数理解析研究所講究録
第 42 巻 1968 年 1-8

Miller の recurrence algorithm について

広大 理　新谷尚義

§ 1. まえがき

2階の差分方程式

(1.1) $$y_{k-1} = a_k y_k + b_k y_{k+1} \qquad (k=1,2,\cdots : b_k \neq 0)$$

の1次独立な解 f_k , g_k が

(1.2) $$\lim_{k\to\infty} \frac{f_k}{g_k} = 0 \quad , \quad \lim_{k\to\infty} f_k = \alpha \quad , \quad \lim_{k\to\infty} \frac{f_{k+1} g_k}{g_{k+1}} = \beta \quad , \quad \alpha \neq \beta$$

という性質をもつ場合を考え，f_k を求める問題をとり扱う。

f_k の定数倍でない解は

(1.3) $$y_k = a f_k + b g_k \qquad (b \neq 0)$$

と表わされ，

(1.4) $$\lim_{k\to\infty} \frac{f_k}{y_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{f_k/g_k}{b + a(f_k/g_k)} = 0$$

となる。　f_0 , f_1 の近似値 y_0 , y_1

(1.5) $$y_0 = f_0 + \varepsilon_0 \qquad y_1 = f_1 + \varepsilon_1$$

を使って $y_2, y_3, \cdots$ を求めると，(3) 式で

(1.6) $a=1+(g_0\varepsilon_1-g_1\varepsilon_0)/\Delta,\quad b=(f_1\varepsilon_0-f_0\varepsilon_1)/\Delta,\quad \Delta=f_1g_0-f_0g_1$

の場合であるから，$b \neq 0$ ならば

(1.7) $$|(y_k-f_k)/f_k| \to \infty \qquad (k\to\infty)$$

となり，y_k の相対誤差はいくらでも大きくなる。 したがって，漸化式(1)を k が増加する方向に使うのは好ましくないことになる。 そこで J.C.P.Miller (1952) は，この漸化式を k が減少する方向に使うことを考えた。

$f_0, f_1, \cdots, f_N$ の近似値が求めたいとき，整数 $n\,(n \geqq N)$ に対して $P_n(k)$ をつぎの式によって定義する。

(1.8) $$P_n(k-1)=a_kP_n(k)+b_kP_n(k+1) \qquad (k=n+1, n, \cdots, 1)$$

(1.9) $$P_n(n)=1\ ,\ P_n(n+1)=0\ ,\ P_n(n+2)=1/b_{n+1}$$

1° 正規化条件

(1.10) $$\sum_{k=0}^{\infty} m_kf_k=C \qquad (C\neq 0)$$

が知られているとき，

(1.11) $$R_n=\sum_{j=0}^{n} m_jP_n(j)\ ,$$

(1.12) $$S_n(k)=cP_n(k)/R_n \qquad (k=0,1,\cdots,N)$$

とおく。

2° f_0 の値が知られていて，$f_0 \neq 0$ のとき

(1.13) $$T_n(k)=f_0P_n(k)/P_n(0)$$

とおく。

すると

(1.14) $$P_n(k)=\alpha_n f_k+\beta_n g_k$$

(1.15) $$\alpha_n=g_{n+1}/\Delta_n\ ,\ \beta_n=-f_{n+1}/\Delta_n\ ,\ \Delta_n=f_n g_{n+1}-f_{n+1}g_n$$

である。

(1.16) $$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1/(\alpha-\beta)\ ,\ \lim_{n\to\infty}\beta_n=0$$

であるから，

(1.17) $$\lim_{n\to\infty}P_n(k)=f_k/(\alpha-\beta)$$

(1.18) $$S_n(k)\ ,\ T_n(k)\to f_k \qquad (n\to\infty)$$

となる。

ここで，望む精度の f_k の近似値をうるためには，n の値をいくらにとればよいかということが問題になる。そのような n の値が知られていない場合には，n の値を増して計算し直し，前にえられた結果と比較して，望む精度の近似値がえられたかどうかを調べる方法がよく使われる。

ここでは k を固定して n を増加させ，$P_n(k)$ ，R_n を求める漸化式をまず導びく。すると $S_n(N)$ と $S_n(N+1)$ をこの式によって計算し，望む精度の f_N ，f_{N+1} の近似値になったところで，(1)式によって $f_k(k=N-1,N-2,---,2,1,0)$ の近似値を求めることができる。また，$a_r>0$ ，$b_r>0$ $(r=1,2,---)$ の場合に相対誤差を評価しよう。

4

§ 2. 漸化式

帰納法によってつぎの結果を示すことができる。

定理1. $P_n(k)$ $(n=k-1,k,---)$ はつぎの漸化式をみたす。

(2.1) $P_{n+1}(k)=a_{n+1}P_n(k)+b_nP_{n-1}(k)$ $(n+1\geqq k\geqq 0)$

(2.2) $P_k(k)=1,$ $P_{k-1}(k)=0,$ $P_{k-2}(k)=1/b_{k-1}$

また，

(2.3) $U_n(k)=\sum_{j=k}^{n} m_jP_n(j)$ $(n\geqq k)$

とおくと，つぎの結果がえられる。

定理2. $U_n(k)$ $(n=k,k+1,---)$ はつぎの漸化式をみたす。

(2.4) $U_{n+1}(k)=a_{n+1}U_n(k)+b_nU_{n-1}(k)+m_{n+1}$ $(n\geqq k)$

(2.5) $U_{k-1}(k)=0,$ $U_k(k)=m_k$

$R_n=U_n(0)$ であるから，つぎの系がえられる。

系 R_n $(n=0,1,2,---)$ はつぎの漸化式をみたす。

(2.6) $R_{n+1}=a_{n+1}R_n+b_nR_{n-1}+m_{n+1}$

(2.7) $R_{-1}=0,$ $R_0=m_0$

(1)式と(6)式によって，k を固定して n を増加させながら $S_n(k)$ と $T_n(k)$ を計算することができる。

したがって f_k の近似値を望む精度で求めることができる。

また,(1)式によって $P_n(N),P_n(N+1)$ が求めてあると,(1.8)式によって $P_n(j)$ $(j=N-1,N-2,---,0)$ を計算することができる。

§3. 正係数の場合

この節では

$$(3.1)\qquad a_n>0 \quad , \quad b_n>0 \quad (n=1,2,---)$$

である場合を考える。 たとえば $I_n(x)$, $i_n(x)$, $i^n erfc\ x$ に対する漸化式はこの条件をみたしている。 簡単な計算でつぎの補題がえられる。

<u>補題</u> $f_{N+1}/f_N = r$

$$(3.2)\qquad P_n(N+1)/P_n(N)=r_n=r(1+e_n) \qquad (n\geqq N+1)$$

とおく, すると,つぎの式が成り立つ。

$$(3.3)\qquad \frac{P_n(k)}{f_k} = (1+d_k e_n)\ \frac{P_n(N)}{f_N} \qquad (k=0,1,---,N+1)$$

$$(3.4)\qquad 0 = d_N < d_{N-2} <--- < d_0 <--- <d_{N-1} < d_{N+1} = 1$$

$$(3.5)\qquad -1 = e_N < e_{N+2} < --- <0< ---- <e_{N+3} < e_{N+1}$$

ただし

(3.6) $$d_k = \frac{rb_N P_{N-1}(k)}{P_N(k) + rb_N P_{N-1}(k)}$$

である。

定理 3. f_0^*を f_0の近似値とし

$$f_0^* = f_0(1+c) \qquad (|c| \leq c_0 < 1)$$

(3.7) $$T_n^*(k) = \frac{f_0^* P_n(k)}{P_n(0)} = (1+e_{n,k})f_k \qquad (k=0,1,---,N+1)$$

とおく。 すると

(3.8) $$n = N + 1 + 2q \qquad (q \geqq 1)$$

であるようなnに対して，つぎの式が成り立つ。

(3.9) $$(1+c)(1-e_n) < 1+e_{n,k} < (1+c)(1+e_n)$$

(3.10) $$\frac{r_n - r_{n+2}}{r_n} < e_n < \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n-1}}$$

（証明） (3) 式によってつぎの式がえられる。

(3.11) $$1+e_{n,k} = (1+c)\frac{1+d_k e_n}{1+d_0 e_n} = (1+c)[1+ \frac{(d_k - d_0)}{1+d_0 e_n} e_n]$$

(8) 式がみたされていると，

$1+d_0 e_n > 1$ であり、 (4) 式によって $|d_0 - d_k| < 1$ となる。

したがって

$$\left|\frac{d_k - d_0}{1 + d_0 e_n}\right| < 1$$

となる。

$$-1 < e_{n-1} < 0 \ , \quad 0 < e_{n+2} < e_n$$

であるから，

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n-1}} = \frac{e_n - e_{n-1}}{1 + e_{n-1}} > e_n$$

$$\frac{r_n - r_{n+2}}{r_{n+2}} = \frac{e_n - e_{n+2}}{1 + e_{n+2}} < e_n$$

である。 (証終)

$$e_{n,k} < e_n(1+c)+c \leqq e_n(1+c_0)+c_0$$

$$e_{n,k} > -e_n(1+c)+c \geqq -e_n(1+c_0)-c_0$$

であるから，つぎの系がえられる。

系　条件 (3.8) の下で，正数 μ $(\mu > c_0)$ に対して

(3.12) $$e_n \leq \frac{\mu - c_0}{1 + c_0}$$

ならば，

(3.13) $$|e_{n,k}| < \mu \qquad (k=0,1,---,N+1)$$

が成り立つ。

定理 4.

(3.14) $$S_n(k) = f_k(1+\delta_{n,k})$$

とおき，正数 μ に対して

(3.15) $$|\delta_{n,N}| \leqq \mu \quad , \quad |\delta_{n,N+1}| \leqq \mu$$

ならば,

(3.16) $$|\delta_{n,k}| \leq \mu \qquad (k=0,1,---,N+1)$$

が成り立つ。

（証明） (3)式によって

(3.17) $$\delta_{n,k}=\delta_{n,N}+d_k e_n(1+\delta_{n,N}) \qquad (k=0,1,---,N+1)$$

であり，$d_{N+1} = 1$ であるから

$$e_n(1+\delta_{n,N}) = \delta_{n,N+1} - \delta_{n,N}$$

がえられる。 この式を (17)式に代入すると

$$\delta_{n,k} = d_k\delta_{n,N+1}+(1 - d_k)\delta_{n,N}$$

となる。 $0 \leq d_k \leq 1$ であるから,(16)式がえられる。

（証終）

References

[1] Gautschi,W. : Computational aspects of three-term recurrence relations,SIAM Rev.,9(1967),24-82.

[2] Oliver,J. : Relative error propagation in the recursive solution of linear recurrence relations,Numer. Math.,9(1967), 323-340.

[3] Olver,F.W.J. : Numerical solution of second-order linear difference equations,J.Res.Nat.Bur.Standards - B,71(1967), 111-129.

[4] Shintani,H. : Note on Miller's recurrence algorithm, J. Sci. Hiroshima Univ.,Ser. A-I, 29(1965),121-133.

[5] Tait,R.J. : Error analysis of three term recurrence equations, Math. Comp.,21(1967),629-638.