数理解析研究所講究録
第43巻1968年65-72

天体物理の諸問題に対する 一般変分原理による取扱い

東大 理　海野和三郎

§1 揺動の最小仕事

巨視的な物理状態はそのまわりでおこる揺動の確率が極大値をとるときに平衡であり，系はその方向に進化する。この原理により，古典力学・熱力学を一般変分原理の形に定式化できる。これはPrigogine と Glansdorff (Physica 31, 1242, 1965) によって行なわれた。この変分原理を天体物理の二三の問題に適用して，その方法が広く応用できるものであることを示す。

平衡状態を基準にとり，これに揺動δをあたえたとき，それに必要なエネルギーは不可逆過程を考えると一義的ではない。熱力学第2法則により，その最小値が存在し，これを揺動の最小仕事とよび，δW_{min}とかくことにする。単位質量あたり，

$$\delta W_{min} = \frac{1}{2}\left[\frac{C_v}{T}(\delta T)^2 + \left|\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T\right|(\delta v)^2 + (\delta u)^2\right], \tag{1}$$

(Landau, Lifshitz ; Statistical Physics, 1958, §20, §111)。

但し，C_v：定積比熱，T：絶対温度，P：圧力，$v=\frac{1}{\rho}$：比体積，$\boldsymbol{u}$：速度ベクトル　である。この δW_{min} をTでわり符号を変えたものが振動のエントロピー δS であり，これは確率の対数に比例したものであることは統計力学で知られている。したがって(1)は平衡，$\delta=0$ で確率が極大になっていることを示す。

系の進化の条件としては，平衡で

$$\frac{d}{dt}\delta W_{min} = 0, \tag{2}$$

であり，それ以外では左辺は負である。系が巨視的物理に従って変化しているときにも，振動の時間尺度は小さいことを考慮して，実現する変化に対しても(2)を要求するものと考える。更にこれを系の全質量で積分して，

$$\delta \mathcal{F} \equiv -\int \frac{d}{dt}\delta W_{min}\, dm = 0 \tag{3}$$

またすべての時間にわたって(3)が成立として時間積分をとり，

$$\delta \mathcal{D} \equiv \delta \int^{t} \mathcal{F}\, dt = -\int \delta W_{min}\, dm = 0. \tag{4}$$

§2　保存法則

(1)を保存則を用いて書きかえれば，物理過程との対応がつく。質量，運動量，熱エネルギーの保存を次式で表す。

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\, div\, \boldsymbol{u}, \tag{5}$$

$$\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\, grad\, P + \boldsymbol{F}, \tag{6}$$

$$T\frac{dS}{dt} = \epsilon - \frac{1}{\rho}\, div\, \boldsymbol{H}. \tag{7}$$

$\mathbf{F}$は重力等の外力で，粘性力を含めてもよいが天体の場合は通常無視される。Sは単位質量あたりのエントロピー，ϵは熱エネルギー発生率，$\mathbf{H}$は輻射等の熱流量である。左辺に適当な変分量を乗じて加えると，

$$
\begin{aligned}
(l.h.s) &= -\frac{\delta P}{\rho}\frac{d\rho}{dt} - \rho\,\delta\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{\rho}{T}\delta T\cdot T\frac{dS}{dt} \\
&= -\rho\left[\frac{C_v}{T}\frac{dT}{dt}\delta T + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_T\frac{d\rho}{dt}\delta\rho + \frac{d\mathbf{u}}{dt}\cdot\delta\mathbf{u}\right] \\
&= -\rho\frac{d}{dt}\delta W_{min} - \rho\left[\frac{C_v}{T}\frac{dT}{dt}^{(B)}\delta T + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_T\frac{d\rho}{dt}^{(B)}\delta\rho + \frac{d\mathbf{u}}{dt}^{(B)}\cdot\delta\mathbf{u}\right]. \qquad (8)
\end{aligned}
$$

才1行から才2行へうつるには熱力学の関係式を用いた。(B)のついた量は基準状態の量で，$T = T^{(B)} + \delta T$, etc. (8)に対応する右辺を考慮すると，(3)より（δの高次を無視）

$$
\begin{aligned}
0 = \delta\mathfrak{F} = \int dm\Big[&\frac{\delta P}{\rho}\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}^{(B)} + \mathrm{div}\,\mathbf{u}\right\} + \delta\mathbf{u}\cdot\left\{\frac{d\mathbf{u}}{dt}^{(B)} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}P - \mathbf{F}\right\} \\
&+ \delta(\ln T)\left\{C_v\frac{dT}{dt}^{(B)} - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho\frac{T}{\rho^2}\frac{d\rho}{dt}^{(B)} - \epsilon + \frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\mathbf{H}\right\}\Big]. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

この変分式のEuler方程式は$\{\ \} = 0$で，これは基準状態をきめる式である。したがってEuler方程式では(B)のついた量とつかない量を区別しなくてよい。これらは(5)(6)(7)の保存則に外ならない。(9)の右辺が全微分形にかければ，ポテンシャル$\mathfrak{F}$が一義的にきまり，変分原理が完成するが，特別な場合以外では不可能である。しかしEuler方程式を正しく与えることを目的とするかぎり，その目的にかなう$\mathfrak{F}$は求められる。最も簡単には，

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{F} = \int\frac{dm}{\rho}\Big[&P\left\{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}\,\mathbf{u}\right\}^{(B)} + \mathbf{u}\cdot\left\{\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathrm{grad}P - \rho\mathbf{F}\right\}^{(B)} \\
&+ \ln T\left\{C_v\rho\frac{dT}{dt} - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho\frac{T}{\rho}\frac{d\rho}{dt} - \rho\epsilon + \mathrm{div}\,\mathbf{H}\right\}^{(B)}\Big] \qquad (10)
\end{aligned}
$$

実際に一般変分原理を用いて逐次近似の計算を進めたり、変分パラメーターを含む解析的な近似解を求めたりする場合には、(9)の{・}の中には変分を含む項があることを考慮して、(9)をできるだけ全微分に近い形にした上で、δをはずして（δのつかぬ量には(B)をつける）$\mathcal{F}$を求めれば、(10)を用いるより精度がよい。それは問題の性格によってそれぞれ技巧が要る点なので、ここでは立入らない。

§3　恒星モデルの数値計算法

恒星内部にN個の共心球を考え、$m^{(i)}$をi番目の球内の質量とする。$m^{(i)}$-球の表面について、その半径$r^{(i)}$、温度$T^{(i)}$が与えられればモデルは決定する。平衡な星については(10)より、

$$\mathcal{F}_1 = \sum_{i=1}^{N} \int_{m^{(i-1)}}^{m^{(i)}} dm \left[\frac{\partial r_1}{\partial t} \left\{ \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{Gm}{r^2} \right\}^{(B)} + \frac{T_1}{T_0} \left\{ -\rho\epsilon + \frac{\partial}{\partial m}\left(4\pi r^2 H_r\right) \right\}^{(B)} \right]. \qquad (11)$$

但し、
$r = r_0 + r_1$, $T = T_0 + T_1$ とし、$r_0^{(i)}$, $T_0^{(i)}$は近似値で既知であり、$\mathcal{F}_1$は$\mathcal{F}$の近似値に対する補正である。

$r_1^{(i)}$, $T_1^{(i)}$を変分原理から求める問題を考える。その際$[m^{(i-1)}, m^{(i)}]$区間のr_1は$r_1^{(i-1)}$と$r_1^{(i)}$をmにつき直線で結んだ値をとるとする。

$$\frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta r_1^{(i)}} = 0, \quad \frac{\delta \mathcal{F}_1}{\delta T_1^{(i)}} = 0, \qquad (i = 1, \cdots, N-1) \qquad (12)$$

より得る式は、r_1とT_1の高次を無視すれば、$r_1^{(i-1)}$, $r_1^{(i)}$, $r_1^{(i+1)}$, $T_1^{(i-1)}$, $T_1^{(i)}$, $T_1^{(i+1)}$を未知数とする2本の1次方程式である。定数項として0次近似解の誤差が入ってくる。これら2(N−1)個の

式と中心と表面での境界条件の式とで，未知数が決定される。係数でつくられるマトリックスは対角要素とその近傍の要素だけが0でないことを利用すれば計算機を用いて解くことは困難ではない。この点についてはHenyeyの方法と同じである。

§4　安定性一般論

平衡状態の安定性をしらべるために，物理量に添字0をつけて平衡を示し（誤るおそれがないときは0をはぶく），1で変化量を示す。変位をξとかき，また相対変化ϖ, η, θを次式で定義する。$P=P_0(1+\varpi)$, $\rho=\rho_0(1+\eta)$, $T=T_0(1+\theta)$。変化量の時間変化をe^{nt}で表す。nは一般に複素数である。複素変数で扱うために，位相の90°ことなる変化も同時に考慮して，

$$\mathcal{F} = \mathrm{Re}\int dm\Big[n^{(B)}\frac{P}{\rho}\varpi^*\{\eta+\mathrm{div}\,\xi\}^{(B)}+n^*\xi^*\cdot\Big\{n^2\xi+\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}(P\varpi)+\mathrm{grad}\,\psi_1$$
$$+\eta\,\mathrm{grad}\,\psi+2n(\Omega\times\xi)\Big\}^{(B)}+\theta^*\Big\{n\Big(c_V T\theta-\Big(\frac{\partial P}{\partial T}\Big)_\rho\frac{T}{\rho}\eta\Big)-\epsilon_1+\Big(\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\mathbb{H}\Big)_1\Big\}^{(B)}\Big] \quad (13)$$

但し角速度Ωで回転している座標系によって記述した。ψは遠心力を含めた重力ポテンシャルである。この式で変分をうけるのは{ }の外の$\varpi^*, \xi^*, \theta^*$および$n^*$（*は複素共役）である。$\varpi$等の固有関数に対して変分をとる方法と$n$に対して変分をとる方法とあるが，こゝでは後者に従い，前の方法による場合はあとで示す。

ϖ, ξ, θはe^{nt}という因子を持っているから，(13)をnによる

変分をとったときに、tが表に出ない項とtに比例した形の項とがある。すべてのt（但し無限小）について成立つためには両者とも0でなければならない。これは、(4)の$\mathfrak{L}$をtで展開した最初の2項の夫々に変分をほどこすことゝ同一である。このようにすると仕事積分$\int \frac{P}{\rho}\varpi^{*}\,\mathrm{div}\,\xi\, dm$を与える2本の式を得る。これを等しいとおくと、少し変形を行った結果

$$nn^{*2}\int_V \rho|\xi|^2 dr + 2nn^{*}\Omega\cdot\int_V \rho(\xi^{*}\times\xi)\,dr + n\Big\{\int_V \rho\Big[c_vT|\theta|^2+\Big(\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big)_T|\eta|^2 - \mathrm{grad}\,\psi\cdot(\xi\,\mathrm{div}\,\xi^{*}+\xi^{*}\mathrm{div}\,\xi) - \frac{d\ln\rho}{d\psi}|\xi\,\mathrm{grad}\,\psi|^2\Big]dr - G\iint_V \frac{\mathrm{div}(\rho\xi^{*})\,\mathrm{div}'(\rho\xi)'}{|r-r'|}\,dr\,dr'\Big\} - \int_V \rho\theta^{*}\Big[\epsilon_1-\Big(\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\mathbf{H}\Big)_1\Big]dr = 0. \qquad (14)$$

断熱変化の場合は最後の積分が0で、nについて1次下がる。この場合は、Clement (Ap J. 140, 1045, 1964) が別の方法で求め、その式は虚数のnについて通常の変分原理($\delta n=0$)をみたすことを示した。それを用いて彼は回転星の非球対称振動を求め、その固有振動数が球対称振動と一致する場合のビートを研究して、β Cep 星の脈動の説明をした。

非断熱の一般の場合については、nの実部の符号により安定性が判別される。安定条件には3つの場合があることがわかったが、結果は長くなるので書かない。共通していることは、安定のためにはいわゆる Dissipation Integral:

$$\mathrm{Re}\int_V \rho\theta^{*}\Big[\epsilon_1-\Big(\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\mathbf{H}\Big)_1\Big]dr < 0 \qquad (15)$$

である。(15)がみたされないと熱不安定又は脈動不安定となる。

§5 恒星安定性

球対称の星について球対称でかつ星の中に節をもたない変位を考える。今、固有関数のtrial functionとして最も簡単に

$$\varpi = \varpi_0 e^{nt}, \quad x \equiv \frac{\xi}{r_0} = x_0 e^{nt}, \quad \theta = \theta_0 e^{nt} \quad (\varpi_0, x_0, \theta_0 \text{ は定数})$$

を考える。振巾ϖ_0, x_0, θ_0が変分パラメーターである。勿論このような関数では局所的変化であることが本質的な不安定性、例えば核反応が薄い層で行なわれている場合の熱不安定性や外層の対流不安定性は取扱えない。

変分のポテンシャル関数は(13)で与えられる。$\delta\varpi_0$, δx_0, $\delta\theta_0$を独立にとれば、

$$\eta_0 + 3x_0 = 0 \tag{16}$$

$$(n^2 I - 4|E_G|)x_0 - |E_G|\varpi_0 = 0 \tag{17}$$

$$4Lx_0 - \left\{ \frac{n}{3}\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho |E_G| + (\epsilon_\rho + \kappa_\rho)L \right\}\eta_0 + \left\{ \frac{n}{3(\gamma-1)}|E_G| - (\epsilon_T + \kappa_T - 4)L \right\}\theta_0 = 0 \tag{18}$$

但しこれを導くにあたり、$\mathrm{grad}\,\psi = \frac{Gm}{r^2}$, $\epsilon = \epsilon_0 \rho^{\epsilon_\rho} T^{\epsilon_T}$, $\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = -(4\pi r^2)^2 \frac{4acT^4}{3\kappa}\frac{\partial \ln T}{\partial m}$, $\kappa = \kappa_0 \rho^{\kappa_\rho} T^{\kappa_T}$ を用いた。また

$$I \equiv \int r^2 dm, \quad |E_G| \equiv \int \frac{Gm}{r} dm = \int \frac{3P}{\rho} dm = \int 3(\gamma-1) C_v T\, dm, \quad \int \epsilon\, dm \equiv L \tag{19}$$

である。(16)－(18)に状態方程式より

$$\varpi_0 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T \eta_0 + \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho \theta_0 \tag{20}$$

を加え、係数の行列式を0とおくと、実係数のnについての3次方程式が得られる。安定条件（nの実部が負）はHurwitzの定理によって、次の3式で与えられる。

$$\left\{4-3\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T\right\}(\epsilon_T+\kappa_T-4)+\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho\left\{4+3(\epsilon_\rho+\kappa_\rho)\right\}>0 \tag{21}$$

$$(\gamma-1)\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho^2+\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T-\frac{4}{3}>0 \tag{22}$$

$$(\gamma-1)\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho(\epsilon_T+\kappa_T-4)+\left(\epsilon_\rho+\kappa_\rho+\frac{4}{3}\right)<0 \tag{23}$$

完全気体として $\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_T=1$, $\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T}\right)_\rho=1$ をとれば, それぞれ

$$\epsilon_T+\kappa_T+3(\epsilon_\rho+\kappa_\rho)>0 \tag{24}$$

$$\gamma-\frac{4}{3}>0 \tag{25}$$

$$(\gamma-1)(\epsilon_T+\kappa_T)+(\epsilon_\rho+\kappa_\rho)-4\left(\gamma-\frac{4}{3}\right)<0 \tag{26}$$

上から永年(又は熱)安定性, 力学的安定性, 脈動安定性のための条件式である。標準的な値として, $\kappa_\rho=1$, $\kappa_T=-3.5$ 又は $\kappa_\rho=\kappa_T=0$, $\epsilon_\rho=1$, $\epsilon_T=5\sim20$, $\gamma=\frac{5}{3}$ を用いれば, 脈動安定性のみが満たされないことになる。これには ϵ_T が大きいことがきいているが, 質量の非常に大きい星 ($M>60M_\odot$) の場合には定性的に正しい。ケフェウス型脈動星などでは核反応のきく中心部では脈動振巾が小さく, ϵ_T の項はきかない。外層において水素やヘリウムの半電離の層があって, そこで γ が小さいことが脈動の原因になっている。

結論として, 一般変分原理は流体力学と熱力学とを合わせた領域の研究に一般的かつ見通しのよい方法を与えることが明らかとなった。定性的な理論研究にも, 非線型の数値計算法としてもつかえるので, その利用される範囲は非常に広いものといえる。