|A^{\frac{1}{2}}u\|=\|\nabla u\|$
for $\forall u\in\mathfrak{D}(A^{\frac{1}{2}})$

(b) $E\Subset G$ なる任意のEに対して, 次の如き定数
$C=C(E)$が存在する。

$$\operatorname*{ess.sup}_{x \in E} |v(x)| \leq C \|v\|_X, \quad v \in X.$$

補題 2

次の如き $u(t)$ の解析的拡大 $u(z)$ が存在する；
$u(z)$ は複素平面中の $(0, T)$ のある近傍 U の中の z の Xー値正則函数であって

$$\frac{\partial (u, \varphi)}{\partial z} = -(u, A\varphi) - ((u \cdot \operatorname{grad}) u, \varphi),$$

$$\varphi \in C^{\infty}_{0,s}, \quad z \in U$$

をみたす.

§3 定理の証明.

定理 1 ⇒ 定理 2

$v(x,t) = \operatorname{rot} u(x,t)$ とおき, (1), の両辺に対して rot を作用させると,

$$(3) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{rot} (u \cdot \operatorname{grad}) u = \Delta v$$

ここで, $v(x,t)$ は, 仮定から定理 1 によって, $G \times (0,T)$ の中で, x, t につき実解析的である。

仮定； $u(x, t_1) = 0 \quad x \in G_1$

と定理 1 により $u(x,t)$ は (x, t につき) 解析的であるか

3,

$$u(x, t_1) = 0 \qquad x \in G$$

又 v の定義より

$$v(x, t_1) = 0 \qquad x \in G$$

をえる。

故に，(3) によって

$$v_t(x, t_1) = [\Delta v - \mathrm{rot}(u \cdot \mathrm{grad})u]_{t=t_1} = 0$$

故に，

(4) $\mathrm{rot}(u_t(x, t_1)) = 0 \qquad x \in G$

他方

$$\mathrm{div}\ u(x, t) = 0 \qquad x \in G$$

より

(5) $\mathrm{div}\ u_t(x, t) = 0$

さらに，$u(\cdot, t) \in H^1_{0,s}$ である。補題 2 より

$u(\cdot, t)$ は X-値解析函数したがって $H^1_{0,s}$-値 C^∞-函数で

あるから

(6) $u_t(x, t) \in H^1_{0,s}$

(4), (5), (6) によって

$$u_t(x, t_1) = 0 \qquad x \in G$$

を，したがって

$$v_t(x, t_1) = 0 \qquad x \in G$$

をえる。(3) を微分すると、

(7) $v_{tt} = \Delta v_t - \mathrm{rot}\,(u_t \cdot \mathrm{grad})\,u - \mathrm{rot}\,(u \cdot \mathrm{grad})\,u_t$

をえるが、右辺は、$t = t_1$ にてゼロとなることがわかるから

(8) $v_{tt}(x, t_1) = 0$ i.e. $\mathrm{rot}\,(u_{tt}(x, t_1)) = 0$

(5)を微分して、

(9) $\mathrm{div}\; u_{tt}(x, t) = 0$

$u(\cdot, t)$ は、$H^1_{0,s}$ 一値 C^∞ 函数より

(10) $u_{tt}(x, t) \in H^1_{0,s}$

(8), (9), (10) より

$$u_{tt}(x, t_1) = 0$$

以下同様にして、

$$\partial^k u(x, t_1) / \partial t^k = 0 \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

をえる。$u(x,t)$ は、t について解析的であるから、

$$u(x, t) = 0 \qquad G \times (0, \infty)$$

をえる。 証明了

定理 1 の証明

$\Omega = \{(\xi, \eta) ; \xi + i\eta \in U\}$ $v(x, z) = \mathrm{rot}_x u(x, z)$

$u(x, \xi, \eta) = u(x, \xi + i\eta)$, $v(x, \xi, \eta) = v(x, \xi + i\eta)$

$(\xi,\eta)\in\Omega$ とおく。(補題 2)によって、$u(\cdot,z)$、$v(\cdot,z)$ は、L^2_s-値正則函数であるから、任意の $\varphi\in C_0^\infty(G)$ に対して、$(u(\cdot,\xi,\eta),\varphi)$、$(v(\cdot,\xi,\eta),\varphi)$ は、ξ と η の調和函数である；

(11) $((u,[\partial^2/\partial\xi^2+\partial^2/\partial\eta^2]\varphi\psi))=0$

(12) $((v,[\partial^2/\partial\xi^2+\partial^2/\partial\eta^2]\varphi\psi))=0$,

$$\varphi\in C_0^\infty(G),\quad \psi\in C_0^\infty(\Omega)$$

ここで、$((\cdot,\cdot))$ は、$L^2(G\times\Omega)$ のスカラー積を示す。$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}-\Delta$ であるから、$(u,-\Delta\varphi)=(v,\mathrm{rot}\,\varphi)$、$\varphi\in C_0^\infty(G)$、をえる。これは、$u\in L^2_s$ より $(u,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\varphi)=0$ に注意すればいい。よって、

(13) $((u,-\Delta\varphi\psi))=((v,\mathrm{rot}\,\varphi\psi))$,

$$\varphi\in C_0^\infty(G),\quad \psi\in C_0^\infty(\Omega).$$

他方 $\mathrm{rot}\,\varphi\in L^2_s$、$\varphi\in C_0^\infty(G)$、に注意すれば、(補題 2) より、

$$\partial(u,\mathrm{rot}\,\varphi)/\partial\xi=(u,\Delta\,\mathrm{rot}\,\varphi)-((u\cdot\mathrm{grad})u,\mathrm{rot}\,\varphi),$$

$(\xi,\eta)\in\Omega$、$\varphi\in C_0^\infty(G)$ が成立するから、

(14) $((v,[\partial/\partial\xi+\Delta]\varphi\psi))-((u\cdot\mathrm{grad}\,u,\mathrm{rot}\,\varphi\psi))$

$$=0$$

$$\varphi \in C_0^\infty(G), \quad \psi \in C_0^\infty(\Omega)$$

をえる。(A)を(12)に、(B)を(11)に加えると、

$$((u, [\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2 + \Delta]\varphi\psi)) + ((v, \mathrm{rot}\,\varphi\psi)) = 0$$

$$((v, [\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2 + \Delta + \partial/\partial\xi]\varphi\psi)) - ((u\cdot\mathrm{grad}\,u, \mathrm{rot}\,\varphi\psi)) = 0,$$ $\varphi \in C_0^\infty(G)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ をえるが、

$\sum_{\mathrm{finite}} \varphi_j\psi_j$ $(\varphi_j \in C_0^\infty(G), \psi_j \in C_0^\infty(\Omega))$ は、$C_0^\infty(G\times\Omega)$ の中、$\mathcal{D}(G\times\Omega)$ の位相で dense であるから、結局、

(15) $((u, [\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2 + \Delta]\Phi)) + ((v, \mathrm{rot}\,\Phi)) = 0$

(16) $((v, [\partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2 + \Delta + \partial/\partial\xi]\Phi)) -$

$- (([u\cdot\mathrm{grad}]u, \mathrm{rot}\,\Phi)) = 0$

がすべての $\Phi \in C_0^\infty(G\times\Omega)$ に対して成立する。

(15), (16)から、任意の k(正整数)に対して、

$$v \in W_{loc}^{k,10/3}(G\times\Omega), \quad u \in W_{loc}^{k+1,10/3}(G\times\Omega)$$

が示されえる。ソボレフの補題より、$u^* \in C^\infty(G\times\Omega)$ $v^* \in C^\infty(G\times\Omega)$ が存在して、適当な零集合の訂正の後に、$u^*(x,\xi,\eta) = u(x,\xi,\eta)$, $v^*(x,\xi,\eta) = v(x,\xi,\eta)$ となる。6次元ベクトル (u^*, v^*) は、2次の非線型楕円型の系の解である。

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial\eta^2} + \Delta u^* + \mathrm{rot}\, v^* = 0$$

$$\frac{\partial^2 v^*}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial\eta^2} + \Delta v^* - (u^*\cdot\mathrm{grad})v^* - (v^*\cdot\mathrm{grad})u^* = 0$$

$(x,\xi,\eta)\in G\times\Omega$.

これは、

$$\mathrm{rot}\,((u\cdot\mathrm{grad})u)=(u\cdot\mathrm{grad})\,\mathrm{rot}\,u-(\mathrm{rot}\,u\cdot\mathrm{grad})u$$

[$\mathrm{div}\,u=0$ に注意してみちびける] の関係式と (15) (16) から示される。

故に、(u^*,v^*) は (x,ξ,η) の函数とみなして、解析的である。ところが、$(u(\cdot,z),\varphi)$, $(v(\cdot,z),\varphi)$ は、(補題2) より z の解析函数であるから、勿論、$(u(\cdot,\xi,\eta),\varphi)$ は (ξ,η) の連続函数、又 $(u^*(\cdot,\xi,\eta),\varphi)$ も ξ,η の連続函数であり、$(u,\varphi)=(u^*,\varphi)$ a.e. (ξ,η) であるから、$(u,\varphi)=(u^*,\varphi)$ がすべての (ξ,η) に対して成立する。故に $u(x,t)=u(x,t,0)=v^*(x,t,0)$ が a.e. の $x\in G$ に対して成立する。$v^*(x,t,0)$ は、x と t の解析函数であるから、任意の t $(0<t<T)$ に対し適当な修正の後に、$u(x,t)$ は、x について解析的となり、さらに、x,t について解析的となることが示されたわけである。

証明了