

## 微分方程式の数値解の 収束性について

早大 理工 中島勝也

### § 1. 序

線形楕円型偏微分方程式の Dirichlet 問題を、差分近似で解くときの、数値解の収束性の定量的な研究に関して昨年の数理解析研究所の研究集会では B. E. Hubbard [1966] の評価式の紹介を述べたが、それは  $O(h^2)$  の公式誤差を、Richardson の補外法を用いて  $O(h^3)$  にするものであった。その後筆者は初めから誤差が  $O(h^3)$  となる計算方法を考案したが、本論文では数値解の誤差が  $O(h^4)$  となる計算方法を提案する。ここで  $h$  は格子間隔を表わす正数である。この方法はさらに  $h$  の高位の誤差評価を得るための方針も与える。計算公式は簡単のため、2 変数の Poisson 方程式について例示される。

$R$  を平面上の閉曲線  $C$  で囲まれる領域とする。

$$(1) \quad \Delta u(p) = f(p), \quad p = (x, y) \in R,$$

$$(2) \quad u(p) = g(p), \quad p \in C$$

を満足する函数  $u(p)$  を求めよ。という問題を数値的に解く

ために、平面上の直交座標系  $(x, y)$  の各軸方向に平行な、間隔  $h$  の格子を張り、 $R$  内にある格子点全体を  $R_h$ 、格子線と境界  $C$  との交点 (孤立点) の全体を  $C_h$  とする。  $R_h$  の各格子点でその近隣格子点を定める。はじめは上下左右の 4 点を近隣と定めよう。  $R_h$  の点でその近隣格子点と共に  $R$  内にあるような点全体を  $R_h$  の内部と呼び  $R_1$  で表わす。それに対して、  $R_2 = R_h - R_1$  を辺境と呼ぶ。また  $\bar{R}_h = R_h + C_h$  とする。

さて離散的な Dirichlet 問題として、Laplacian  $\Delta$  の近似

$$(3) \quad \Delta_h U(p) = f(p) \quad p \in R_h$$

$$(4) \quad U(p) = g(p) \quad p \in C_h$$

を考える。

このように定めることによつて、近似境界条件が正確であることになるが、その効果としては、ふつうの方法では、その誤差が、数値解に  $O(h)$  の誤差をもたらすので、それを消すために正確な境界条件を与え、方程式の近似度を高めて数値解の誤差を少なくできることがあげられる。さて  $R_h$  で方程式の近似度を一樣にしなければならぬかがどうか重要なことであつて、結果を先に云えば、  $R_2$  においては、  $R_1$  における公式の誤差よりも  $O(h^2)$  だけ精度が悪くてもよいことがわかる。

## § 2. 方程式の近似.

Laplacian  $\Delta$  の近似として, 正方格子でふつうに用いられるのは 5 点公式で, それは印象的な記号  $\diamond_h$  を用いて表わされる.

$$(5) \quad \diamond_h u(x, y) = u(x+h, y) + u(x-h, y) + u(x, y+h) + u(x, y-h) - 4u(x, y)$$

$$(6) \quad \Delta_h u(p) = h^{-2} \diamond_h u(p), \quad p \in R_1$$

この公式の近似度は 2 である.  $\|\cdot\|_{R_1}$  を  $\sup$  ノルムにとるとき,  $u \in C^2(R)$  なるものは

$$(7) \quad \|\Delta_h u - \Delta u\|_{R_1} = \sup_R |\Delta_h u - \Delta u| = O(h^2)$$

ところがこの公式は  $R_2$  では使用できない. そこで  $W, R$ .

Wasow は一方向の補間公式を用いた. たとえば,  $x$  方向について書けば,  $(x, y) \in R_2$ ,  $(x+h', y) \in R_1$ ,  $(x-h, y) \in R_1$ ,  $h' \leq h$  のときには

$$(8) \quad \Delta_h u(x, y) = \frac{1}{h+h'} \{ h' u(x-h, y) + h u(x, y) \} - u(x, y), \\ (x, y) \in R_2$$

となる. これは Laplacian の近似とはいえない.

$$(9) \quad \|\Delta_h u - \Delta u\|_{R_2} = O(1)$$

となる. したがって全体的には

$$(10) \quad \|\Delta_h u - \Delta u\|_{R_h} = O(1)$$

となり, 方程式の近似とはいえないが, それにも拘らず,

(3), (4) の数値解  $U$  のもつ誤差  $w = U - u = O(h^2)$  となる。

B. Hubbard はまた Green 行列の性質から 誤差の評価式

$$(11) \quad \|w\|_{\bar{R}_h} \leq O(1) \|\Delta_h w\|_{R_1} + O(h^2) \|\Delta_h w\|_{R_2} + \|w\|_{C_2}$$

を得たが、これも Wasow の場合のも最大値原理から導かれることを示そう。その前に Hubbard の用いた式は、 $R_1$  では 5 点近似公式 (6) を、 $R_2$  では 2 方向の補間の荷重平均に比例する Shortley-Weller の公式である。それは、 $0 < \alpha < 1$ ,  $0 < \beta < 1$  とし、 $(x - \alpha h, y) \in C_2$ ,  $(x, y - \beta h) \in C_2$ ,  $(x, y) \in R_2$ ,  $(x + h, y) \in R_1$ ,  $(x, y + h) \in R_1$  のときに、

$$(12) \quad \diamond_h^{(1)} u(x, y) = \frac{2}{\alpha + 1} \left\{ \frac{1}{\alpha} u(x - \alpha h, y) - \frac{\alpha + 1}{\alpha} u(x, y) + u(x + h, y) \right\} \\ + \frac{2}{\beta + 1} \left\{ \frac{1}{\beta} u(x, y - \beta h) - \frac{\beta + 1}{\beta} u(x, y) + u(x, y + h) \right\}$$

を用いて、

$$(13) \quad \Delta_h u(p) = h^{-2} \diamond_h^{(1)} u(p), \quad p \in R_2$$

を近似式として用いる。  $u \in C^3(R)$  として、

$$(14) \quad (h^{-2} \diamond_h^{(1)} - \Delta) u(p) = O(h^2), \quad p \in R_2$$

が成り立つ。

Hubbard はさらに、Richardson の補外公式を用いて、数値解の誤差が  $O(h^3)$  となることを証明した。それは、格子間隔  $2h$  と  $h$  とで求めた解  $U_{2h}(x, y)$  と  $U_h(x, y)$  とを

用いて,  $(x, y) \in R_{2h}$  で

$$(15) \quad U(x, y) = \frac{1}{3} \{4U_h(x, y) - U_{2h}(x, y)\}$$

によって計算する方法をえう。

(11)式から明らかたように,  $R_1$ で  $O(h^4)$ の,  $R_2$ で  $O(h)$ の公式精度をもてば, Richardsonの補外公式を用いなくても誤差  $w = U - u = O(h^3)$ となる。その方法を, 昨秋の学会で筆者が発表したか, 本論文ではさらに  $R_2$ で  $O(h^2)$ の公式精度をもたせることによって  $w = O(h^4)$ となる方法を示す。その前に, (11)もまた最大値原理からみちびかれることを注意しよう。

### §3. 最大値原理による誤差評価。

最大値原理は, ぶつう次のように述べられる

'  $R_h$ で  $\Delta_h U(x, y) \geq 0$  ならば'

$$\sup_{R_h} U(x, y) \leq \sup_{C_h} U(x, y) .'$$

しかし 以下に述べられるように,  $R_2$ での近似公式の作り方からして, この条件が  $R_h$ 全体では満足されなうために, つぎのように一般化する。

'  $R^*$ を  $R_h$ の部分集合とするとき,

$R^*$ で  $\Delta_h U(x, y) \geq 0$  ならば'

$$\sup_{R^*} U(x, y) \leq \sup_{R_h - R^*} U(x, y) \text{ である.}'$$

これをを用いるときには,  $R^* = R_1$  とおく. さて  $w = U - u$  に対し,  
 $R_1$  で 5 章公式を用いた (6) の  $\Delta_h$  では,

$$\Delta_h w = \Delta_h U - \Delta_h u = f - \Delta_h u = (\Delta - \Delta_h) u$$

だから

$$(16) \quad \|\Delta_h w\|_{R_1} \leq \frac{1}{6} h^4 M_4$$

ここで,  $M_4$  は (1), (2) の解  $u$  の 4 階偏導函数  $u_{x^4}, u_{y^4}$  の絶対値の  $R$  内における上界である.

$R$  内で非負で,  $\Delta_h$  を作用させると  $-4h^2$  となるような函数をさがす. たとえば,  $R$  が有界で,  $R$  内の点  $(x_0, y_0)$  を中心として半径  $a$  なる円が  $R$  を内部に含むものとする. そのとき,

$$(17) \quad Q(x, y) = a^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2$$

とおくと,  $R$  内で  $Q(x, y) \geq 0$  であつて,

$$(18) \quad \Delta_h Q(x, y) = -4h^2, \quad p = (x, y) \in R_1$$

となる. これと (16) とから

$$(19) \quad \Delta_h \left( \pm w - \frac{1}{24} h^2 M_4 Q \right) \geq 0 \quad p \in R_1$$

であるから, 最大値原理より

$$(20) \quad \sup_{R_1} \left( \pm w - \frac{1}{24} h^2 M_4 Q \right) \leq \sup_{\bar{R}_h - R_1} \left( \pm w - \frac{1}{24} h^2 M_4 Q \right) \\ \leq \|w\|_{\bar{R}_h - R_1}$$

次に

$$(21) \quad \|w\|_{R_1} \leq \|w\|_{\bar{R}_h - R_1} + \frac{1}{24} h^2 M_4 \|Q\|_{R_1} \leq \|w\|_{\bar{R}_h - R_1} + \frac{a^2}{24} h^2 M_4$$

そこで  $\|w\|_{C_h} = 0$  であるから,  $\|w\|_{\bar{R}_h - R_1} = \|w\|_{R_2}$  とする.

$R_2$  で一方向の補間公式(8)を用いるときは,

$$(22) \quad \|w\|_{\bar{R}_h - R_1} = \|w\|_{R_2} \leq \frac{1}{2} \|w\|_{R_1} + \frac{1}{2} h^2 M_2.$$

ここで  $M_2$  は  $u$  の 2 階偏導関数の絶対値の  $R_h$  における上界である. (21) と (22) 式から誤差の評価式

$$(23) \quad \|w\|_{\bar{R}_h} \leq \frac{1}{12} h^2 M_4 a^2 + h^2 M_2$$

が得られる. これは (11) 式に相当するものである.

$R_2$  で二方向の補間公式(13)を用いると, (22) の代りに

$$(24) \quad \|w\|_{\bar{R}_h - R_1} \leq \frac{1}{2} \|w\|_{R_1} + M h^3$$

を得る. ここで  $M$  は  $h$  によらない定数である. これと (21) 式から

$$(25) \quad \|w\|_{\bar{R}_h} \leq \frac{1}{12} h^2 M_4 a^2 + 2h^3 M$$

を得る. 2 の右辺は  $h$  の指数がそろわず,  $h^3$  項が主要項となつてゐる. 22 で  $R_1$  の近似公式の誤差を小さくするとよいことが知られる.  $R_1$  での公式精度を上げるために, 9 点公式を用いればよいが, それがために近隣格子点の定義を, 最も近い 4 点から, 最も近い 8 点に変更する. この結果  $R_1$  の定義される集合も異なつてくる. このようにした上で,  $R_1$  での近似公式として

$$(26) \quad \Delta_h^{(4)} u = \frac{1}{6h^2} (4 \diamond_h + \square_h) u - \frac{1}{12} \diamond_h f$$

により  $\Delta$  を近似すると

$$(27) \quad \|\Delta_h^{(4)} u - \Delta u\|_{R_1} = O(h^4)$$

となる。これと同程度の誤差をもたらす  $R_2$  での近似公式は  $O(h^2)$  の近似であり、それには次のようにする。

case 1. Fig 1 のように近隣4点が  $R$  内にあるときは、5点公式を用いる。

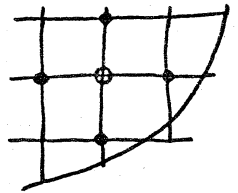


Fig. 1

case 2. Fig 2 のように近隣4点のうち1点が  $R$  外に出ているとき、 $R_1$  の点ももう1つ追加をして、Fig 2 のような場合、 $x$  方向の2階の偏導関数を、

$$u_{xx}(x,y) = \varphi''(x), \quad u(x,y) = \varphi(x) \text{ とし}$$

公式

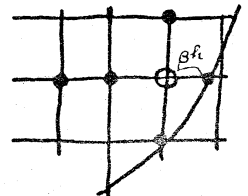


Fig. 2

$$(28) \quad \varphi''(x) = \frac{6}{h^2 \beta(\beta+1)(\beta+2)} \left\{ \varphi(x+\beta h) + \frac{4\beta-\beta^3}{3} \varphi(x-h) + \frac{\beta^3-\beta}{6} \varphi(x-2h) - \frac{6+7\beta-\beta^3}{6} \varphi(x) \right\} + O(h^2), \quad 0 < \beta < 1$$

によって近似する。

case 3. Fig. 3 のように、 $x, y$  両方向とも1点ずつ外に出ている場合には、両方向とも反対側に1点ずつ追加して、公式(28)を両方向に適用する。

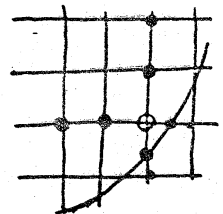


Fig. 3

以上の3種の場合のほかは、境界  $C$  の滑らかさによって起る新しいものとする。



(27), (28) より次の評価式を得る.

$$(29) \quad \|W\|_{\bar{R}_R} \leq M h^4$$

### 参考文献

Forsythe G. E. and Wasow W. R., [1960]: *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley & Sons, New York-London.

Hubbard B. [1966]: *Remarks on the order of convergence in the discrete Dirichlet problem*; edited by

J. H. Bramble: *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Academic Press, New York-London, pp21-34.