数理解析研究所講究録
第 42 巻 1968 年 9-22

連分数展開による誤差の漸近的性質

一松 信（立教大理）

0. はしがき

連分数の部分近似分数の誤差評価については，すでに多くの研究がある。ここにのべるのは，Stieltjes 連分数について，Henrici の理論（文献[5],[6]）の紹介である。合流型超幾何函数の類の漸近展開を連分数で総和した場合の評価などが，その典型例である。この場合 1/2 乗収束，すなわち誤差の主要項が $A\varepsilon^{1/2}$ の形になり，収束が先へゆくほどおそくなる傾向がみられるが，これは一般的にいえることである。

1. 連分数の概説

1.1. 連分数

$$\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+\cdots}}}$$

を，$\overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathrm{K}}}\left.\frac{a_i}{}\right|\!\frac{}{b_i}$ の形に略記することにする。

ここで扱うのは主として

(1) $$\overset{\infty}{\underset{i=1}{\Phi}} \frac{a_i/z|}{|1} = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\Phi}} \left[\frac{a_{2i-1}|}{|z} + \frac{a_{2i}|}{|1} \right]$$

の形の連分数である。これと整級数

(2) $$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_{i-1}}{z^i}$$

との関連については、[7]（1967年11月のシンポジウム）でのべた。

1.2. 応用上とくに重要なのは、(2) の係数が

(3) $$(-1)^i c_i = \int_0^{\infty} t^i \, d\psi(t), \qquad i = 0, 1, \cdots$$

$\psi(t)$ は有界な広義の増加函数

で与えられる Stieltjes 連分数である。このとき (1) の $a_i > 0$ である。(1) がもし $z=1$ で収束すれば、(1) は、負の実軸を除いた全複素数平面上で広義の一様収束をする。そのためには、

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\prod_{k=1}^{n} a_k^{(-1)^{n+k+1}} \right] = \infty$$

が必要十分であり、また Carleman の準解析函数の理論から

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^{-1/2n} = \infty$$

が十分であることが知られている。(4) が成立しないときにも、偶数番と奇数番の近似は、$z>0$ でそれぞれ

(違う値に) 収束する.

1.3. (1) を n 項で切った有限連分数の値を w_n とする. 連分数は一次分数変換の合成と考えられる (この方向は Wall [2] が強調している). $a_i>0$, $z \neq$ 実数 のとき, a_1 を定めると, a_2 以下がどうであっても, (1) の極限値 (収束しなければ集積値と拡張してよい) は, 必らず $w_0=0$ と w_1 とを弦とする弓形 —— 詳しくいうと, 円周

(5) $$Z = a_1/(z+t) \qquad (0 \leqq t \leqq \infty)$$

と両端 w_0, w_1 とを結んだ線分で囲まれる弓形にある. —— この評価は, a_1 を定め $a_2, a_3 \cdots (>0)$ を適当にとると, この弓形内の任意の点が, このような連分数の集積点になる, という意味で最良である. z が純虚数ならば, (5) は半円になる.

これと一次分数変換とを組み合わせると, (1) の極限値は, つぎのような減少してゆく円弧二角形 Ω_n の共通分として表わされる:

1° Ω_n は γ_{n-1}, γ_n という円弧でかこまれる. ただし γ_0 は線分 $w_0 w_1$ である. Ω_n は凸である

2° γ_{n-1}, γ_n は w_{n-1}, w_n で $|\arg z|$ の角をなして交わる (w_{n+1} は必らず γ_n 上にある).

これは $z>0$ のとき，w_n が振動しながら極限値に収束することの一般化である．Ω_n が正なことから，相隣る値の平均 $(w_{n-1}+w_n)/2$ をとると，w_n 自体よりもずっとよい近似であることが予想され，じじつ多くの例でそうなる．したがって Stieltjes 連分数については，$|w_n - w_{n-1}| < \varepsilon$ となったところで反復をやめて，$(w_n + w_{n-1})/2$ を（w_n 自体をでなく）近似値としてとるのは，収束を早める有効な手段である．

1.4 例1.1.

$$\frac{1|}{|z} + \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n-1/2|}{|1} + \frac{n|}{|z}\right] = \frac{2e^z}{\sqrt{z}}\int_{\sqrt{z}}^{\infty} e^{-t^2}\,dt$$

（$z \neq$ 負の実数，$\mathrm{Re}\sqrt{z} > 0$）

に対して，$z=i$ でやってみると

$w_1 = -i$，$w_2 = (2-4i)/5$，$w_3 = (2-10i)/13$，

$w_4 = (38-124i)/145$，$w_5 = (118-404i)/521$，

$w_6 = (1982-7278i)/8749$，---.

$(w_5+w_6)/2$ は真の値との距離は 0.028 以下であり，漸近展開自体にくらべて，おどろくほどよい近似になっている．

2. Henrici の評価

2.1. 1. でのべたことから，Stieltjes 連分数について，z 非負の実数 のとき，(1) の極限値および n 項で切ったときの打ち切り誤差の推定には，$|w_n - w_{n-1}|$ の評価がえられれば，だいたい十分である．そのためには，1 のような，一般的な評価ももちろん有用であるが，次のような，もっと細かい評価が可能である．

<u>定理1</u>．(Henrici-Pfluger [5]) z 非負の実数，$a_n > 0$ のとき，第 n 近似連分数 w_n について

(6)
$$|w_n - w_{n-1}| \leqq K \prod_{k=2}^{n} \left(1 + 2\xi a_k^{-1/2}\right)^{-1/2}.$$

ここに $\xi = \mathrm{Re}\sqrt{z} > 0$，

(7)
$$K = \frac{a_1 a_2^{1/4}}{\xi |z|^{1/2}} \left[\frac{a_2^{1/2} + 2\xi}{a_2 + |z|}\right]^{1/2}$$

である．ここで w_n は収束する必要はない．(6) の右辺の無限乗積の収束は，w_n の収束の一つの十分条件を与える．

(6) に評価

$$|c_0/c_n| \leqq (a_2 a_3 \cdots a_{n+1})^{-1}, \quad n = 2, 3, \cdots$$

を適用し，Carlemanの不等式

$$a_k > 0 \text{ のとき } \sum_{k=1}^{n} a_k > \frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}(a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k}$$

（Hardy-Littlewood-Pólya, Inequality, Th. 334）を適用すると

系1. $$|w_{n+1}-w_n| \leqq K\left[1+2\xi\,|c_n/c_0|^{1/2n}\right]^{-n/2}$$

$$|w_{n+1}-w_n| \leqq K\left[1+\frac{2\xi}{e}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{c_0}{c_k}\right|^{1/2k}\right]^{-1/2}.$$

系2. (2) の収束半径が T^{-1}（$|z|>T$ で収束）ならば，Cauchy-Hadamardの公式で $\limsup|c_n|^{1/n}=T$ だから，w_n の収束は，系1の上の式から，公比 $(1+2\xi T^{-1/2})^{-1/2}$ の等比級数に似たものになる。

系1の公式は，定理1自体より悪い評価だが，c_n の一般形は既知で，a_n の一般形は不明というときはよくあるので，連分数による求和の誤差評価に有用である．また系1の下の式から前記 Carleman の判定条件が導びかれるが，これは本質的に Carleman 自身の証明を辿ったことである．

定理1の略証 まず (1) を

$$b_n = \prod_{k=1}^{n} a_k^{(-1)^{n+k+1}}, \qquad (n=1,2,3,\cdots)$$

により，つぎの同形な形に書きかえる：

(8) $$\zeta^{-1}\mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|b_n\zeta}, \qquad \zeta^2 = z = \xi + i\eta \quad (\xi>0).$$

(8) の近似分数を P_n/Q_n とすると, 漸化式から

$$|w_n - w_{n-1}| = \frac{1}{|\xi Q_n Q_{n-1}|} \leqq \frac{1}{|\xi| X_n},$$

ただし $Q_n \overline{Q_{n-1}} = Z_n = X_n + i Y_n$ である. また漸化式から

$$X_n - X_{n-2} = \xi [b_{n-1} |Q_{n-2}|^2 + b_n |Q_{n-1}|^2]$$

$$\geqq \xi\, 2\sqrt{b_n b_{n-1}}\, X_{n-1}$$

(相加平均 ≧ 相乗平均; $X_{n-1} = \mathrm{Re}\, Q_{n-1} \overline{Q_{n-2}}$ による)

ゆえに $\alpha_n = \xi \sqrt{b_{n-1} b_n} = \xi a_n^{-1/2}$ とおくと

$$X_n \geqq X_{n-2} + 2\alpha_n X_{n-1}$$

$X_n = \xi \sum_{k=1}^{n} b_k |Q_{k-1}|^2 \nearrow$ が示されるので,

$$X_n \geqq (1 + 2\alpha_n) X_{n-2},$$ ゆえに

$$X_{2n-1} \geqq (1+2\alpha_3)(1+2\alpha_5) \cdots (1+2\alpha_{2n-1}) X_1,$$

$$X_{2n} \geqq (1+2\alpha_4)(1+2\alpha_6) \cdots (1+2\alpha_{2n}) X_2.$$

さらに $X_n \geqq X_{n-1}$ から

(9) $$X_n \geqq \sqrt{X_1 X_2} \prod_{k=3}^{n} (1+2\alpha_k)^{1/2} \quad (n=3,4,\cdots).$$

$X_1 = b_1 \xi$, $X_2 = b_1 \xi (1 + b_1 b_2 |z|)$ を代入し, さらに (9) に $(1+2\alpha_2)^{1/2}$ の項を積に入れて整理すると

$$X_n \geqq |\xi^{-1}| K^{-1} \prod_{k=2}^{n} (1 + 2\xi a_k^{-1/2})^{1/2}$$

となり, これから (6) をうる.

2.2 $\operatorname{Re} x > 0$ で $|x|$ が十分大きいときには，$\mathbb{K}$ はほぼ $|x|^{-3/2}$ のオーダーの量である．また(6)の右辺は

$$(10)\quad \mathbb{K}\left[1+2\xi\,(a_2\cdots a_{n+1})^{-1/2n}\right]^{-n/2}$$

で上からおさえられ，これでも誤差のオーダーは正しくでる．しかし a_n が1次式で与えられていると きには，もっとよい評価ができる．これも本質的に Henrici-Pfluger の論文[5]にのっている。

定理2．　定理1で，α, β, a, b を定数とし

$$a_{2n+1}=(n+\alpha)/a\ ,\quad a_{2n}=(n+\beta)/b\quad (n\geqq 1)$$

$$a, b>0\ ;\ \alpha, \beta>-1$$

と表わされるときには，

$$(11)\quad \begin{aligned} |w_{2n+1}-w_{2n}| &\leqq \mathbb{K}C\,A_n B_n/A_1 B_1 \quad (n\geqq 1),\\ |w_{2n}-w_{2n-1}| &\leqq \mathbb{K}C\,A_{n-1} B_n/A_1 B_1 \quad (n\geqq 2)\end{aligned}$$

となる．ここに $\mathbb{K}$ は前記の量(7)であり，他はつぎのとおり：

$$C=\left(\left[1+2\xi\sqrt{a/(1+\alpha)}\right]\left[1+2\xi\sqrt{b/(1+\beta)}\right]\right)^{-1/2}$$

$$A_n=\frac{(n+\alpha)^{(n+\alpha+1/2)/4}\exp\left(-\xi\sqrt{a(n+\alpha)}\right)}{\left((n+\alpha)^{1/2}+2\xi\sqrt{a}\right)^{(n+\alpha-4a\xi^2+1/2)/2}}$$

$$B_n=\frac{(n+\beta)^{(n+\beta+1/2)/4}\exp\left(-\xi\sqrt{b(n+\beta)}\right)}{\left((n+\beta)^{1/2}+2\xi\sqrt{b}\right)^{(n+\beta-4b\xi^2+1/2)/2}}$$

<u>略証</u>　つぎの補助定理を活用する.

<u>補助定理3.</u>　$f(t)$ が $1 \leqq t \leqq n$ で凸 ならば, $f(t)$ の原始函数を $F(t)$ とし

$$\Phi(t) = F(t) + (f(t)/2)$$

とおくと

(12)　$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqq \Phi(n) - \Phi(1) + f(1).$$

これは<u>台形公式</u>による定積分の評価

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqq \int_{1}^{n} f(t)\,dt + \frac{1}{2}(f(1) + f(n))$$

の書きかえである. なお f が凹 ならば, この不等式は逆転するが, かわって<u>中点公式</u>による評価

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geqq \int_{1/2}^{n+1/2} f(t)\,dt$$

が使われる。これらは定積分の近似計算公式として有名であるが, 逆に級数の和の評価にも有用である。(たとえば $n!$ に関する Stirling の公式が容易に導かれる.) このことは, 初等解析学の講義中でもっと強調してよいことと思う.

<u>2.3.</u> 本題にかえる. $\lambda > 0$, $c > -1$ ならば

$$f(t) = \ln(1 + \lambda(t + c)^{-1/2})$$

は $t > -c$ で 凸であり, したがって $t \geqq 1$ で凸である. これに補助定理3を適用すると,

$$\Psi(t) = (t+c-\lambda^2+1/2)\ln((t+c)^{1/2}+\lambda)$$
$$-(t+c+1/2)\ln(t+c)^{1/2}+\lambda(t+c)^{1/2}$$

である．奇数番の a_n については

$$\lambda = 2\xi\sqrt{a}, \quad c=\alpha; \quad A_n = \exp(-\Psi(n)/2)$$
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+2\xi\, a_{2k+1}^{-1/2}\right)^{-1/2} \le \exp(-f(1)/2)\cdot A_n/A_1$$

となる．偶数番目についても同様である．これを整理すれば，定理2となる。

このA$_n$, B$_n$は非常に複雑であるが，$n\to\infty$ のときほぼ

(13) $$A_n \doteqdot [e(n+\alpha)]^{a\xi^2}\left(e^{-2\xi\sqrt{a}}\right)^{\sqrt{n+\alpha}}(1+o(1))$$

となり，主要項は $\left(e^{-2\xi\sqrt{a}}\right)^{\sqrt{n}}$ である．冒頭のおきかえ(10)をやると主要項は $\left(e^{-\xi\sqrt{ae}}\right)^{\sqrt{n}}$ となり，定数2が $\sqrt{e} \doteqdot 1.65$ と悪くなる．

ξが大きいとA_n, B_nはひどく大きくなるが，もちろんそのときにはA_1, B_1も大きくなる。$\xi \gg n \gg 1$ なら

$$\frac{A_n}{A_1} \doteqdot \frac{\exp[-\xi\sqrt{a}(\sqrt{n+\alpha}-\sqrt{1+\alpha})]\,(n+\alpha)^{(n+\alpha+1/2)/4}}{(2\xi\sqrt{a})^{(n-1)/2}\,(1+\alpha)^{(\alpha+3/2)/4}}$$

$$\sim \text{主要項}\ \left(e^{-\xi\sqrt{a}}\right)^{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n}/2\sqrt{a}\,\xi\right)^{n/2}$$

したがってnが大きくなると，ほぼ$C\varepsilon^{\sqrt{n}}$ の形になる．しかしはじめのうちはむしろ線型収束に近い。じっさい数値実験でも，そのような傾向がみられる。

2.4 例2　　第2種変形 Bessel 函数 $K_\nu(x)$ について

$$\frac{K_\nu(z)}{K_{\nu+1}(z)} = 1 - \frac{\nu+1/2}{z + z\varphi(z)},$$

$$\varphi(z) = \mathop{\Phi}_{n=1}^{\infty}\left[\frac{n/2+\nu/2+1/4|}{|\quad z} + \frac{n/2-\nu/2-1/4|}{|\quad 1}\right].$$

$\varphi(z)$ の右辺は，$-1/2<\nu<1/2$ ならば Stieltjes 連分数で，定理2が $a=b=2$，$\alpha=\nu+3/2$，$\beta=-\nu-1/2$ として使える（全体に定数をかけてこの形に変形して）。

$\nu=0$，$z=ix$（純虚数），$\varepsilon=10^{-10}$ として，$|w_n-w_{n-1}|<\varepsilon$ となるまでの反復回数を定理2から求めた理論値と，Brookhaven で CDC6600 により実験的に求めた値とをつぎの表にあげる．理論値が過大評価なのは当然である．

x	10	20	50	100
理論	14	11	8	6
実験	12	10	8	6

これにより $K_\nu/K_{\nu+1}$ はかなり早く計算できる．K_ν 自体については，[6] で，漸近展開を数値的に連分数にかきかえ，上記の理論で誤差を評価することが行なわれている．

例3. $\quad K_0(z) \sim \sqrt{2\pi z}\, e^{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}}$ （漸近展開）

$$c_n = (-1)^n \left[(2n)!\right]^2 / 2^{5n+1} (n!)^3 , \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

に対しては，系1の上の公式と Stirling の公式とから

$$|w_{n+1} - w_n| \leqq \frac{1}{2\xi |z|^{1/2}} \left(\frac{1 + 4\sqrt{2}\,\xi}{1 + 8|z|} \right)^{1/2} \left[1 + \frac{2\xi\sqrt{2e}}{\sqrt{n}} + O(n^{-1}) \right]^{-n/2}$$

$$\sim \text{主要項は} \quad C\left(\exp(-\xi\sqrt{2e})\right)^{\sqrt{n}}$$

で，やはり $\sqrt{n}$-乗収束の様相を呈する．

例4. $\quad \log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + J(z),$

$$z^{-1/2} J(z^{1/2}) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+1}},$$

$$C_n = (-1)^{n+1} B_{n+1} / (2n+1)(2n+2)$$

に対しては，

$$|c_0/c_n|^{1/2n} \sim \pi e/n$$

で，系1の上の式は，右辺 $\to 0$ $(w \to \infty)$ にならない．下の式に適用すると，$\to 0$ にはなるが，

$$|w_{n+1} - w_n| \leqq \xi^{-1} |z|^{-1/2} \left[1 + \xi\pi e^{-1/4e} \log n \right]^{-1/2}$$

$$\sim \text{主要項} \quad C/\sqrt{\log n}$$

という「超スローモー」の収束になる．じじつこの収束は極端におそい．しかし B_n のはじめの数個は「異常に」小さいので，$n \leqq 7$ くらいまでは，かなり早く収束する．はじめの好調にのって深追いは禁物，の典型例である．

文献

[1] O. Perron, Die Lehrbuch von den Kettenbrüchen, Teubner 1929; Repint Chelsea 1957.

[2] H. S. Wall, Analytic theory of continued fractions, von Nostrand 1948; Repint Chelsea 1967.

[3] A. W. Khovanskii (P. Wynn 訳), The application of continued fractions and their generalizations to problems in approximation theory, Nordhoff 1963.

[4] F. L. Bauer, Nonlinear sequence transformations, H.L. Garabedian 編, Approximation of Functions, Elsevier 1965, 134—151 ページ.

[5] P. Henrici - P. Pfluger, Truncation error estimates for Stieltjes fractions, Num. Math. 9 (1966), 120—138 ページ.

[6] I. Gargantini - P. Henrici, A continued fraction algorithm for the computation of higher transcendental functions in the complex plane, Math. Comp. 21 (1967), 18 - 29 ページ.

[7] 一松 信. 連分数による漸近展開の総和法と収束の加速について, 数理解析研究録, 近刊.